Guía de examen de admisión de Mecánica Cuántica (Doctorado)

Autores

Dra. Alexandra Deriabina

Dra. Emma Vianey García Ramírez

Dr. Óscar Mario Martínez Bravo

Dr. Héctor Novales Sánchez (responsable)

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Temario

Formulación matemática de la Mecánica Cuántica

- Kets, bras y operadores
- Kets base, representaciones y representaciones matriciales
- Mediciones, observables y relaciones de incertidumbre
- Cambios de base
- Posición, momento y traslación
- Funciones de onda en los espacios de las posiciones y de los momentos

Dinámica cuántica

- Evolución en el tiempo
- Las imágenes de Schrödinger y Heisenberg
- Oscilador armónico simple cuántico 1-dimensional
- La ecuación de onda de Schrödinger
- Soluciones elementales a la ecuación de onda de Schrödinger
- Propagadores e integrales de trayectoria de Feynman

Problemario

1. Suponga que algún operador unitario, U, se escribe como $A + i\,B$, donde A y B son operadores Hermitianos con eigenvalores no–degenerados. Muestre que:
   - A y B conmutan.
   - $A^2 + B^2 = \mathbf{1}$.
   - Los eigenvectores de A también son eigenvectores de B.
   - Los eigenvalores de U tienen módulo unitario.

2. Imagine un espacio tridimensional de kets. Suponga que si usamos un conjunto ortonormal de kets $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ las representaciones matriciales de los operadores A y B son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\,b \\ 0 & i\,b & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

   siendo a y b números reales.
   - El operador A muestra un espectro degenerado. ¿Ocurre lo mismo con B?
   - Muestre que las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conmutan. ¿Qué se puede decir entonces sobre el conmutador de operadores $[A, B]$?
   - En clase se discutió que la representación matricial de cualquier operador, con respecto de su base de eigenkets, es una matriz diagonal. De acuerdo con el apartado anterior, A y B conmutan. ¿Contradice esto a las expresiones dadas en la Ec. (1) y a la anterior discusión? Explique su respuesta.
   - Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean eigenkets simultáneos de A y de B. Especifique los eigenvalores de A y de B para cada uno de estos tres eigenkets. ¿Queda cada eigenket completamente caracterizado por esta especificación de eigenvalores?

3.
   - Sean x y p_x la coordenada y el momento lineal asociados a algún sistema 1-dimensional. Evalúe el paréntesis de Poisson clásico,

$$\{x, F(p_x)\}_{\mathrm{P}}. \quad (2)$$

   - Ahora sean x y p_x los operadores mecánico–cuánticos de posición y momento de algún sistema unidimensional. Evalúe el conmutador

$$\left[x, \exp\left(\frac{i\,p_x\,a}{\hbar}\right)\right]. \quad (3)$$

   - Usando el resultado obtenido en el apartado anterior, pruebe que

$$\exp\left(\frac{i\,p_x\,a}{\hbar}\right)|x'\rangle, \qquad \big(x|x'\rangle = x'|x'\rangle\big) \quad (4)$$

   es un eigenestado del operador de posición x. ¿Cuál es el eigenvalor que le corresponde?

4. El operador vectorial de posición, $\vec{x}$, y el operador de desplazamiento espacial infinitesimal, $\mathcal{J}(d\vec{u}\,')$, satisfacen la relación de conmutación $\left[\,\vec{x}\,, \mathcal{J}(d\vec{u}\,')\right] = d\vec{u}\,' \cdot \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ denota al operador identidad.
   - Pruebe que en el caso del operador vectorial de momento se cumple que $\left[\,\vec{p}, \mathcal{J}(d\vec{u}\,')\right] = \vec{0}$.
   - Ahora considere una traslación espacial infinitesimal implementada en algún estado $|\alpha\rangle$: $|\alpha\rangle \to \mathcal{J}(d\vec{u}\,')|\alpha\rangle$. Muestre que bajo dicha transformación los valores esperados $\langle\vec{x}\rangle$ y $\langle\vec{p}\rangle$ se transforman como $\langle\vec{x}\rangle \to \langle\vec{x}\rangle + d\vec{u}\,'$, $\langle\vec{p}\rangle \to \langle\vec{p}\rangle$, respectivamente.

