Examen de Admisión al Programa de Maestría en Matemáticas

5 de junio de 2008

1. Determinar el valor de a tal que el siguiente sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right]$$

tiene:
(a) ninguna solución; **(b)** más de una solución; **(c)** una única solución.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demostrar que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente si sólo si existe $x \in V$ tal que existen dos n-adas diferentes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal que $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$.

3. Sea $T : \Re^3 \to \Re^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3).$$

Encontrar la dimensión de $Im(T)$ y $Ker(T)$.

4. ¿ Es $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1)\}$ una base para $\Re^2$?. Si lo es, encuentra una base ortonormal.

5. Usando la definición $\epsilon - \delta$ para el límite, demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = (1,0),$$

donde $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

6. Sea $f : (0,1] \to \Re$ diferenciable en $(0,1]$ y $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in (0,1]$. Sea $a_n = f(1/n)$. Demostrar que $\{a_n\}$ es una sucesion convergente.

7. (a) ¿ Una función continua es diferenciable? Si no, da un ejemplo.

(b) ¿ Una función diferenciable es continua? Si no, da un ejemplo. .

8. Sea $f : [a,b] \to \Re$ tal que $f(x) \geq 0$ para todas $x \in [a,b]$ y Riemann integrable. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$