# Examen de admisión al doctorado Posgrado en Matemáticas

FCFM BUAP. 22 de noviembre de 2022

El aspirante debe resolver cinco problemas en total. De las áreas de ANÁLISIS MATEMÁTICO y ÁLGEBRA elegir dos problemas (de cada una). Adicionalmente, debe seleccionar un problema más de los temas restantes. El aspirante debe tomar en cuenta las indicaciones siguientes:

1. El aspirante debe presentar una credencial vigente con fotografía antes de iniciar su examen.
2. El examen tiene duración de 210 minutos (10:00-13:30).
3. Durante el examen el aspirante no puede utilizar celular o computadora.
4. El examen debe ser contestado con bolígrafo de tinta negra.
5. La escritura debe ser clara y legible.
6. Cada hoja del examen debe ser numerada del modo siguiente: m/N, donde N es el total de hojas entregadas y $m = 1, 2, \ldots, N$.
7. Se deben contestar las preguntas separando las áreas de conocimiento, no se pueden mezclar las preguntas de diferentes áreas.

**EXAMEN GENERAL DE ADMISIÓN AL DOCTORADO**

**Posgrado en Matemáticas**

FCFM-BUAP, NOVIEMBRE 2022

`Nombre completo:`

`Institución donde realizó sus estudios de Maestría:`

**El aspirante debe presentar la solución de cuatro problemas: dos del apartado correspondiente a Análisis Matemático, dos del bloque correspondiente a Álgebra y uno de los apartados restantes.**

## I. ANÁLISIS MATEMÁTICO (Real y Complejo)

**1.1.** Encuentre los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = 2xy + x^2 - y^2$$

sobre el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

**1.2.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico completo y suponga que $f : X \to X$ es una función tal que $f^N$ es una contracción, para algún $N \in \mathbb{N}$. a) Demuestre que $f$ admite un único punto fijo $a \in X$. b) Demuestre que para cada $x_0 \in X$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = a$.

**1.3.** Calcular

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta.$$

## II. ÁLGEBRA

**2.1.** Para cada uno de los siguientes operadores lineales $T$, probar si $T$ es diagonalizable. En caso de serlo, encontrar una base $\beta$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. a) $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T(f) = f' + f''$, donde $f'$ y $f''$ son la primera y segunda derivadas de $f$, respectivamente. b) $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T\left(ax^2 + bx + c\right) = cx^2 + bx + a$.

**2.2.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. a) Pruebe que si $T : V \to V$ es lineal y todo $v \in V$ es un eigenvector de $T$, entonces $T$ es un múltiplo escalar del operador identidad. b) Suponga que $T : V \to V$ es lineal y todo subespacio de $V$ de dimensión $dim(V) - 1$ es invariante bajo $T$. Pruebe que $T$ es un múltiplo escalar del operador identidad.

**2.3.** Sea $G$ un grupo de orden $p^2q$, donde $p$ y $q$ son números primos diferentes. Demostrar que $G$ no es un grupo simple.

## III. TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE MEDIDA

**3.1.** Sean $X, Y$ espacios conexos. Demuestre que si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ es conexo.

**3.2.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sean $f$ y $g$ funciones medibles, considere

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$$

a) Demostrar que $(\mathcal{M}, d)$ es un espacio pseudométrico, donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de funciones medibles.

b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles. Demostrar: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

## IV. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

**4.1.** Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right\},$$

$x, y \in \mathbb{R}$ y $\rho$ es un número real en $(-1,1)$. Demostrar que $X$ y $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ son variables aleatorias independientes de tipo normal estandar $(N(0,1))$.

**4.2.** Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ denota una muestra aleatoria de una función de densidad de Weibull dada por

$$f(y \mid \theta) = \begin{cases} \left(\frac{2y}{\theta}\right) e^{-y^2/\theta}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Encuentre un estimador insesgado de mínima varianza para $\theta$.