5. Imagine un sistema cuántico que, en algún instante de tiempo, es descrito por el ket de estado $|\alpha\rangle$. Considere el operador vectorial de momento $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\hat{k}$.
   - Pruebe que

$$\langle\vec{x}\,'|\vec{p}^{\,2}|\alpha\rangle = -\hbar^2\nabla'^2\langle\vec{x}\,'|\alpha\rangle. \quad (5)$$

   - Obtenga una expresión análoga para el bra-ket $\langle\vec{x}\,'|\vec{p}^{\,2}\,p_j|\alpha\rangle$, con $j = x, y, z$.

6. Considere un operador Hermitiano, A, con eigenkets $\{|a_j\rangle\}$.
   - Pruebe que

$$\prod_j (A - a_j \cdot \mathbf{1}) \quad (6)$$

   es el operador nulo.
   - Considere el operador

$$\prod_{j \neq k} \frac{A - a_j \cdot \mathbf{1}}{a_k - a_j}. \quad (7)$$

   ¿Qué hace éste al operar sobre un ket arbitrario $|\alpha\rangle$?

7. Considere un sistema físico definido en un espacio vectorial de dimensión 2. Suponga que este sistema tiene una observable S_z, a la cual le corresponde el conjunto

de eigenkets $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, mismos que constituyen una base del espacio de los kets. Considere la presencia de otras dos observables, S_x y S_y, las cuales son incompatibles entre sí y también son incompatibles con S_z. Suponga que las representaciones de estas observables, con respecto de los eigenkets de S_z, son

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\big(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\big), \tag{8}$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2}\big(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\big), \tag{9}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\big(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\big). \tag{10}$$

- Determine los eigenvalores de S_z y muestre que ni S_x ni S_y comparten base con S_z.
- Muestre que se satisfacen los conmutadores siguientes:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \tag{11}$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x, \tag{12}$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y. \tag{13}$$

- Muestre que se satisfacen los anticonmutadores:

$$\{S_x, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{xj}, \tag{14}$$

donde $j = x, y, z$.

- Muestre que las representaciones matriciales de los operadores S_x, S_y, S_z, son

$$\mathcal{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma^1, \quad \mathcal{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma^2, \quad \mathcal{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma^3, \tag{15}$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli, definidas como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

8. Imagine un sistema físico al que se le puede medir la observable discreta A, de manera que el conjunto de eigenkets $\{|a_j\rangle\}$ es una base del espacio de los kets.

- Suponga que $f(A)$ es un operador que es función de la observable A. Pruebe que

$$f(A)|a_j\rangle = f(a_j)|a_j\rangle, \tag{19}$$

cualquiera sea j. ¿Cuál es la diferencia entre $f(A)$ y $f(a_j)$?

- Pruebe que

$$\exp\{if(A)\}|a_j\rangle = \exp\{if(a_j)\}|a_j\rangle \tag{20}$$

- Encuentre la representación del operador $\exp\{if(A)\}$ con respecto de la base de A.
- Encuentre la representación matricial del operador $\exp\{if(A)\}$ con respecto de la base de A.

9. El operador de desplazamiento espacial para un desplazamiento vectorial finito $\vec{v}\,'$, en tres dimensiones, está dado como

$$\mathcal{J}(\vec{v}) = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{v}\,'\Big\}, \tag{21}$$

donde $\vec{p}$ es el operador de momento.

- Calcule

$$\sum_{k=1}^{3} v'_k[x_j, p_k], \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} v'_k v'_n[x_j, p_k p_n], \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} v'_k v'_n v'_m[x_j, p_k p_n p_m], \tag{24}$$

y use los resultados obtenidos para proponer una expresión para

$$\sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=1}^{3}\cdots\sum_{k_N=1}^{3} v'_{k_1}v'_{k_2}\cdots v'_{k_N}[x_j, p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_N}]. \tag{25}$$

- Evalúe el conmutador $[x_j, \mathcal{J}(\vec{v}\,')]$ y, usando el resultado obtenido, encuentre una expresión para $[\vec{x}, \mathcal{J}(\vec{v}\,')]$, donde $\vec{x} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con respecto de algún marco de referencia.
- Considere algún ket $|\alpha\rangle$, el cual cambia, bajo un desplazamiento vectorial $\vec{v}\,'$, como

$$|\alpha\rangle \to |\alpha'\rangle = \mathcal{J}(\vec{v}\,')|\alpha\rangle. \tag{26}$$

Encuentre cómo cambia el valor esperado $\langle\vec{x}\rangle_\alpha$, calculado con respecto de $|\alpha\rangle$, bajo dicho desplazamiento espacial.

