Examen de admisión al doctorado

Posgrado en Matemáticas FCFM BUAP.

26 de mayo de 2022

El aspirante debe enviar resueltos cinco problemas en total.

De los áreas de **ANÁLISIS MATEMÁTICO** y **ÁLGEBRA** elegir dos problemas (de cada una).
Adicionalmente, debe seleccionar un problema más de los temas restantes.

1. El aspirante debe tomar en cuenta las indicaciones siguientes:

a) El examen tiene duración de 210 minutos (10:00-13:30).

b) El examen debe ser contestado con bolígrafo de tinta negra.

c) La escritura debe ser clara y legible.

d) Cada hoja del examen debe ser numerada del modo siguiente: m/N, donde N es el total de hojas entregadas y $m = 1, 2, \ldots, N$.

e) Se deben contestar las preguntas separando las áreas de conocimiento, no se pueden mezclar las preguntas de diferentes áreas.

f) Debe estar conectado en Googlemeet con la liga que se enviará y debe tener su cámara de la computadora (o lap Top) encendida en las horas que dura el examen, enfocando su examen, porque habrá profesores cuidando el examen.

g) El aspirante debe ingresar al Googlemeet a las 09:30 para llevar a cabo su indentificación con un credencial oficial.

2. El aspirante debe escanear y subir a la plataforma su examen, tiene como máximo 30 minutos para hacerlo.

3. Se verificará que los exámenes de cada aspirante estén debidamente cargados en la plataforma de Google Classroom y concluir el proceso a las 14:00 hrs.

4. No se aceptan exámenes despúes de las 14:00 hrs.

ANÁLISIS MATEMÁTICO (Real y Complejo)

1. Calcular:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + e^{-\imath\theta}}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida con

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y = 0; \\ \\ (1 - \cos(\frac{x^2}{y}))\sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0. \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en $(0,0)$.

b) Calcula todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

c) Verifica si f es diferenciable en $(0,0)$.

3. Sea $f : A \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, donde $A \subset \mathbb{R}$ es compacto. Para toda $x \in A$ definimos

$$g(x) = \max\{f(x,y) : y \in [0,1]\}.$$

Demonstrar que g es continua.

ÁLGEBRA

1. Sean T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita y W un subespacio T-invariante de V. Suponga que $v_1, v_2, \ldots v_k$ son vectores propios asociados a distintos valores propios. Demuestra que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

2. Demuestre que los campos $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ no son isomorfos.

3. Demuestre que un grupo de orden pq, con p, q primos contiene un subgrupo normal no trivial.

TOPOLOGÍA y TEORÍA DE MEDIDA

1. Muestre que si X es un conjunto infinito con la topología del complemento finito, entonces X es conexo.

2. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es regular.

USAR: *Vecindad es un conjunto abierto que contiene al punto.*

Definición. *Un espacio X es localmente compacto en un punto x si existe un subconjunto compacto C de X que contiene una vecindad de x.*

Teorema A. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y sólo si dado $x \in X$, y dada una vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $cl_X(V)$ es compacto $cl_X(V) \subset U$.*

3. Muestre que para cada sucesión creciente de conjuntos medibles:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_k \subseteq E_{k+1} \subseteq \cdots$$

se cumple

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{n\to\infty} m(E_k).$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1. Tómese como espacio de probabilidad $\Omega = [0,1)$ con el σ-campo los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue en $[0,1)$.

(a) Encuentre $E(\xi \mid \eta)$ si

$$\xi(x) = 2x^2, \quad \eta = \begin{cases} 2x, & \text{para } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & \text{para } \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

(b) Ahora, tómese como espacio de probabilidad $\Omega = [0,1]$ con el σ-campo los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Sea $\eta(x) = x(1-x)$, para $x \in [0,1]$. Mostrar que:

$$E(\xi \mid \eta)(x) = \frac{\xi(x) + \xi(1-x)}{2}, \quad \text{para cualquier } \; x \in [0,1].$$

2. Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza finita σ^2. Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x), \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

Aquí $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ y $\Phi(x)$ representa la función de distribución acumulada de la variable aleatoria normal estándar.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de la distribución $\eta(0, \sigma^2)$. Supóngase que se quiere estimar σ. Considérese las siguientes familias de estimadores:

$$U_{k,n} = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \quad \text{y} \quad W_{d,n} = d\sqrt{\min_{i=0,\ldots,n}\{X_{2i+1}^2 + X_{2i+2}^2\}}.$$

a) Obtener el estimador de mínimo Error Cuadrado Medio dentro de cada familia.

b) Determinar cual de los anteriores estimadores para σ es el mejor respecto al Error Cuadrado Medio.