Examen de Admisión, Maestria Matemáticas
Julio 2012

1. Demostrar que para una función real, con valores reales, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) La función f es continua, y

(b) Para cada número racional $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(r)$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y f tiene la propiedad del valor intermedio (i.e., para cualesquiera números a y b en $\mathbb{R}$, con $a < b$, y para cualquier número y en $\mathbb{R}$, tal que $f(a) < y < f(b)$, existe un número x en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x) = y$).

2. Sea f una función positiva y continua.

Demostrar que:

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

es creciente en $[0, \infty)$.

3. Determine si las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas (justifique su respuesta)

a) La intersección de dos subconjuntos de un espacio vectorial es un subespacio vectorial,

b) Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V, entonces el generado de S es igual a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S,

c) El conjunto vacio es linealmente dependiente,

d) Un conjunto maximal linealmente independiente en un espacio vectorial es una base para el espacio vectorial,

e) Sea $T: V \to W$, dim.$V = n$, dim. $W = m$. Si T es una transformación lineal, entonces T manda subconjuntos linealmente independientes en V, en subconjuntos linealmente independientes en W,

f) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $A^2 = 0$ implica $A = 0$,

g) Cualquier transformación lineal es un funcional,

h) Si T es un operador en V, entonces cualesquiera dos vectores propios son linealmente independientes.

4. Considere el operador T sobre $P_2(\mathbb{R})$, dado por $T(a+bx+cx^2) = c+bx+(a-b)x^2$.

a) ¿Es T un isomorfismo? (justifique su respuesta),

b) Si T es un isomorfismo, ¿cuál es su inversa?,

c) Con respecto a la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$, halle la matriz asociada a T,

d) Determine los vectores y valores propios de T.