10. Considere un sistema cuántico al que se le pueden medir las observables A y B, cuyas bases de eigenkets son $\{|a_j\rangle\}$ y $\{|b_j\rangle\}$, respectivamente. En este contexto, considere alguna función $f(A)$, del operador A. Suponiendo que se conocen las entradas de la representación matricial $\mathcal{U}$, del operador unitario U que conecta a las bases $\{|a_j\rangle\}$ y $\{|b_j\rangle\}$ como $|a_j\rangle = U|b_j\rangle$, para todo j, evalúe el bra-ket $\langle b_k|f(A)|b_l\rangle$.

11. Considere cuatro operadores arbitrarios A, B, C, D. Pruebe que se satisface la identidad

$$\begin{aligned}[AB, CD] = \quad & -AC\{D, B\} + A\{C, B\}D \\ & -C\{D, A\}B + \{C, A\}DB. \end{aligned} \qquad (27)$$

12. Considere un sistema físico, definido en un espacio 3-dimensional, al que se le pueden medir la posición y el momento, de manera que, con respecto de algún marco de referencia, existen los operadores vectoriales Hermitianos $\vec{x} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\hat{k}$, con sus bases de eigenkets correspondientes, $\{|\vec{x}\,'\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\,'\rangle\}$.

   - Usando la expresión de la onda plana,

   $$\langle\vec{x}\,'|\vec{p}\,'\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x}\,'\cdot\vec{p}\,'}, \qquad (28)$$

   pruebe que

   $$\langle\vec{p}\,'|\vec{x}|\alpha\rangle = \int \frac{d^3\vec{x}\,'}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\vec{x}\,'\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}\psi_\alpha(\vec{x}\,'), \qquad (29)$$

   donde $|\alpha\rangle$ es un ket arbitrario y $\psi_\alpha(\vec{x}\,')$ es la función de onda definida en el espacio de las posiciones.

   - Definimos el operador gradiente con respecto del momento $\vec{p}\,'$ como

   $$\nabla_{\vec{p}\,'} = \frac{\partial}{\partial p'_x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial p'_y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial p'_z}\hat{k}. \qquad (30)$$

   Pruebe que

   $$\nabla_{\vec{p}\,'} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'} = -\frac{i}{\hbar}\vec{x}\,' e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}. \qquad (31)$$

   - Recordando que la función de onda en el espacio de las posiciones $\psi_\alpha(\vec{x}\,') = \langle\vec{x}\,'|\alpha\rangle$ es, esencialmente, la transformada de Fourier de la función de onda en el espacio de los momentos $\phi_\alpha(\vec{p}\,') = \langle\vec{p}\,'|\alpha\rangle$, use los resultados de los dos puntos anteriores para probar que

   $$\langle\vec{p}\,'|\vec{x}|\alpha\rangle = i\hbar\nabla_{\vec{p}\,'}\langle\vec{p}\,'|\alpha\rangle = i\hbar\nabla_{\vec{p}\,'}\phi_\alpha(\vec{p}\,'). \qquad (32)$$

   - Siendo $|\beta\rangle$ algún ket arbitrario, y $\langle\beta|$ su bra dual, pruebe que

   $$\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = \int d^3\vec{p}\,'\phi^*_\beta(\vec{p}\,')i\hbar\nabla_{\vec{p}\,'}\phi_\alpha(\vec{p}\,'). \qquad (33)$$

13. Usando la definición del operador Hermitiano adjunto de X,

$$X|\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha|X^\dagger, \qquad (34)$$

pruebe las propiedades siguientes:

   - $\mathbf{1}^\dagger = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es el operador identidad.
   - $(cX)^\dagger = c^*X^\dagger$, donde c es algún número complejo y X es algún operador.
   - Si $|z'\rangle$ es un eigenket del operador Z, con eigenvalor z', entonces $\langle z'|$ es un eigenbra del operador $Z^\dagger$, con eigenvalor z'^*.

