Examenes Generales. Programa de Doctorado.
Postgrado - FCFM - BUAP

Convocatoria de Julio de 2009. Parte escrita.

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. a) ¿Para qué valores reales de x la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right|^{n}$$

converge?

b) Encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right|^{n}\right)dx.$$

2. ¿Para qué valores del parametro a existe una función f diferenciable en una vecindad de $(0,2)$ tal que $f(0,2)=0$ y

$$f^3+(a^2-2y-1)f+y^2+x-4=0?$$

Hallar la derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)$.

II. Topología, Medida e Integración

1. Sea $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \text{ o } y \text{ es racional}\,\}$.
Demostrar:

a) A es conexo,

b) A tiene medida 0.

2. Sea $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}}$, $n\in\mathbb{N}$. ¿Converge la sucesión f_n en $L_2[0,1]$?

III. Algebra Lineal y Algebra General

1. Probar que:

a) El conjunto H de todas las matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, es un subgrupo del grupo lineal general $GL_2(\mathbb{R})$.

b) El grupo H es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}$.

c) El normalizador $N(H)$ de H en $GL_2(\mathbb{R})$ consta de todas las matrices $(a_{ij}) \in GL_2(\mathbb{R})$ tales que $a_{21} = 0$.

2. Sea $T\colon V \to V$ un operador lineal de un espacio vectorial T tal que $T \circ T = T$. Probar que:

a) $V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$.

b) El polinomio caracteristico de T no tiene raices distintas de 0 y 1.