EXAMEN DE INGRESO AL DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

NOMBRE

El aspirante debe escoger cuatro ejercicios en total. Del tema ANÁLISIS CLÁSICO Y VARIABLE COMPLEJA debe escoger dos de los cuatro ejercicios que ese tema contiene. Debe escoger otros dos ejercicios del resto de los temas tomando sólo uno de cada tema.

ANÁLISIS CLÁSICO Y VARIABLE COMPLEJA

Ejercicio.

Sea f una función definida en $\mathbb{R}^2$ por la regla:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que en el punto $(0,0)$ existen las derivadas direccionales de f en cualquier dirección pero que f no es diferenciable.

Ejercicio.

Sea $f(x) = u(z) + iv(z)$ una función holomorfa en $|a| < 1$, u, v reales, si $u(0) = v(0)$, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}d\theta).$$

Ejercicio.

Encuentre los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = 2xy + x^2 - y^2$$

sobre el conjunto

$$A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Ejercicio.

¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right|^n$?

ESPACIOS MÉTRICOS, TOPOLOGÍA

Ejercicio.

En $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, con la métrica uniforme, determine si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados (o ni abiertos, ni cerrados):

a) $A = \{\operatorname{sen} x + k | k \in [0,1]\}$.

b) $B = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) | f(0) = 0\}$.

Ejercicio.

Considere a $X = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ y $Y = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica uniforme. Diga si el operador de diferenciación considerado de X en Y es continuo. Pruebe su afirmación.

Ejercicio.

Considere una función continua $f : \Re \to \Re$ que toma sólo valores enteros. Demuestre que f es constante.

ÁLGEBRA LINEAL

Ejercicio.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + x_3, \end{cases}$$

donde, para toda i, $x_i = x_i(t)$ es una función diferenciable real, en la variable real t. Es conocido que el espacio de soluciones tiene dimensión tres.

a) Busque las soluciones en la forma $X = X_0 e^{\lambda t}$ donde X_0 es un vector fijo. Esto lo llevará a un problema de vectores y valores propios.

b) Demuestre que cualquier solución del sistema puede expresarse como combinación de las soluciones halladas en el punto anterior.

Ejercicio.

Para cada uno de los siguientes operadores lineales T, probar si T es diagonalizable y, en caso de serlo, encontrar una base β tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

a) $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T(f) = f' + f''$, donde f' y f'' son la primera y segunda derivadas de f, respectivamente.

b) $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$.