

Exámenes generales de admisión al doctorado en Matemáticas
Posgrado en Matemáticas, FCFM BUAP
Puebla, Pue., 26 de mayo de 2023

Nombre(s) y Apellidos completos:

Escuela e Institución en la que realizó estudios de Maestría:

El aspirante debe presentar la solución de cuatro problemas: uno del apartado correspondiente a Análisis Matemático, uno del bloque correspondiente a Álgebra, uno de Topología o de Probabilidad y Estadística, y uno cualquiera de los cuatro apartados.

ANÁLISIS MATÉMATICO

1. Calcula la derivada da la función

$$f(x) = \text{escribir aquí la integral desde } a \text{ hasta } x^3 \text{ de } \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt$$

2. Demuestra que la serie

$$\text{escribir aquí la sumatoria desde } n = 1 \text{ hasta } \infty \text{ de } \frac{1}{n^p}$$

diverge si $0 < p \leq 1$ y converge si $1 < p$.

ÁLGEBRA

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- (a) Determina el polinomio característico de A .
- (b) Determina el polinomio mínimo de A .
- (c) Determina si A es o no diagonalizable.

2. Demuestra que no existen grupos simples no abelianos de orden 175.

TOPOLOGÍA

1. Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* (PPF) si para toda función continua $f : X \rightarrow X$, existe un punto $x_f \in X$ tal que $f(x_f) = x_f$. Demuestra que si un espacio topológico X tiene la PPF, entonces X es conexo.
2. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología euclidiana. Demuestra que S tiene o que no tiene la PPF, de acuerdo con la proposición verdadera.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con función de densidad

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ los estadísticos de orden. Encuentra la distribución de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

2. Demuestra que una caminata aleatoria irreducible, recurrente positiva y aperiódica tiene una distribución límite y encontrar dicha distribución.