14. Considere la descripción de paquete de onda Gaussiano para la distribución de densidad de probabilidades de medir las posiciones de una partícula cuántica que se mueve en un espacio 1-dimensional, la cual se puede caracterizar mediante la función de onda

$$\psi_\alpha(x') = \frac{1}{(2\pi\langle(\Delta x)^2\rangle)^{1/4}}\exp\left\{ix'k - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4\langle(\Delta x)^2\rangle}\right\}, \qquad (35)$$

donde $\langle x\rangle$ es el valor esperado de la posición y $\langle(\Delta x)^2\rangle$ es la dispersión (varianza) asociada a la distribución de probabilidades $|\psi_\alpha(x')|^2$.

   - Calcule el valor esperado de momento $\langle p\rangle$.
   - Calcule el valor esperado de momento cuadrático $\langle p^2\rangle$.
   - Calcule la dispersión $\langle(\Delta p)^2$ y muestre que su resultado es consistente con la relación de incertidumbre

   $$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \geqslant \frac{\hbar^2}{4}. \qquad (36)$$

15. Usando el método de inducción, pruebe la fórmula

$$[G, [G, [G, \cdots [G, A]] \cdots] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} G^{n-k}A\,G^k, \qquad (37)$$

donde A y G son operadores arbitrarios.

16. En la imagen de Heisenberg, el operador de posición correspondiente al oscilador armónico simple cuántico

1-dimensional evoluciona con respecto del tiempo, t, de acuerdo con la expresión

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t, \tag{38}$$

siendo ω la frecuencia de oscilación y m la masa de la partícula. Más aún, el tiempo inicial se ha tomado como $t_0 = 0$.

- Considere el valor esperado $\langle x\rangle_{n,t} = {}_{\mathrm{H}}\langle n|x(t)|n\rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{S}}\langle n,t|x|n,t\rangle_{\mathrm{S}}$. ¿El ket $|n\rangle_{\mathrm{H}}$, en la imagen de Heisenberg, es fijo en el tiempo o variable con respecto de éste? Determine cómo evoluciona $\langle x\rangle_{n,t}$ con respecto del tiempo.
- Considere el valor esperado $\langle x\rangle_{\alpha,t} = \langle\alpha|x(t)|\alpha\rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\alpha,t|x|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}}$, donde $|\alpha\rangle$ es la superposición de eigenkets de energía

$$|\alpha\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle. \tag{39}$$

¿Es $|\alpha\rangle$ variable o fijo con respecto del tiempo? ¿Cambian $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en el tiempo o no? Determine cuál es la evolución con respecto del tiempo de $\langle x\rangle_{\alpha,t}$ y describa el resultado obtenido. ¿Se parece la respuesta a lo que ocurre con la posición del oscilador armónico simple clásico unidimensional?

17. Suponga que $|\lambda\rangle$ es un eigenket del operator de aniquilación a. Es decir, que

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \tag{40}$$

con el eigenvalor λ, en general, complejo. Por definición, decimos que $|\lambda\rangle$ es un *estado coherente*.

- Considere el valor esperado $\langle x\rangle_{\lambda,t} = {}_{\mathrm{H}}\langle\lambda|x(t)|\lambda\rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\lambda,t|x|\lambda,t\rangle_{\mathrm{S}}$. ¿Cambia el estado $|\lambda\rangle$ en el tiempo o no lo hace? Determine cómo evoluciona $\langle x\rangle_{\lambda,t}$ con respecto del tiempo. ¿Cómo se compara su respuesta con el oscilador armónico simple clásico unidimensional?
- Muestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}\, e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle \tag{41}$$

es un estado coherente y normalizado, es decir, que $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ y $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$.

18. Considere la teoría 1-dimensional de una partícula cuántica de masa m, gobernada por el operador Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{42}$$

Suponga que este sistema tiene una observable A, a la que le corresponde el conjunto de eigenkets $\{|a_j\rangle\}$, los cuales suponemos que también son eigenkets del operador Hamiltoniano: $H|a_n\rangle = E_n|a_n\rangle$.

