Análisis Matemático 4 de junio de 2019

Nombre:____

Resuelve dos problemas de los siguientes 4:

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$ y supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$. Demostrar si es cierta o no la igualdad
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

2. Demuestre que de todos los triángulos de perímetro dado, el triángulo equilátero posee el área máxima.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Supongase que f admite derivadas parciales hasta de segundo orden con respecto a x, las cuales son continuas en x y en t. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y
$$\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt.$$
a) Demostrar que φ es derivable en todo real x, y que
$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt.$$
b) ¿Se podrá llegar a un resultado similar si $a = -\infty$ y $b = \infty$.

4. Supónga que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función con la propiedad del valor intermedio y que para cada racional r, el conjunto $f^{-1}(r)$ es cerrado. Demuestre que f es continua.

Álgebra (4 de junio de 2019)

Nombre:____

Resuelve dos problemas de los siguientes 4:

1. Sean V un F-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Demuestre que si $dim(T) = dim(T^2)$, entonces $T(V) \cap Ker(T) = \{0\}$. Deduzca que $V = T(V) \bigoplus Ker(T)$.

2. Sean V un F-espacio vectorial con producto interno y $T : V \to V$ un operador lineal. Demuestre que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in V$ si y solo si $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in V$.

3. Sean V y W F-espacios vectoriales, y $\beta \subseteq V$ base de V. Demuestre que para toda función $f : \beta \to W$ existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x) = f(x)$, para todo $x \in \beta$.

4. Sean V un F-espacio vectorial, W un subespacio T-invariante de V no trival y $T : V \to V$ un operador lineal. Demuestre que si T es diagonalizable, entonces la restricción $T|_W$ es diagonalizable.