EXAMEN GENERAL DE ADMISIÓN AL DOCTORADO

Posgrado en Matemáticas

FCFM BUAP, 27 DE Junio 2018

`Nombre completo:`

`Institución donde realizó sus estudios de Maestría:`

El aspirante debe presentar la solución de cuatro problemas: dos del apartado correspondiente a Analísis matemático y dos de los apartados restantes.

I ANALÍSIS MATEMÁTICO

1.1. Sea $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ una finción uniformamente continua el (semi-abierto) intervalo $[0,1)$. Prueba que existe el unica función continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in [0,1)$.

1.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida con

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \\ x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{y}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Encontrar todos los puntos donde f sea diferenciable.

1.3. Sea $p(z)$ un polinomio complejo dado con:

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10.$$

(a) Verifica que el polinomio $p(z)$ no tenga ceros sobre los ejes real e imaginario.

(b) Encuentra cuantos ceros el polinomio tienga en cada cuadrante del plano complejo.

II TOPOLOGÍA y TEORÍA DE MEDIDA

2.1. Sean X, Y dos espacios topológicos conexos tales que $Y \subset X$. Si A, B son dos conjuntos que separan a $X \setminus Y$, pruebe que $Y \cup A$ y $X \cup A$ son conexos.

2.2. Demuestre que si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces X es normal.

III ÁLGEBRA

3.1. Sea T una transormación lineal en un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{C}$ y sea p un polinomio complejo.

(a) Si λ es un valor propio para T, ¿es $p(\lambda)$ valor propio para $p(T)$?

(b) ¿Es necesario que todos los valores propios para $p(T)$ sean obtenidos en esta manera?

3.2. Sean A y B $n \times n$ matrices complejas. Probar o refutar los siguientes afirmaciones:

(a) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ es diagonalizable.

(b) Si A y B son diagonalizables, entonces $A \cdot B$ es diagonalizable.

(c) Si $A^2 = A$, entonces A es diagonalizable.

(d) Si A es invertible y A^2 es diagonalizable, entonces A es diagonalizable.

IV PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

4.1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de la distribución $\eta(0, \sigma^2)$. Supóngase que se quiere estimar σ. Considérese las siguientes familias de estimadores:

$$U_{k,n} = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}, \quad \text{y} \quad Z_{c,n} = c\sum_{i=1}^{n} |X_i|\,.$$

Obtener el estimador de error cuadrado medio (ECM) mínimo dentro de cda familia y determinar cual de estos estimadores es mejor respecto al ECM.

4.2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.'s independientes cada una con distribución $U[a, b]$. Demuestre que:

(a) $X_{(1),n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$,

(b) $X_{(n),n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} b$,

donde $X_{(1),n} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $X_{(n),n} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.