EXAMEN DE ADMISIÓN AL DOCTORADO, JULIO 2010

NOMBRE COMPLETO:

INSTITUCIÓN DONDE REALIZÓ SUS ESTUDIOS DE MAESTRÍA

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, como $f_n = nx(1-x)^n$. Analice la convergencia puntual y uniforme de la sucesión $\{f_n\}$.

2. Encuentre el desarrollo de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ para $\mid z \mid < 1$ y para $1 < \mid z \mid$.

3. Sea (X, M, μ) espacio de medida, sea $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$ y $\int_X f d\mu < \infty$. Demuestre que:
   i)$\{x \in X \mid f(x) > 0\}$ es un conjunto σ-finito.
   ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $A \in M$, $\mu(A) < \infty$ tal que $\int_X f d\mu \leq \int_A f d\mu + \varepsilon$.

4. Sea G un grupo no conmutativo de orden p^3 tal que p es un número primo. Sea Z_G el centro de G. Pruebe que:
   i) $Z_G \cong \mathbb{Z}_p$. Además $\frac{G}{Z_G} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
   ii) Si H es subgrupo de G y H tiene orden p^2, entonces H es un subgrupo normal de G y $Z_G \subset H$.

5. Sea $\mathbb{V}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ el cual es generado por los vectores $\{(2,-1,1,0,0), (0,-1,0,1,0), (1,0,0,0,1)\}$.
   i) Halle la proyección ortogonal del vector $(2,2,1,4,0)$ sobre $\mathbb{V}$.
   ii)Halle una base ortonormal de $\mathbb{V}^{\perp}$.