INSTRUCCIONES

Resolver 2 ejercicios del examen de Álgebra lineal y 2 ejercicios de Análisis.

Examen de Álgebra Lineal

Ejercicio 1

Demuestra la siguiente proposición:

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)).$$

Ejercicio 2

Sea V un espacio con producto interno y $W \leq V$ un subespacio de dimensión finita. Demuestra que:

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Ejercicio 3

Determina si las matrices dadas son diagonalizables. En caso afirmativo diagonaliza la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definición

Una función bilineal b sobre $\mathbb{R}^n$ es **degenerada**, si existe $v \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ tal que la función lineal

$$\begin{array}{rccc} h_v: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b(v, x) \end{array}$$

es idénticamente cero.
b es **no degenerada** si no es degenerada.

Ejercicio 4

Demuestra que si $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y b es una función bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz

$$B = [b\,(u_i, u_j)]$$

es invertible.

Examen de Análisis

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1. Calcule los valores de f_x y f_y en $(0,0)$.

2. Calcule los valores de f_x en el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0,\, y \neq 0\right\}$ y f_y en el conjunto $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0,\, y = 0\right\}$.

3. Calcule los valores de f_{xy} y f_{yx} en $(0,0)$.

4. ¿Por qué no contradice el Teorema de Young?

5. ¿La función f es dos veces diferenciable en $(0,0)$?

Ejercicio 2

Sea f Riemann integrable sobre $J = [a,b]$ y sea $f(x) > 0$ para todo $x \in J$. Mostrar que la integral de $f(x)$, en el intervalo $[a,b]$, es estrictamente mayor que cero.
(Idea: para cada $n \in \mathbb{N}$, sea H_n la cerradura del conjunto de puntos $x \in J$ tales que $f(x) > 1/n$ y aplicar teorema de Baire).

Ejercicio 3

¿La función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es periódica? De ser afirmativa su respuesta, encuentre todos los periodos.

Notación

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x|| \leq 1\}$.

Teorema del punto fijo de Brouwer

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada función continua

$$f : D^n \longrightarrow D^n$$

existe $x_0 \in D^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Ejercicio 4

Demuestra el Teorema del punto fijo de Brouwer para el caso $n = 1$.