EXAMEN GENERAL DE ADMISIÓN AL DOCTORADO

Posgrado en Matemáticas

FCFM-BUAP, 26 de noviembre 2018

`Nombre completo:`

`Institución donde realizó sus estudios de Maestría:`

El aspirante debe presentar la solución de cuatro problemas: uno del apartado correspondiente a Análisis Matemático, uno del bloque correspondiente a Álgebra y dos de los apartados restantes.

I. ANÁLISIS MATEMÁTICO (Real y Complejo)

1.1. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2-y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analice la continuidad de la función, su diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, todo ello en el punto (0,0).

1.2. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}.$$

II. ÁLGEBRA

2.1. Sea G un grupo de orden pq donde p y q son primos. Sea f un homomorfismo sobreyectivo de G a H. Pruebe que H es abeliano o isomorfo a G.

2.2. Determine si A es diagonalizable, si lo es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

III. TOPOLOGÍA y TEORÍA DE MEDIDA

3.1. Sean X un espacio topológico, Y un espacio de Hausdorff compacto, $f : X \longrightarrow Y$ una función y $G_f = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = y\}$. Demuestre que f es continua si y solo si G_f es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

3.2. Sea μ la medida de Lebesgue y sean E y F dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ tales que $\mu(E) = 1$ y $\mu(F) = 3$. Demuestre que existe un subconjunto compacto K tal que $E \subseteq K \subseteq F$ y $\mu(K) = 2$.

IV. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

4.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere la siguiente sucesión de variables aleatorias definidas mediante la dinámica:

$$X_{t+1} = X_t + \xi_t, t \geq 0,$$

donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución: $\mathbb{P}(\xi_t = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_t = -1) = q$ y $\mathbb{P}(\xi_t = 0) = r$, tal que $p+q+r = 1$. Suponga que c, d y x son números enteros tales que $c < x < d$. Determine: $\mathbb{P}(T_c < T_d | X_0 = x)$, donde T_c y T_d representan los tiempos de alcance a c y d, respectivamente.

4.2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta},$$

$x \geq 0$ y $\theta > 0$. Demuestre que la media muestral es un estadístico suficiente para θ.