- Calcule el conmutador $[[H,x],x]$.
- Use el resultado obtenido para probar que

$$\sum_k (E_k - E_j)|\langle a_j|x|a_k\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}. \tag{43}$$

19. Considere el sistema 3-dimensional de una partícula con operador Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{x}). \tag{44}$$

Usando la ecuación de Heisenberg, muestre que se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{x}\cdot\vec{p}\rangle_\alpha = \left\langle\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}\right\rangle_\alpha - \langle\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\,V(\vec{x})\rangle_\alpha, \tag{45}$$

donde $\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\,V(\vec{x}) = \vec{x}\cdot(\vec{\nabla}\,V(\vec{x})) = (\vec{x}\cdot\vec{\nabla})V(\vec{x})$. Los valores esperados se calculan con respecto a algún ket de estado $|\alpha\rangle$, que caracteriza al estado del sistema en algún instante de tiempo.

20. Considere algún sistema cuántico para el cual hay una observable A, que tiene asociada la base de eigenkets $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$. Suponga que, en la imagen de Schrödinger, este sistema es caracterizado por un operador Hamiltoniano, H, que con respecto de la base de A se representa como

$$H = \delta|a_1\rangle_{\mathrm{S}}\,{}_{\mathrm{S}}\langle a_2| + \delta|a_2\rangle_{\mathrm{S}}\,{}_{\mathrm{S}}\langle a_1|, \tag{46}$$

siendo δ algún número real.

- Calcule $H|a_1\rangle_{\mathrm{S}}$ y $H|a_2\rangle_{\mathrm{S}}$, y muestre que $|a_1\rangle_{\mathrm{S}}$ y $|a_2\rangle_{\mathrm{S}}$ no son eigenkets de H.
- Notando que cualquier ket se puede escribir como una combinación lineal de la base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, determine cuáles son los eigenkets de H, así como sus eigenvalores (pista: solo hay dos eigenkets).
- Se puede probar (lo damos por sentado), en la imagen de Schrödinger, que si en un experimento el sistema es configurado en el estado $|a_1, 0\rangle_s$, en el tiempo de referencia $t_0 = 0$, en un instante de tiempo posterior t la evolución del sistema se describe a través de

$$\begin{aligned} |a_1,0\rangle_{\mathrm{S}} &\to |a_1,t\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= \cos\left(-\frac{t\delta}{\hbar}\right)|a_1\rangle_{\mathrm{S}} + i\sin\left(-\frac{t\delta}{\hbar}\right)|a_2\rangle_{\mathrm{S}}. \end{aligned} \tag{47}$$

Calcule la probabilidad de que, dado que el sistema se encontraba inicialmente en $|a_1, 0\rangle_{\rm S}$, en el instante de tiempo $t > 0$ lo midamos y observemos el estado $|a_2\rangle_{\rm S}$.

21. Considere un sistema físico en el que una partícula con carga eléctrica q y masa m interacciona con un campo magnético constante, $\vec{B}$, el cual apunta en dirección del eje z, con respecto de algún marco de referencia: $\vec{B} = B\hat{k}$. Suponiendo que la partícula se encuentra en reposo, su interacción con el campo magnético ocurre a través de la observable cuántica conocida como el *momento angular de espín*, a la cual se le asocia el operador vectorial Hermitiano $\vec{S} = S_1\hat{\imath} + S_2\hat{\jmath} + S_3\hat{k}$. Las componentes del operador vectorial de espín no son compatibles entre sí, y, más bien, satisfacen las relaciones de conmutación
$$[S_j, S_k] = \sum_{l=1}^{3} i\hbar\, \epsilon_{jkl} S_l, \tag{48}$$
con $j, k = 1, 2, 3$. El operador Hamiltoniano asociado a este sistema es
$$H = -\frac{qB}{mc} S_3, \tag{49}$$
donde c es la velocidad de la luz y donde S_3 es el único objeto en la Ec. (49) que es un operador.

- En la imagen de Heisenberg, encuentre las ecuaciones diferenciales que describen la evolución con respecto del tiempo de las componentes S_1, S_2 y S_3.
- Usando estas ecuaciones, determine cómo evolucionan en el tiempo los operadores S_1, S_2 y S_3.

