Examen de Admisión. Maestría en Matemáticas.
FCFM-BUAP. 7 de junio de 2016

Ánalisis Matemático y Variable Compleja

Resolver 3 problemas de los siguientes 4

1. Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(0,1]$ y $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in (0,1]$. Sea $a_n = f(1/n)$ para $n = 1,2,3,....$ Demostrar que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente.

2. Sea f una función definida en $\mathbb{R}^2$ por la regla:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Pruebe que en el punto $(0,0)$ existen las derivadas direccionales de f en cualquier dirección. ¿Es f continua en el punto $(0,0)$?

3. Suponga que f es analítica en el conjunto $U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re} z > 1\}$ y que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ en U. Demostrar que existen una constante real c y una constante compleja d tales que $f(z) = -icz + d$ en U.

4. Para la función $f(z) = z^\alpha$, $\alpha, z \in \mathbb{C}$, hallar fórmulas explícitas para $u(x,y)$ y $v(x,y)$, encontrar la región en $\mathbb{C}$ donde la función f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y calcular la derivada $f'(z)$ con el supuesto de que existe.

(En los problemas 3 y 4 $u(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \mathrm{Im} f(x+iy)$ para $z = x+iy$)

Álgebra Lineal

Resolver 2 problemas de los siguientes 3

5. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V y sea λ un valor propio de T. Pruebe que:
   (a) λ^n es un valor propio de T^n para cada $n = 1,2,3,...,$
   (b) si T es invertible, entonces $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es un valor propio de T^{-1}.

6. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador de proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Encuentre la matriz de P en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Sean U y W subespacios vectoriales de V. Demuestre que
$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$