Exámenes Generales de Admisión a Doctorado

Posgrado en Matemáticas – FCFM – BUAP

Convocatoria de noviembre de 2014. Parte Escrita.

25 de noviembre de 2014

El aspirante debe escoger cuatro problemas en total. Del tema ANÁLISIS CLÁSICO Y VARIABLE COMPLEJA debe escoger dos de los tres problemas que ese tema contiene. Debe escoger otros dos problemas del resto de los temas tomando sólo uno de cada tema.

ANÁLISIS CLÁSICO Y VARIABLE COMPLEJA

Problema 1. Sea f la función real definida en $\mathbb{R}^2$ por la regla:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Probar que en el punto $(0,0)$ existen las derivadas direccionales de f en cualquier dirección pero que f no es diferenciable.

Problema 2. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

Problema 3. Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x,y)=2xy+x^2-y^2$ sobre el conjunto $A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$.

ESPACIOS MÉTRICOS, TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE LA MEDIDA

Problema 1. Demuestre que si $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ son unas funciones continuas, entonces

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leq\int_a^b f^2(t)\,dt+\int_a^b g^2(t)\,dt$$

Usando esta desigualdad, demuestre que

$$d(f,g)=\left(\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt\right)^{1/2}$$

es una métrica en el conjunto

$$\mathcal{C} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

Sugerencia: Para probar la desigualdad de triángulo, verifique la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)\,dt \int_a^b y^2(t)\,dt$$

usando la siguiente identidad que debe comprobar:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 = \int_a^b x^2(t)\,dt \int_a^b y^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (x(s)y(t) - y(s)x(t))^2\,dsdt.$$

Problema 2. En el espacio $\mathcal{C}([0,1])$ con la métrica de convergencia uniforme, determine si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados (o ni abiertos, ni cerrados):

a) $A = \{\operatorname{sen} x + k : k \in [0,1]\}$.
b) $B = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}([0,1])$ el espacio de todas las funciones continuas reales en $[0,1]$ con la métrica de convergencia uniforme, y $\mathcal{C}^1([0,1])$ el subespacio de $\mathcal{C}([0,1])$ que consiste de todas las funciones continuamente diferenciables. ¿Es el operador de diferenciación $D\colon \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ continuo? (Pruebe su respuesta).

ÁGEBRA LINEAL

Problema 1. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + x_3, \end{cases}$$

donde, para toda i, $x_i = x_i(t)$ es una función diferenciable real, de la variable real t. Se sabe que el espacio de soluciones del sistema tiene dimensión 3.

(1) Encuentre todas las soluciones de la forma $X = X_0 e^{\lambda t}$ donde X_0 es un vector fijo.
(2) Demuestre que cualquier solución del sistema es una combinación lineal de las soluciones halladas en el punto anterior.

Problema 2. Sea P_2 el espacio de todos los polinomios reales de grado a lo más 2. Para cada uno de los siguientes operadores lineales en P_2 determinar si el operador es diagonalizable y, en caso de serlo, encontrar una base en P_2 en cual la matriz del operador es diagonal.

a) $T(f) = f' + f''$, donde f' y f'' son la primera y la segunda derivadas de f.
b) $S(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Problema 1. Si la variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y = e^X$ tiene distribución Lognormal (μ, σ^2).

Considere $\theta_2 = var(Y)$. Demuestre que el estimador de máxima verosimilitud (MV), $\hat{\theta}_2 = \exp(2\bar{x} + S^2)(\exp(S^2) - 1)$, donde $\bar{x}$ y S^2 son la media y la varianza muestrales de X; es sesgado y el estimador de MV modificado $\bar{\theta}_2 = \exp(2\bar{x}) \left(f(2S^2) - f\left(\frac{(n-2)S^2}{n-1}\right)\right)$ es un estimador insesgado con varianza mínima, donde $f(t) = 1 + t + \frac{(n-1)t^2}{(n+1)2!} + \frac{(n-1)^2t^3}{(n+1)(n+3)3!} + \dots$

Problema 2. Considere la función

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad ,1 < \alpha < \infty.$$

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ y la σ-algebra $2^{\mathbb{N}} = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$. Para $A \in 2^{\mathbb{N}}$, definimos la siguiente medida de probabilidad:

$$P(A) = \zeta(\alpha)^{-1} \sum_{n \in A} n^{-\alpha}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, ...\}$ considere el evento $A(p_i) = \{p_i, 2p_i, ...\}$, donde $p_1, p_2, ..$ es la sucesión de todos los números primos mayores que 1.

Demostrar que:

(1) $P(A(p_i)) = p_i^{-\alpha}$.
(2) Los eventos $A(p_1), A(p_2), ...$ son independientes.
(3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} [A(p_i)]^c = \{1\}$, ($c$ denota el complemento).
(4) Usando los incisos anteriores, comprobar lo siguiente:

$$\zeta(\alpha)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right).$$