Examenes Generales. Programa de Doctorado.
Postgrado en Matemáticas - FCFM - BUAP

Convocatoria 2017-1. Parte escrita.

El aspirante presenta soluciones de tres problemas – un problema de Análisis, un problema de Álgebra, y un problema de Topología y Teoría de Medida o de Probailidad y Estadistica.

No se permite durante del examen uso de computadoras, teléfonos, libros o papeles diferentes del hoja de problemas y de hojas de respuestas. Una vez que el aspirante sale del salon, no se permite regresar al examen. No se aceptan soluciones escritas en lapiz. El examen termina a las 13:00.

I. Análisis Matemático

1. ¿Para qué valores de a existe una función real f definida y diferenciable en una vecindad V de $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(0,0) = 0$ y $af(x,y)^3 + (a+x+1)f(x,y) - y^2 + x = 0$ para todo $(x,y) \in V$? Encontrar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

2. Computar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

II. Álgebra.

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito tal que todo automorfismo de G es el mapeo idéntico.

Demostrar que para todo $g \in G$, $g \cdot g = e$, donde e es la unidad de G.

2. Sea V el espacio de todos los polinomios reales de una variable x de grado a lo más 9. Demostrar que la función $T : V \to V$ definida por la regla: $T(f) = f + xf'$ (donde f' es la derivada de f) es un isomorfismo lineal.

III. Topología y Teoría de Medida.

1. Dar un ejemplo de conjuntos cerrados A y B en $\mathbb{R}$ tales que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ no es cerrado.

2. Sea E un conjunto Lebesgue medible tal que $\mu(E) = 2$. Demostrar que existe un conjunto Lebesgue medible $A \subset E$ tal que $\mu(A) = 1$.

IV. Probabilidad y Estadística

1. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria. Considere el estadístico:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{n}\right]^2.$$

(1) Calcular la esperanza y varianza de S^2.

(2) ¿S^2 es un estimador insesgado para la varianza poblacional?

2. Considere una secuencia de variables aleatorias cuyo espacio de estados es $S = \{0, 1, 2, ...\}$ y satisface la siguiente relación:

$$X_{n+1} = \max(X_n - \xi_n, 0), n = 0, 1, 2, ...,$$

con $X_0 = x$ conocido y $\{\xi_n\}$ una secuencia compuesta por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas concentradas en S, cuya función de distribución es conocida y es denotada por Δ.

(1) Encontrar la distribución de transición del sistema estocástico en términos de Δ.

(2) Si el sistema estocástico en un instante $n \geq 0$ se encuentra en el estado 0, encontrar la distribución de la variable aleatoria X_{n+1}.