Examen de ingreso a la Maestría en Matemáticas.

Diciembre del 2015

1. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal e inyectiva. Demuestre que si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es linealmente independiente en V, entonces $\{T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)\}$ es linealmente independiente en W.

2. Sean $M_2(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales cuadradas de dimensión 2 y $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Encontrar la matriz de la transformación T y las dimensiones de $Im(T)$ y $Ker(T)$.

3. Sea f una función continua real de variable real. Demostrar que

$$\int_0^1 f(x)x^3dx = \frac{1}{4}f(\zeta)$$

   para algún $\zeta \in [0, 1]$.

4. Supongase que $c_0, c_1, ..., c_{n-1}, c_n$ son constantes en $\mathbb{R}$ tales que

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + ... + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

   Demostrar que la ecuación

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$$

   tiene por lo menos una solución entre 0 y 1.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$g_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{nx}, & \text{si } \frac{1}{n} < x. \end{cases}$$

   Demostrar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) = 0$ para todo $x \in [0, \infty)$. Demostrar que la convergencia es uniforme en $[c, \infty)$ si $c > 0$, pero no lo es en $[0, \infty)$.

6. Sea $(\mathbb{Q}, d)$ el epacio métrico donde $d(p, q) = |p - q|$. Considere el espacio $E = \{q \in \mathbb{Q} \colon 2 < q^2 < 3\}$, demostrar que E no es compacto, sin embargo, E es cerrado y acotado.