



Puebla, Pue., 26 de mayo de 2025

Nombre(s) y Apellidos completos:

Instrucciones: Resolver 2 problemas de Análisis y 2 problemas de Álgebra.
Escribir las soluciones de los problemas de análisis en distintas hojas de las
soluciones de los problemas de álgebra.

Ejercicios de Análisis Matemático

- (1) Sean a_0 , a_1 y a_2 números reales. Demuestre que existe un número real x tal que

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Sugerencia: Use el Teorema del Valor Intermedio.

- (2) Hallar los valores máximos y mínimos de la función f dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 3y + 2$ en el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (3) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre \mathbb{R} . Demuestre que, para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt \right] du.$$

Ejercicios de Álgebra

- (4) Sean ${}_K V$ un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Demuestre que $T^2 = T$, si y solo si, T es una proyección. (Sugerencia: Considere $Fij(T) = \{v \in V \mid T(v) = v\}$, muestre que $Fij(T) \leq V$, $V = Ker(T) \oplus Fij(T)$ y $T = \pi_{Fij(T)}$).
- (5) Sean K un campo, ${}_K V$, ${}_K W$ espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que:

- (a) La función

$$T_* : \begin{array}{ccc} Hom_K(K, V) & \mapsto & Hom_K(K, W) \\ \alpha & \mapsto & T \circ \alpha \end{array}$$

es una transformación lineal.

- (b) Existe un isomorfismo

$$\Psi_V : V \rightarrow Hom_K(K, V).$$

(c) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow \Psi_V & & \downarrow \Psi_W \\ \text{Hom}_K(K, V) & \xrightarrow{T_*} & \text{Hom}_K(K, W) \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $T_* \circ \Psi_V = \Psi_W \circ T$.

(6) Determine los valores de k para los cuales el sistema

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= -2. \end{aligned}$$

- (i) No tiene solución.
- (ii) Tiene solución única.
- (iii) Tiene una infinidad de soluciones.