Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.
FCFM-BUAP. 28 de noviembre de 2016

ANÁLISIS MATEMÁTICO ***Resolver 2 problemas de los siguientes 3***

1. Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(0,1]$ y $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in (0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in (0,1]$ de tal manera que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a 0. Demostrar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que
$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{1}{3}f(\zeta),$$
para algún $\zeta \in [0,1]$.

3. Sean X y Y subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (M,d). Definimos $D(X,Y) = \inf\{d(x,y) : x \in X,\, y \in Y\}$.

   (a) Si $X = \{x_0\}$ con $x_0 \in M$ y Y es compacto, demostrar que $D(X,Y) = d(x_0, y)$, para algún $y \in Y$.

   (b) Si X y Y son compactos, demostrar que $D(X,Y) = d(x,y)$, para algunos $x \in X$ y $y \in Y$.

ÁLGEBRA LINEAL ***Resolver 2 problemas de los siguientes 3***

4. Sea $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, donde $w_1 = (1,0,1,0)$, $w_2 = (1,1,1,1)$ y $w_3 = (0,1,2,1)$. Encontrar la proyección ortogonal del vector $v = (1,2,3,0)$ sobre W.

5. Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4a_1 & & + a_3 \\ 2a_1 & + 3a_2 & + 2a_3 \\ a_1 & & + 4a_3 \end{pmatrix}.$$
Encontrar los valores propios de T, una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de T y por último determinar la matriz asociada a T respecto a esta base.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal (operador lineal). Demostrar que si
$$\dim(\text{Im } T) = \dim(\text{Im } T^2),$$
entonces $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$, donde $\text{Im } T$ es la imagen de T y $\text{Ker } T$ es el núcleo de T. Deducir que $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$.