Aplicado el 11/Dic/06

Examenes Generales. Programa de Doctorado.
Postgrado - FCFM - BUAP

Convocatoria de Diciembre de 2006. Parte escrita.

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Demuéstre que las ecuaciones

$$\begin{cases} xyu - yv^2 + 2x^3 = 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - x^3y = 0 \end{cases}$$

pueden resolverse para u y v en términos de x y y, en las cercanias del punto $(u,v,x,y) = (0,1,1,2)$, y determínense $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua real. Muestre que

$$\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \frac{1}{3}f(\xi)$$

para alguna $\xi \in [0,1]$.

3. Sean P y Q polinomios con coefficientes complejos tales que $\text{grado}(P) + 2 \leq \text{grado}(Q)$ y que Q no tiene ceros reales.

a) Muestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

es la suma de los residuos que $\frac{P}{Q}$ tiene en el semiplano superior.

b) Aplique este método para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

II. Topología y Medida

1. Pruebe que para cualesquiera racionales p y q existe una función continua $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 3$, donde $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son los subespacios de los números racionales y de los números enteros del espacio de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual.

2. Dado $p \geq 1$, λ la medida de Lebesgue. Sea

$$f_n = \frac{1}{n^{1/p}} \chi_{[0,n]}$$

donde $\chi_{[0,n]}$ es la función característica del conjunto $[0, n]$.

   a) Pruebe que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función nula.

   b) ¿ Converge $\{f_n\}$ en la norma de $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda)$?

   c) ¿ Converge $\{f_n\}$ en medida ?

III. Algebra Lineal y Algebra General

1. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Sea la transformación lineal $E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida por $Ef = f + f'$, donde f' es la derivada de $f \in \mathbb{R}[x]$. Pruebe que E es invertible.

2. Sea A un anillo con el elemento unitario 1. Sea $G(A)$ el conjunto de todos las unidades de A. (Recuerde que $x \in A$ se llama una unidad si $xy = yx = 1$ para alguna $y \in A$).

   a) Pruebe que $G(A)$ es un grupo multiplicativo.

   b) Pruebe que $G(\mathbb{Z}[i])$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, donde $\mathbb{Z}[i]$ es el anillo de todos los números complejos $m + ni$ tales que m y n son enteros.

Seleccionar Una

Examenes doctorales

Convocatoria de enero de 2002.

Parte escrita. . El problema de Algebra

I] Sea

$$\mathbf{A} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z}_5 \}$$

1. Pruébese que $\mathbf{A}$ es un subanillo conmutativo con 1 del anillo de las matrices 2×2 sobre $\mathbf{Z}_5$, pero no es un campo.

2. Pruébese que $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{A}$ es un divisor de cero si y sólo si $a^2 + b^2 = 0$. Dése una lista de todos divisores de cero de $\mathbf{A}$.

3. Encuéntrense todos los ideales de $\mathbf{A}$

II] Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $m = \dim F$, $n = \dim E$, $u : E \to F$ lineal, mostrar que existe un número entero positivo $r \leq \operatorname{Min}\{n, m\}$ y bases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ de E y F, respectivamente, tales que:

$$\operatorname{Matriz}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{r} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Selecciona dos

PROBLEMAS de Análisis

I] Hallar el minimo y maximo absolutos para las funciones:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el disco unitario $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Respuesta: $f(0,0) = 0$ - minimo, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$ - maximo.

b) $f(x,y) = x + yz$ en la bola $D = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Respuesta: $f(-1,0,0) = -1$ - minimo, $f(1,0,0) = 1$ - maximo.

II] Sean $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2/\pi, \ -1 \leq y \leq 1\}$

$f : A \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}\, \operatorname{sen} 1/x, \ x-y)$

(a) ¿Es $f(A)$ un conjunto conexo?

(b) ¿Es $f(A)$ un conjunto compacto?

justifique.

III] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x=0 \text{ ó } y=0 \\ 1 & \text{otros punt} \end{cases}$

~~Determine~~

(a) los puntos de continuidad

(b) las direcciones en las cuales existen las derivadas direccionales en $(0,0)$

(c) los puntos de diferenciabilidad de la función y en ellos, la diferencial.

IV] Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$

(a) calcular $\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dx$ y $\underline{\int_0^1} f(x,y)\,dx$ en términos de y

(b) Probar que $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ existe para cada x fijo y calcular $\int_0^t f(x,y)\,dy$ en términos de x y t para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.

(c) Si $F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$, probar que $\int_0^1 F(x)\,dx$ existe [illegible]

Exámenes Predoctorales Generales

Convocatoria de Julio de 2002. Parte escrita.

