

Examen de admisión  
Maestría

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP, 2008

1. Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 = I$  (donde  $I$  es la matriz unitaria). Demostrar que uno de los valores propios de  $A$  es igual a 1 o a  $-1$ .

2. Sea  $\mathbb{V}$  el espacio vectorial de funciones de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  generado por las funciones  $e^x$ ,  $xe^x$ ,  $x^2e^x$ ,  $e^{2x}$ . Sea  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  el operador lineal definido por la regla:

$$T(f) = f'.$$

¿Es  $T$  diagonalizable?

3. Sean  $\mathbf{v} = (1, 3, 5, 7)$  y  $W$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  generado por  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$  y  $\mathbf{u}_2 = (1, -3, 4, -2)$ . Encontrar un vector  $\mathbf{w} \in W$  que minimice  $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|$ .

4. ¿Para qué valores del parámetro  $a$  existe una función real  $f$  definida y diferenciable en una vecindad de  $(0, 0)$  tal que  $f(0, 0) = 0$  y  $af^3 + (a+x+1)f - y^2 + x = 0$ ?

Encontrar la derivada  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ .

5. Sea  $C$  un conjunto cerrado no vacío en  $\mathbb{R}$ . Definamos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \inf\{|x - y| : y \in C\}.$$

Demostrar que  $f$  es continua y que  $f(x) = 0$  si y sólo si  $x \in C$ .

6. ¿Cuántas funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfacen la ecuación  $(f(x))^2 = x^2$ ?

¿Cuántas funciones continuas?

¿Cuántas funciones diferenciables?