Exámenes Generales de Admisión al Doctorado.
Postgrado en Matemáticas - FCFM - BUAP

Convocatoria de Julio de 2011. Parte escrita.

Nombre completo: ________________________________

Institución donde realizó estudios de Maestría:

____

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Sea $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$

   (a) Calcule el desarrollo de Taylor de $f(x,y)$ en el punto $(0, 1/2)$ hasta el orden 2. ¿ Que se puede decir de la convexidad de f en este punto?

   (b) Halle el vector normal unitario y la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0, 1/2, 1/8)$.

2. Utilizando teoría de los residuos calcule la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

II. Topología, Medida e Integración

1. Sea $C[0,1]$ el espacio de las funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$ con la métrica

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \quad f, g \in C[0,1].$$

   Pruebe que este espacio métrico no es completo.

2. Dado $p \geq 1$, λ la medida de Lebesgue. Sea

$$f_n = \frac{1}{n^{1/p}}\, \chi_{[0,n]}$$

donde $\chi_{[0,n]}$ es la función característica del conjunto $[0, n]$.

   (a) Pruebe que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función nula.

   (b) ¿ Converge $\{f_n\}$ en la norma de $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda)$?

3. Sea d la función en $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ definida por la regla:

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n, \\ 1 + \frac{1}{\min(m,n)} & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

   (a) Verificar que d es una métrica en $\mathbb{N}^+$ y $(\mathbb{N}^+, d)$ es un espacio métrico completo.

   (b) Sea B_n la bola cerrada en $(\mathbb{N}^+, d)$ con el centro n y radio $1 + 1/n$. Demostrar que la sucesión $\{B_n \,:\, n \in \mathbb{N}^+\}$ es decreciente

$$B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset B_{n+1} \supset ...$$

   y tiene la intersección vacía (es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$).

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea $\mathbf{A}$ un anillo conmutativo con 1 tal que

   $\forall\, a \in A \;\exists\, n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1,\ a^n = a$

   Demuestre que en el anillo A todo ideal primo es maximal.

2. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Sea

$$E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

   la transformación lineal definida por $Ef = f + f'$, donde f' es la derivada de $f \in \mathbb{R}[x]$. Pruebe que E es invertible.