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III.**

I. Análisis Clásico

1. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas, que convergen uniformemente en $]0,1]$. Demuestre que converge uniformemente en $[0,1]$.

2. Consideremos la función real de dos variables reales $f(x,y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Calcule las derivadas parciales de la función en $(0,0)$ y analice la diferenciabilidad de la función en dicho punto.

II. Topología, Variable Compleja, Medida e Integración

1. Sea (X,d), un espacio métrico compacto y conexo. Sea $A \subset X$ una parte también compacta, conexa y no vacía.

   Se define, para $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon := \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$.

   (a) Pruebe que A_ε es compacto.

   (b) De un ejemplo que demuestre que A_ε no es necesariamente conexo.

2. Dada la función compleja de variable compleja $f(z) := (e^z - 1)/z^3$,

   (a) Diga si tiene un polo en el origen y en tal caso de qué orden.

   (b) Calcule el desarrollo en serie de Laurent de f en $z = 0$.

   (c) Cuál es el residuo de f en $z = 0$.

3. Dada la función $F(x) := 1$, si $x \leq 1$, x^2 si $1 \leq x < 3$, 10 si $x \geq 3$ y μ_F la medida de Stieltjes asociada a la función,

   (a) Calcule $\mu_F([0,2])$.

   (b) Calcule $\mu_F([0,3])$.

   (c) Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\mu_F(x)$.

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea A un anillo con unitario tal que $a^2 = a$ para todas las $a \in A$ (i.e. A es un anillo *booleano*). Demuestre que

   (a) A es conmutativo y $2a = 0$, $a(a+1) = 0$ $\forall a \in A$

   (b) todo ideal primo $\mathcal{P}$ en A es maximal

   (c) si $\mathcal{P}$ es un ideal primo, entonces $A/\mathcal{P}$ es un campo de dos elementos

   (d) $\forall a, b \in A$ $(a) + (b) = (a + ab + b)$, donde (a), (b), $(a + ab + b)$ son ideales principales generados por a, b, $a + ab + b$ respectivamente.

   ¿ Existe anillo booleano de 6 elementos?

2. Sea $\mathbb{P}_k$ el espacio lineal real $k+1$ dimensional de los polinomios algebraicos hasta el grado k, con base ordenada $1, x, x^2, ..., x^k$.

   Sea $D : \mathbb{P}_k \to \mathbb{P}_k$, el operador derivación.

   (a) Represente D mediante una matriz asociada a la base dada.

   (b) ¿ Cuál es el kernel de D?

   (c) ¿ Existen valores y vectores propios de D?

Jurado examinador:

Dr. Alexander Bykov (Presidente) . . . .

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna (Secretario) . . . .

Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo (Vocal) . . . .

Dr. Jorge Bustamante González (Vocal) . . . .

Dr. Raúl Escobedo Conde (Vocal) . . . .

Dr. Arnoldo Bezanilla López (Suplente) . . . .

Análisis Matemático
Examen de Admisión para ingreso a la
Maestría en Matemáticas
20 de Enero 2003

1.- Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y supóngase que f admite derivada hasta de orden 3.
Pruebe que si $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$
y $f(1) = 1$, entonces existe $x \in (-1, 1)$ tal que

$$3 \leq f^{(3)}(x)$$

2.- Sea f integrable según Riemann en el intervalo $[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe una funcio continua g tal que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx < \varepsilon .$$

3.- Calcule (si existen) los límites siguientes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x}$

b) $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{sen}^2 s \, ds$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{(n+5)^2 + 1}$

Examen de Álgebra

1.- Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre un campo K, ambos de dimensión finita. $\mathbb{V}^*$ denota el espacio dual de $\mathbb{V}$.

Determina la veracidad de los enunciados siguientes:

a) Toda espacio vectorial tiene una base. ( )

b) El subespacio generado por el conjunto vacio es el conjunto vacio. ( )

c) Dado un conjunto linealmente dependiente podemos extraer de él un conjunto linealmente independiente. ( )

d) Toda cadena posee un elemento maximal. ( )

e) Toda elemento maximal es único. ( )

f) Un subconjunto maximal y linealmente independiente es una base. ( )

g) $\{0\}$ es el único espacio vectorial que no tiene base. ( )

h) Sean $T, U : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transformaciones lineales y α, β bases ordenadas de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, si $[T]_\alpha^\beta = [U]_\alpha^\beta$, entonces $U = T$. ( )

i) Todo espacio vectorial es isomorfo a su espacio vectorial bidual. ( )

j) Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ es un isomorfismo α es base de $\mathbb{V}$, entonces $T(\alpha)$ es base de $\mathbb{V}^*$. ( )

k) Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineal, la dimensión de $\mathbb{V}$ es n, si T es invertible y λ es un eigenvalor de T, entonces $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ es eigenvalor de T^{-1}. ( )

l) Todo espacio vectorial de dimensión finita dotado de un producto interno posee una base ortonormal. ( )

2.- Pruebe o de un contraejemplo para el siguiente enunciado:

Sean $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ es subespacio vectorial de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2$ o $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_1$.

