Exámenes Generales de Admisión al Doctorado.
Postgrado en Matemáticas - FCFM - BUAP

Convocatoria de Diciembre de 2011. Parte escrita.

Nombre completo: ....

Institución donde realizó estudios de Maestría:

....

El alumno contesta tres preguntas - una pregunta de cada parte **I, II, III**

I. Análisis Clásico y Variable Compleja

1. Sea f una función definida en $\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Probar que en el punto $(0,0)$ existen las derivadas direccionales de f en cualquier dirección, pero que f no es diferenciable.

2. Sea $u(x,y) = e^{-y}\cos x$.

   (a) Muestre que la función $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica en todo plano complejo.

   (b) Calcule la función armónica conjugada $v(x,y)$ tal que $v(0,0) = 0$ y exprese la función analítica

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

   en términos de la variable compleja $z = x + iy$.

   (c) Demuestre que para cualquier semicírculo de radio $R > 1$: $S_R = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$, la integral compleja:

$$\int_{\partial S_R} \frac{f(z)}{z^2+1}\, dz.$$

   no depende de R y calcule su valor.

(d) Utilice el resultado anterior para calcular el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 1}\, dx.$$

II. Topología, Medida e Integración

1. Sea (X, d), un espacio métrico compacto y conexo. Sea $A \subset X$ una parte también compacta, conexa y no vacía.

   Se define, para $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon := \{x \in X \ : \ d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

   (a) Pruebe que A_ε es compacto.

   (b) Dé un ejemplo que demuestre que A_ε no es necesariamente conexo.

2. Supongamos que $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida (de Lebesgue) cero. Pruebe que el conjunto $\{x^2 \mid x \in E\}$ también tiene medida cero.

3. (a) Pruebe que $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \pi$, pasando a coordenadas polares.

   (b) Utilice (a) para demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

   (c) Utilice (b) para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2}\, dx$, si $t > 0$.

III. Algebra General y Algebra Lineal

1. Sea G un grupo tal que su centro Z_G es de índice finito m en G, es decir $(G : Z_G) = m$. Demuestre que $g^m \in Z_G$ para toda $g \in G$.

2. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función cuadrática que tiene en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la forma

$$q(x_1, x_2, x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

   Reduzca la forma cuadrática a la forma canónica y encuentre la base ortonormal correspondiente.