Examen de ingreso a la Maestría en Ciencias Matemáticas

> **Instrucciones**: Resolver 2 problemas de Análisis y 2 problemas de Álgebra. Escribir las soluciones de los problemas de análisis en distintas hojas de las soluciones de los problemas de álgebra.

Nombre: ____

Problemas de análisis

1. Supongamos que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$, $f(0) = 0$, y f' es monótona creciente. Probar que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ definida en $x \in (0, \infty)$, es monótona creciente.

2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$0 = \int_0^1 f(x)x^n dx$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Probar que f es la función constante 0.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(0, 0) = 0$, y $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$. Mostrar que en el origen existen las derivadas direccionales en cualquier dirección. ¿Es la función continua en el origen?

4. Sea $C \subset \mathbb{R}$ cerrado. Defínase una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \inf\{|x - c| : c \in C\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es continua y que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C$.

Problemas de álgebra

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, 0)$. Encontrar la dimensión de $Im(T)$ y de $Ker(T)$.

2. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ tal que A^2 es la matriz identidad. Demostrar que uno de los valores propios de A es 1 o -1.

3. Sean $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$, y $\alpha \in \mathbb{K}$ un valor propio de T. Si $n \in \mathbb{N}$, demuestra que α^n es un valor propio de T^n, y si además T es invertible, entonces α^{-n} es un valor propio de T^{-n}.

4. Sean $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V. Si $Im(T) = Im(T^2)$, demuestra que $V = Im(T) \bigoplus Ker(T)$.