3.- Sea el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^n$ y consideremos el subespacio

$$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0, \ x_n = 0\}.$$

a) Proporcione una base de L.

b) Para el caso $n = 3$ construya una base ortonormal de L.

c) Sea $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Halle la proyección ortogonal de y sobre L.

d) Si $P : E \to E$ es un operador que a cada $x \in E$ le asocia su proyección ortogonal respecto a L, encuentre la matriz A_p de representación de P en la base canónica.

4.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de un operador lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (en la base estándar). Hallar la forma diagonal de la matriz del operador T y la base correspondiente.

Examenes Predoctorales Generales
FCFM - BUAP

Convocatoria de Julio de 2003. Parte escrita.

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$g(x, y) = (2ye^{2x}, xe^y)$$

y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$f(x, y) = (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3).$$

(a) Demuestre que g es localmente invertible en el punto $(0, 1)$.

(b) Calcule $D(f \circ g^{-1})$ en el punto $(2, 0)$.

2. Sea $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcule

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz.$$

II. Topología, Medida e Integración

1. Considere una función entre dos espacios topológicos, $f : X \to Y$, donde Y es de Hausdorff y compacto. Demuestre que f es continua si y sólo si la gráfica de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es un subconjunto cerrado del producto $X \times Y$.

2. Utilizando la técnica de construcción del conjunto de Cantor, desarrolle un ejemplo de un conjunto cerrado y de interior vacío C, en $[0, 1]$, cuya medida de Lebesgue sea positiva estrictamente.

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea G un grupo. Demuestre que

   (a) para cada $g \in G$, la función $i_g : G \longrightarrow G$, dada por $i_g(x) = gxg^{-1}$, es un automorfismo del grupo G, llamado el *automorfismo interno* de G;

   (b) el conjunto $Inn(G)$ de todos los automorfismos internos de G es un subgrupo normal del grupo $Aut(G)$ de todos automorfismos de G;

   (c) $Inn(G)$ es isomorfo a $G/Z(G)$, donde $Z(G)$ es el centro de G.

2. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función cuadrática que tiene en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la forma

$$q(x_1, x_2, x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

   Reduzca la forma cuadrática a la forma canónica y encuentre la base ortonormal correspondiente.

Jurado examinador:

Dr. Alexander Bykov (Presidente)

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna (Secretario)

Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo (Vocal)

Dr. Jorge Bustamante González(Vocal)

Dr. Arnoldo Bezanilla López (Vocal)

Dr. Raúl Escobedo Conde (Suplente)

Examenes Predoctorales Generales
FCFM - BUAP

Convocatoria de Enero de 2004. Parte escrita.

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Sea $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$

   (a) Calcule el valor mínimo de $f(x,y)$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ y analice los extremos locales en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ distintos de mínimo.

   (b) Calcule el desarrollo de Taylor de $f(x,y)$ en el punto $(1/2, 0)$ hasta el orden 2. ¿ Que se pude decir de la convexidad de f en este punto?

   (c) Halle el vector normal unitario y la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1/2, 0, 1/8)$.

   (d) Calcule la distancia de este plano al origen .

2. Sea $u(x,y) = e^{-y+\alpha xy}\cos x$, donde α es un número real arbitrario.

   (a) Calcule los valores de α para los cuales la función $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica en todo plano complejo.

   (b) Para valor de α obtenido, calcule la función armónica conjugada $v(x,y)$ tal que $v(0,0) = 0$ y exprese la función analítica $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ en términos de la variable compleja $z = x + iy$.

   (c) Demuestre que para cualquier semicírculo de radio $R > 1$: $S_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$, la integral compleja:

   $$\int_{\partial S_R} \frac{f(z)}{z^2+1}\, dz.$$

   no depende de R y calcule su valor.

   (d) Utilice el resultado anterior para calcular el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx.$$

II. Topología, Medida e Integración

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to Y$ una función continua de un espacio topológico X en un espacio métrico Y. Suponga que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformamente a una función $f : X \to Y$. Demuestre que f es una función continua.

