EXAMENES GENERALES DE ADMISION A DOCTORADO
POSGRADO EN MATEMATICAS-FCFM-BUAP
Convocatoria de Junio de 2017.

6 de junio de 2017

Nombre(s) y Apellidos Completos:
Institución en la cual realizó estudios de Maestría:

El aspirante debe escoger cuatro problemas en total. Del tema ANALISIS CLASICO Y VARIABLE COMPLEJA debe elegir dos de los tres problemas que ese tema contiene. Debe seleccionar otros dos problemas del resto de los temas tomando sólo uno de cada tema.

ANALISIS CLASICO Y VARIABLE COMPLEJA

1. Sea P el conjunto de polinomios reales de grados iguales o menores que dos y $J : P \to \mathbb{R}$ definido por:

$$J(f) = \int_0^1 (f(x))^2 \, dx.$$

Demuestre que J alcanza un valor mínimo absoluto sobre el conjunto

$$Q := \{f \in P : f(1) = 1\}$$

y calcule el polinomio en Q en el cual se alcanza este mínimo.

2.Considere el espacio lineal $C[-1,1]$ de las funciones reales continuas sobre $[-1,1]$ y defina en este espacio la norma:

$$\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

a) Muestre con un ejemplo que este espacio no es completo.
b) Consideremos la transformación lineal $(\Lambda f)(x) = (1-x)f(x)$ de $C[-1,1]$ en sí mismo. ¿Es continua? En caso afirmativo calcule su norma.
c) ¿Es $\Lambda(C[-1,1])$ cerrado? Fundamente su afirmación.

3. Sea $u(x,y) = e^{-y}cos(x)$.
a) Demuestre que la función $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica $f(z)$ ($z = x+iy$) en todo el plano complejo y obtenga la expresión de f tal que $f(0) = 1$.
b) Pruebe que para cualquier semidisco $S_R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \quad \text{y} \quad y > 0\}$ de radio $R > 1$, la integral compleja

$$\int_{\partial S_R} \frac{f(z)}{z^2+1} dz,$$

no depende de R y calcular su valor.
c) Utilice el resultado anterior para calcular el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cosx}{x^2+1} dx$$

TOPOLOGIA Y TEORIA DE LA MEDIDA

1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales. Defina para $n, m \in \mathbb{N}$:

$$d(n,m) = 1 + \frac{1}{n+m}, \quad \text{si} \quad m \neq n$$
$$d(n,m) = 0 \quad \text{si} \quad m = n$$

a) Mostrar que d es una distancia.
b) Probar que esta métrica induce la Topología discreta sobre $\mathbb{N}$.
c) Determinar a las sucesiones convergentes.
d) ¿Es $(\mathbb{N}, d)$ un espacio métrico completo? Justificar su respuesta.

2.Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene medida de Lebesgue cero. Demuestre que el conjunto

$$\{x^2 : x \in E\}$$

también tiene medida de Lebesgue cero.

ALGEBRA LINEAL

1. Sea P_2 el espacio de todos los polinomios reales de grado a lo más dos. Para cada uno de los siguientes operadores lineales en P_2 determinar si el operador es diagonalizable y, en caso de serlo, encontrar una base en P_2 en la cual la matriz del operador es diagonal.
a) $T(f) = f' + f''$, en donde f' y f'' son la primera y la segunda derivada de f.
b) $S(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$.

2. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$. Sea

$$E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

la transformación lineal definida por $E(f) = f + f'$, en donde f' es la derivada de $f \in \mathbb{R}[x]$. Demostrar que E es invertible.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1. Considere la siguiente sucesión de variables aleatorias

$$X_n = u + n - \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n = 1, 2, ...$$

con $u \in \{0, 1, 2, ...\}$ y $\{Y_i : i = 1, 2, ...\}$ una sucesión de variables aleatorias discretas concentradas en $\{0, 1, 2, ...\}$, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Sea $\tau := ínf\,\{n > 0 : X_n \leq 0\}$. Calcular la probabilidad de que para algún $n > 0$ se alcance τ, bajo la suposición de que $X_0 = u$.

2. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} 1_{[\theta,\infty)}(x)$$

para $-\infty < \theta < \infty$ y donde $1_A(x)$ es la función indicadora de $A \subset \mathbb{R}$ evaluada en $x \in \mathbb{R}$.
a) Halle un estadístico suficiente para θ (si es que existe).
b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.
c) Estime θ por el método de momentos.
d) Halle el estimador insesgado uniformemente de mínima varianza (UMVUE) de θ.