Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.

FCFM, BUAP 26 de noviembre 2018

Álgebra

Resuelve dos problemas de los siguientes 3:

Sean V un espacio vectorial sobre un campo F, $T : V \longrightarrow V$ una trasformación lineal y $W \leq V$ un subespacio $T-$invariante. Definimos y denotamos por $\overline{T}$, a la siguiente transformación lineal en el espacio cociente

$$\begin{array}{rccc} \overline{T}: & V \diagup W & \longrightarrow & V \diagup W \\ & v + W & \longmapsto & T(v) + W \end{array}$$

1. Sea $T\mid_W : W \longrightarrow W$ la restricción de T a W. Demuestra que: si $T\mid_W$ y $\overline{T}$ son diagonalizables y no tienen valores propios en común, entonces T es diagonalizable.

Sean V un espacio vectorial sobre un campo F, $T : V \longrightarrow V$ una trasformación lineal y $\lambda \in F$ un valor propio de T. Definimos y denotamos al espacio propio generalizado de T correspondiente a λ como sigue:

$$K_\lambda = \{u \in V : \ (T - \lambda 1_V)^p(u) = 0 \text{ para algún entero positivo } p\}$$

donde $1_V : V \longrightarrow V$ es la identidad.

2. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F, $T : V \longrightarrow V$ una trasformación lineal y $\lambda \in F$ un valor propio de T de multiplicidad m. Si el polinomio característico de T, $\varphi_T(x) \in F[x]$ se factoriza totalmente (se escinde), demuestra que:

(a). $\dim_F(K_\lambda) \leq m$.

(b). $K_\lambda = \ker(T - \lambda 1_V)^m$.

3. Determina si cada una de las matrices es diagonalizable o no (justifique). En caso de ser diagonalizable, encuentra una base de vectores propios:

(a). $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(b). $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.

FCFM, BUAP 26 de noviembre 2018

Análisis

Resuelve dos problemas de los siguientes 3:

1. Demuestra que existe al menos una recta que es tangente a las gráficas de las funciones exponencial e^x y logaritmo $\ln(x)$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [-1,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in [-1,\ 1]$ por $f_n(x) = \left|x^2 - 1\right|^{1+\frac{1}{n}}$. Demuestra que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente.

3. Sea $f : \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x,\ y - x^2\right) & \text{si } x^2 \leq y, \\ \left(x,\ x^2 - y\right) & \text{si } 0 \leq y < x^2. \end{cases}$$

Definimos a $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } y \geq 0, \\ f(-x,-y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

(a). ¿Es F continua en $(0,0)$? Justifica tu respuesta.
(b). ¿Es F diferenciable en $(0,0)$? Justifica tu respuesta.