BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

EXAMEN DE INGRESO AL PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
DICIEMBRE DE 2015

Nombre completo del aspirante: ______________________________________

Institutción donde realizó estudios de maestría:

____

INSTRUCCIONES

(a) Se deben resolver cuatro problemas del total.

(b) Se deben resolver dos de los tres problemas que contiene el tema de Análisis Clásico y Variable Compleja.

(c) Se deben resolver dos problemas del resto de los temas tomando a lo más un problema de cada uno de estos temas restantes.

1. ANÁLISIS CLÁSICO Y VARIABLE COMPLEJA

1.1 Calcular la siguiente integral usando la teoría de residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2} \quad .$$

1.2 Sea K una función continua definida en el cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$ tal que $\mid K(x,y)\mid < 1$ para todo punto (x,y) de este cuadrado. Mostrar que la ecuación

$$\int_0^1 K(x,y)f(y)dy + f(x) = g(x)$$

tiene una única solución $f \in C[0,1]$, para cada $g \in C[0,1]$.

1.3 Encuentre los valores máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = 2xy + x^2 - y^2,$$

sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. ESPACIOS MÉTRICOS, TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE LA MEDIDA

2.1 Sea f una función definida en el espacio métrico (X, d_1) con valores en el espacio métrico (Y, d_2). Pruebe que:

(a) Si f es continua entonces la gráfica de f es un subconjunto cerrado del producto $X \times Y$; pero el recíproco no se cumple necesariamente, proporcione un contraejemplo en el caso $X = Y = \mathbb{R}$.

(b) Si (Y, d_2) es compacto, entonces f es continua si y sólo si la gráfica de f es un subconjunto cerrado del producto $X \times Y$.

2.2 Sea (X, d) un espacio métrico compacto y conexo. Sean A un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X y $\varepsilon > 0$, denotamos $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

(a) Pruebe que A_ε es compacto.

(b) Proporcione un ejemplo que muestre que A_ε no es necesariamente conexo.

2.3 Sea E un subconjunto de la recta real $\mathbb{R}$ con medida (de Lebesgue) cero. Demuestre que el conjunto $\{x^2 : x \in E\}$ también tiene medida cero.

3. ÁLGEBRA LINEAL

3.1 Sea A una matriz compleja de $n \times n$. Suponga que el polinomio característico f y el polinomio minimal g de A satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(x - i), \\ (g(x))^2 &= f(x)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Determinar la forma canónica de Jordan de A.

3.2 Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por el conjunto de vectores $\{(2, -1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}$.

(a) Encuentre la proyección ortogonal sobre V del vector $(2, 2, 1, 4, 0)$.

(b) Encuentre una base ortonormal para $V^\perp$.

4. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

4.1 Si la v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y = e^X$ tiene la distribución Lognormal (μ, σ^2). Considere $\theta_2 = var(Y)$. Demuestre que el estimador de máxima verosimilitud (MV), $\hat{\theta_2} = exp(2\bar{x} + S^2)\{exp(S^2) - 1\}$, donde $\bar{x}$ y S^2 son la media y la varianza muestrales de X, es sesgado; y que el estimador de MV modificado $\bar{\theta}_2 = exp(2\bar{x})\{f(2S^2) - f(\frac{(n-2)S^2}{(n-1)})\}$ es un estimador insesgado con varianza máxima, donde $f(t) = 1 + t + \frac{(n-1)t^2}{(n+1)2!} + \frac{(n-1)t^3}{(n+1)(n+3)3!} + \cdots$.

4.2 Considere la función

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad 1 < \alpha < \infty.$$

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y la σ-álgebra $2^{\mathbb{N}} = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$. Para $A \in 2^{\mathbb{N}}$, definimos la siguiente medida de probabilidad

$$P(A) = (\zeta(\alpha))^{-1} \sum_{n \in A} n^{-\alpha}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere el evento $A(p_i) = \{p_i, 2p_i, \dots\}$, donde $p_1, p_2, \dots$ es la sucesión de todos números primos mayores que 1. Demostrar lo que sigue:

(a) $P(A(p_i)) = p_i^{-\alpha}$.

(b) Los eventos $A(p_1)$, $A(p_2), \dots$ son independientes.

(c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} [A(p_i)]^c = \{1\}$, ($c$ denota complemento).

(d) Usando los incisos anteriores comprueba que:

$$(\zeta(\alpha))^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^\alpha}).$$