Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.
FCFM-BUAP. 5 de junio de 2018
Álgebra
Resolver 2 problemas de los 3 siguientes.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $dim(Ker\ T) = dim(ker\ T^2)$.
Probar que $Im\ T \cap Ker\ T = \{0\}$ y deducir que

$$V = Ker\ T \oplus Im\ T.$$

donde $Im\ T$ es la imagen de T y $Ker\ T$ es el núcleo de T.

2. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$$

Encontrar la dimensión de $Im\ \varphi$ y $Ker\ \varphi$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

la matriz de un operador lineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (en la base estándar). Hallar la forma diagonal de φ y la base correspondiente.

Examen de Admisión. Maestría en Ciencias Matemáticas.
FCFM-BUAP. 5 de junio de 2018
Análisis
Resolver 2 problemas de los 3 siguientes.

1. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$ y $f([0,\frac{1}{2}]) \not\subset \{0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in [0,\infty)$ por

$$g_n(x) = f(\tfrac{\sqrt[n]{x}}{1+\sqrt[n]{x}})$$

Probar que
(a) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a 0.
(b) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a 0.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in [-1,1]$ por

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$$

Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \text{ o } y \in \mathbb{I} \end{cases}$$

(a) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es F continua? Justifique su respuesta.
(b) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es F diferenciable? Justifique su respuesta.