Examen General de Algebra

Maestría en Ciencias (Matemáticas). FCFM-BUAP.

Agosto 2011.

El alumno contesta tres preguntas: dos preguntas de la parte **I** *(Algebra General) y una pregunta de la parte* **II** *(Algebra Lineal).*

I. Algebra General

1. Sea $G = < a >$ un grupo cíclico de orden n. Sea $G^m = \{x^m : x \in G\}$.
   Pruebe que
   (a) G^m es un subgupo de orden $n/(m,n)$
   (b) a^k es un generador de $G^m \iff (k,n) = (m,n)$
   / (m,n) *es el máximo común divisor de* m *y* n /
   (c) Lístense los elementos y los generadores de G^6 para
   $$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\},$$
   el grupo multiplicativo de las raices octavas de 1.

2. Sea G un grupo. Demuestre que
   (a) para cada $g \in G$, $i_g : G \longrightarrow G$, dado por $i_g(x) = gxg^{-1}$, es un automorfismo de G (llamado el *automorfismo interno* de G);
   (b) el conjunto $Inn(G)$ de todos los automorfismos internos de G es un subgrupo normal del grupo $Aut(G)$ de todos los automorfismos de G;
   (c) $Inn(G)$ es isomorfo a $G/Z(G)$, donde $Z(G)$ es el centro de G.

3. Sea A un anillo con 1 tal que $a^2 = a$ para todas las $a \in A$ (i.e. A es un anillo *booleano*). Muéstrese que
   (a) A es conmutativo;
   (b) $\forall a \in A$ $2a = 0$ y $a(a+1) = 0$;
   (c) si $\mathcal{P}$ es un ideal primo de A, entonces $A/\mathcal{P}$ es un campo de dos elementos;

(d) $\forall a, b \in A$ $(a)+(b) = (a+b+ab)$, donde $(a), (b), (a+b+ab)$ son los ideales principales generados por $a, b, a+b+ab$ respectivamente.

4. Pruebe que

$$\mathbf{F} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z}_3 \}$$

(i) es un subanillo del anillo $M_{2\times 2}(\mathbf{Z}_3)$ de las matrices 2×2 sobre $\mathbf{Z}_3$,
(ii) es un campo de 9 elementos.

Encuentre un generador del grupo multiplicativo del campo $\mathbf{F}$.

II. Algebra Lineal

5. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (en la base estándar). Hallar la forma diagonal de matriz del operador T y la base correspondiente.

6. Sea W un subespacio del espacio $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$\mathbf{a_1} = (1, 0, 1, 0, 1)$,
$\mathbf{a_2} = (1, -1, 1, 0, 0)$,
$\mathbf{a_3} = (0, 1, 0, 0, 1)$.

(a) Hallar la proyección ortogonal del vector $\mathbf{x} = (-1, -3, 2, 1, 0)$ sobre W.

(b) Hallar una base de $W^{\perp}$.