Exámenes Generales de Admisión al Doctorado.
Postgrado en Matemáticas - FCFM - BUAP

Convocatoria de Diciembre de 2012. Parte escrita.

Nombre completo: ____

Institución donde realizó estudios de Maestría:

____

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$, para $-\pi \leq x < \pi$, y $f(x + 2n\pi) = f(x)$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Encontrar la serie de Fourier para f.
   (b) Demostrar que la serie no converga uniformamente.

2. Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ una función holomorfa en $|z| < 1$, u y v reales. Si $u(0)^2 = v(0)^2$, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})^2 d\theta = \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})^2 d\theta,$$

para toda $0 < r < 1$.

II. Topología y Medida

1. Sea A el conjunto de todos los números en el intervalo cerrado $[0, 1]$ cuya expansión decimal contiene únicamente a los digitos 4 y 7.
   (a) ¿El conjunto A es numerable?
   (b) ¿El conjunto A es denso en el intervalo $[0, 1]$?
   (c) ¿El conjunto A es compacto?
   (d) ¿El conjunto A es perfecto?

   Argumente cada respuesta.

2. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función boreliana medible. Demostrar que la serie
$$f + \frac{f \circ f}{2!} + \frac{f \circ f \circ f}{3!} + ...$$
converge a una función medible.

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea K el conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix},$$
en donde $a, b \in \mathbb{F}_2$.
   (a) Demuestre que K es un anillo conmutativo con las operaciones usuales de suma y multiplicación de matrices.
   (b) Demuestre que K es un campo con exactamente cuatro elementos.

2. Sea
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
la matriz de un operador lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (en la base estándar). Hallar la forma diagonal de matriz del operador T y la base correspondiente.