EXÁMENES GENERALES DE ADMISIÓN A DOCTORADO

POSGRADO EN MATEMÁTICAS – FCFM – BUAP

Convocatoria de junio de 2015. Parte Escrita.

24 de junio de 2015

El aspirante debe escoger cuatro problemas en total. De los temas ANÁLISIS REAL y ANÁLISIS COMPLEJO debe escoger un problema de cada tema. Debe escoger otros dos ejercicios del resto de los temas tomando sólo uno de cada tema.

ANÁLISIS REAL

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(\xi)$$

para alguna $\xi \in [0,1]$.

2. Hallar el mínimo y el máximo absolutos para las funciones

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el disco unitario $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(2) $f(x,y) = x + yz$ en la bola $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

ANÁLISIS COMPLEJO

1. Sea $u(x,y) = e^{-y}\cos x$.

(1) Demostrar que la función $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica $f(z)$ $(z = x + iy)$ en todo el plano complejo y obtener la expresión de f en z dado que $f(0) = 1$.

(2) Demostrar que para cualquier semicírculo $S_R = \{(x,y)|x^2 - y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$ de radio $R > 1$, la integral compleja

$$\int_{\partial S_R} \frac{f(z)}{z^2+1}dz,$$

no depende de R y calcular su valor.

(3) Utilizar el resultado anterior para calcular el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx.$$

2. Encontrar el desarrollo de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ para $|z| < 1$ y para $1 < |z|$.

ESPACIOS MÉTRICOS, TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE LA MEDIDA

1. Sea (X, d) un espacio métrico no vacío compacto y conexo. Sea $A \subset X$ una parte también compacta, conexa y no vacía.

Se define, para $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

(1) Probar que A_ε es compacto.

(2) Dar un ejemplo que demuestre que A_ε no es necesariamente conexo.

2. Sean $X = [0, 2]$, $F : X \to \mathbb{R}$ definida por $F(t) = t^2$, ν la medida de Lebesgue en X y $\nu(F)$ la medida imagen bajo F en $\mathbb{R}$.

Calcular

$$\int_{\mathbb{R}} x^3 \, d\nu(F)(x)$$

ÁLGEBRA

1. Sea

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcular e^P.

2. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$. Sea

$$E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

la transformación lineal definida por $Ef = f + f'$, donde f' es la derivada de $f \in \mathbb{R}[x]$. Demostrar que E es invertible.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1. Considere la siguiente sucesión de variables aleatorias

$$X_n = u + n - \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

con $u \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias discretas concentradas en $\{0, 1, 2, \ldots\}$, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Sea $\tau := \inf\{n > 0 : X_n \leq 0\}$. Calcular la probabilidad de que para algún $n > 0$ se alcance τ, bajo la suposición de que $X_0 = u$.

2. Obtener la probabilidad p de que al lanzar n (n entero positivo mayor que 1) veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble. ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que se tenga $p = 1/2$?