2. Considere el espacio de las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[0,1]$ y lo proveeremos de las métricas:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

   y a los correspondientes espacios métrcos los denotaremos mediante C_∞ y C_2 respectivamente:

   (a) Demuestre que para cualquier función real continua f en $[0,1]$ y cualquier bola B^2_ε de radio ε en C_2 se puede encontrar una bola $B^\infty_{\delta(\varepsilon)}$ de radio $\delta(\varepsilon)$ en C_∞, tal que $B^\infty_{\delta(\varepsilon)} \subset B^2_\varepsilon$.

   (b) Demuestre que el funcional definido de C_∞ en $\mathbb{R}$ que a cada función f le hace corresponder la evaluación $f(0)$ es un funcional lineal continuo, pero que este mismo funcional no es continuo definido de C_2 en $\mathbb{R}$.

3. Recordemos que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe en sentido impropio de Riemann, si f es integrable en sentido de Riemann en cualquier intervalo $[a,b]$ y existe $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$. En este caso a este límite se denota como la integral $\int_a^\infty f(x)dx$.

   Asuma conocido el siguiente resultado:

   "La integral impropio de Riemann $\int_0^\infty \frac{sen x}{x}\, dx$ existe y es igual a $\pi/2$".

(a) Demuestre que la integral $\int_1^\infty x^{-p} senx dx$ existe en sentido impropio de Riemann para todo $p > 0$.

(b) Demuestre que para $p > 1$ la integral también existe en sentido de Lebesgue.

(c) Utilizando el resultado conocido para $p = 1$ demustre que

$$\int_0^\infty \frac{senx cosx}{x}\, dx = \pi/4.$$

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea **A** un anillo conmutativo con 1 tal que

   $\forall\, a \in A\ \exists\, n \in \mathbb{N} \mid a^n = a$

   Demuestre que en el anillo A todo ideal primo es maximal.

2. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función cuadrática que tiene en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la forma

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

   Reduzca la forma cuadrática a la forma canónica y encuentre la base ortonormal correspondiente.

Jurado examinador:

Dr. Alexander I.Bykov (Presidente)

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna (Secretario)

Dr. Andrés Fraguela Collar (Vocal)

Dr. Raúl Escobedo Conde (Vocal)

Dr. Valdimir V.Alexandrov (Suplente)

FCFM-BUAP
EXAMENES PREDOCTORALES
DE MATEMATICAS
14 DE ENERO DE 2005

Preguntas:

1) Sea E el espacio tridimensional usual, con sus ejes coordenados habituales x, y y z. Para cada número real α, sea P_α el plano perpendicular al eje x, que pasa por $(\alpha, 0, 0)$. Consideremos la clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, dada por los $A \subset E$, tales que para todo α real, $A \cap P_\alpha$ es un conjunto abierto en la topología inducida sobre P_α por la topología eclideana.

a) Demuestre que $\mathcal{A}$ es una topología.

b) Analice la convergencia de la sucesión $(1/n, 0, 0)$ en $(E, \mathcal{A})$.

c) ¿Es $(E, \mathcal{A})$ normable ?

d) Considere los intervalos $I := \{(x,0,0) : 0 \le x \le 1\}, J := \{(0,y,0) : 0 \le y \le 1\}, K := \{(0,0,z) : 0 \le z \le 1\}$ y analice si son conexos en $(E, \mathcal{A})$.

e) Analice si alguno de estos tres intervalos es compacto en $(E, \mathcal{A})$.

2) Sea la función compleja de variable compleja definida por $f(z) = \frac{sen(z)}{z}$ si $z \neq 0$ y 1 si $z = 0$.

a) Demuestre que es una función entera. O sea, analítica en todo el plano complejo.

b) Exprese su desarrollo en serie de Taylor en el origen.

c) Si γ denota la circunsferencia unidad recorrida en sentido positivo, calcule la integral compleja

$$\int_\gamma f(z)dz$$

3) Calcule el máximo absoluto, si es que existe, de la función $f(x,y) := |2x^2y^2 + xy|$ en el cuadrado cerrado del plano, centrado en $(0,0)$ y delimitado por lados paralelos a los ejes coordenados de longitudes $1/2$.

4) Recordemos que un subgrupo N de un grupo G es normal , si para todo $n \in N$ y todo $g \in G$, se tiene que $gng^{-1} \in N$.

Si M es un subgrupo de G, definimos $N(M) := \{g \in G : \forall m \in M, gmg^{-1} \in M\}$. Demuestre

a) $N(M)$ es un subgrupo de G.

b) M es normal en $N(M)$.

c) Si M es un subgrupo normal de otro subgrupo P de G, entonces $P \subset N(M)$.

d) M es normal en G si y sólo si $N(M) = G$.