EXAMEN GENERAL DE ADMISIÓN AL DOCTORADO

Posgrado en Matemáticas

FCFM BUAP, 27 DE NOVIEMBRE 2017

`Nombre completo:`

`Institución donde realizó sus estudios de Maestría:`

El aspirante debe presentar la solución de cuatro problemas: dos del apartado correspondiente a Analísis matemático y dos de los apartados restantes.

I ANALÍSIS MATEMÁTICO

1.1. Sean y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua no idénticamente nula y tal que $f(0) = f(1) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$g_n : x \mapsto f(x^n), \quad x \in [0,1].$$

Prueba que

(a) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a cero.

(b) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a cero.

1.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y = 0; \\ (1 - cos\frac{x^2}{y})\sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f es continua en $(0,0)$.

(b) Calcular todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

1.3. Sean $f(z) = \cos z$, $z \in \mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$. Encuentre las imágenes de las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$ bajo la función f.

II TOPOLOGÍA y TEORÍA DE MEDIDA

2.1. Sean X y Y subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (M, d). Se define

$$D(X, Y) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

- **(a)** Si $X = \{x_0\}$ con $x_0 \in M$ y Y es compacto, demostrar que $D(X, Y) = d(x_0, y)$, para algún $y \in Y$.
- **(b)** Si X y Y son compactos, demostrar que $D(X, Y) = d(x, y)$ para algunos $x \in X$ y $y \in Y$.

2.2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones con valores reales uniformemente acotadas y equicontinuas en un espacio métrico X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen las funciones $g_n : X \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(x) = \text{máx}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformamente.

III ÁLGEBRA

3.1. Sea P_3 el espacio lineal de todos los polinomios algebraicos hasta grado 3 con la base $\{1, x, x^2, x^3\}$. Sea $T : P_3 \to P_3$ una transformación lineal definida, para $p \in P_3$, por

$$T(p) = p + p' + p''.$$

- **(a)** Representar T mediante una matriz asociada con la base dada.
- **(b)** Encuentra el kernel de T.
- **(c)** Encuentra (en el caso de que existan) los valores y vectores propios de T.

3.2. Sea $G = \{a \in \mathbb{R} : a > 0,\ a \neq 1\}$ y $* : G \times G \to G$ dada por:

$$a * b = a^{\log b}.$$

¿Es $(G, *)$ un grupo?

IV PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

4.1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de la distribución Exponencial biparamétrica, cuya f.d.p. está dada por:

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}(x-\theta_1)\right\} I_{[\theta_1,\infty)}(x), \quad \theta_1 \in \mathbb{R}, \quad \theta_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Donde $I_A(x)$ es la función indicadora del conjunto A.

(a) Hallar los estimadores de máxima verosimilitud para θ_1 y θ_2.

(b) Determine si existen estadísticas conjuntamente suficientes minimal para el vector paramétrico (θ_1, θ_2), justifique su respuesta.

(c) ¿Es insesgado el estimador de máxima verosimilitud para θ_1?

4.2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.'s independientes cada una con distribución $U[a,b]$. Demuestre que:

(a) $X_{(1,n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$,

(b) $X_{(n,n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} b$,

donde $X_{(1,n)} = \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}$ y $X_{(n,n)} = \text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\}$.