**Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.**

FCFM-BUAP. 27 de noviembre de 2017

## Análisis

***Resolver 2 problemas de los siguientes 3***

1. Sea $f$ una función definida en $\mathbb{R}^2$ por la regla:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) Demuestre que en el punto $(0,0)$ existen las derivadas direccionales de $f$ en cualquier dirección.
(ii) ¿Es $f$ continua en el punto $(0,0)$?

2. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que

$$\int_0^1 f(x)\left(\mathrm{e}^x + 1\right) dx = \mathrm{e} f(\xi)$$

para algún $\xi \in [0,1]$.

3. Encuentre la derivada de

$$G(x) = \int_0^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt.$$

**Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.**

FCFM-BUAP. 27 de noviembre de 2017

## Álgebra

***Resolver 2 problemas de los siguientes 3***

1. Sean $F$ un campo y $V, W$ dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$. Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, demuestre que:
(i) $K = \mathrm{Ker}\,(T) \leq V$,
(ii) $\mathrm{Im}\,(T) \leq W$ y
(iii) $V/K \cong \mathrm{Im}\,(T)$ como espacios vectoriales sobre $F$.

2. Sean $F$ un campo y $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $F$. Sean $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ los distintos valores propios de $T$, demuestre que:
$T$ es diagonalizable si y sólo si $V = \bigoplus_{i=1}^{t} E_{\lambda_i}$, donde $E_{\lambda_i}$ es el espacio propio asociado a $\lambda_i$.

3. Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno (producto punto)

$$\langle (x_1,\, x_2,\, x_3)\,,\, (y_1,\, y_2,\, y_3)\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \qquad \forall\,(x_1,\, x_2,\, x_3)\,,(y_1,\, y_2,\, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Sea

$$S = \{(1,0,1)\,;\,(0,1,1)\,;\,(1,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Encuentre una base ortonormal de $\langle S\rangle$ utilizando el proceso de Gram Schmidt.