22. Considere un sistema cuántico de una partícula sujeta a algún potencial, a lo que le corresponde algún operador Hamiltoniano, H, que es independiente del tiempo. Suponga que alguna observable A, con eigenkets $\{|a_j\rangle\}$, es compatible con H, lo que significa que
$$A|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle, \qquad H|a_j\rangle = E_j|a_j\rangle, \tag{50}$$
para toda j. La evolución con respecto del tiempo de la función de onda de este sistema es determinada por la ecuación
$$\psi_\alpha(\vec{x}', t) = \int d^3\vec{x}''\, K(\vec{x}', t; \vec{x}'', t_0)\psi_\alpha(\vec{x}'', t_0). \tag{51}$$
con el *propagador* $K(\vec{x}', t; \vec{x}'', t_0)$ definido como
$$K(\vec{x}', t; \vec{x}'', t_0) = \sum_j \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)\Big)\,{}_{\rm S}\langle\vec{x}'|a_j\rangle_{\rm S}\,{}_{\rm S}\langle a_j|\vec{x}''\rangle_{\rm S}. \tag{52}$$
Este objeto es el encargado de conectar a la distribución inicial de probabilidades $\psi_\alpha(\vec{x}'', t_0)$ con las configuraciones $\psi_\alpha(\vec{x}', t)$, asociadas a instantes de tiempo posteriores t.

- La definición aquí proporcionada está dada en la imagen de Schrödinger. Muestre que el propagador es igual en la imagen de Heisenberg.
- Muestre que el propagador se puede escribir como
$$K(\vec{x}', t; \vec{x}'', t_0) = {}_{\rm S}\langle\vec{x}'|\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H\Big)|\vec{x}''\rangle_{\rm S}. \tag{53}$$
- Usando el resultado anterior, muestre que
$$K(\vec{x}', t; \vec{x}'', t_0) = {}_{\rm S}\langle\vec{x}'|\vec{x}'', t_0; t\rangle_{\rm S}, \tag{54}$$
e interprete lo que significa esta expresión en relación a las amplitudes de transición (no olvide que el sistema describe a una partícula cuántica).

23. Considere algún sistema cuántico para el cual se encuentra que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un *conjunto máximo de observables que conmutan*. Suponga, además, que todas las observables de dicho conjunto conmutan con el operador Hamiltoniano, H.

- ¿Cómo se escriben los eigenkets asociados a este conjunto de observables? ¿Cuáles son las ecuaciones de eigenvalores correspondientes a las observables A_k? Escriba las ecuaciones de eigenvalores y eigenkets asociadas a H.
- Si, en la imagen de Schrödinger, el ket de estado del sistema, $|\alpha\rangle$, evoluciona en el tiempo como
$$|\alpha, t_0\rangle_{\rm S} \xrightarrow{t-t_0} |\alpha, t\rangle_{\rm S} = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle_{\rm S}, \tag{55}$$
muestre que los coeficientes $c_{j_1j_2\cdots j_n}(t)$, que caracterizan a la expansión de $|\alpha, t\rangle_{\rm S}$ en términos de los eigenkets de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, varían con respecto del tiempo como
$$\begin{aligned} c_{j_1j_2\cdots j_n}(t_0) &\xrightarrow{t-t_0} c_{j_1j_2\cdots j_n}(t) \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_{j_1j_2,\cdots j_n}(t-t_0)\right\} c_{j_1j_2\cdots j_n}(t_0), \end{aligned} \tag{56}$$
donde $E_{j_1j_2,\cdots j_n}$ denota a alguna energía que se le puede medir al sistema.

24. **El oscilador armónico isotrópico cuántico 3-dimensional.**
Este sistema cuántico, descrito por el operador Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{x}^{\,2}}{2}, \tag{57}$$

es una generalización del sistema del oscilador armónico simple cuántico 1-dimensional. El operador Hamiltoniano dado en la Ec. (57) se define en términos de los operadores vectoriales de posición, $\vec{x} = x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} + x_3\hat{k}$, y de momento, $\vec{p} = p_1\hat{\imath} + p_2\hat{\jmath} + p_3\hat{k}$. Se definen los operadores *de aniquilación* y *de creación* siguientes:

$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\Big(x_j + i\frac{p_j}{m\omega}\Big), \tag{58}$$

$$a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\Big(x_j - i\frac{p_j}{m\omega}\Big), \tag{59}$$

con $j = 1, 2, 3$.

- Evalúe los conmutadores $[a_j, a_k]$, $[a_j^\dagger, a_k^\dagger]$ y $[a_j, a_k^\dagger]$. ¿Cómo se comparan los resultados obtenidos con las expresiones de los conmutadores canónicos entre las componentes de los operadores de posición, $\vec{x}$, y de momento, $\vec{p}$?
- Se definen los operadores N_1, N_2 y N_3 como $N_j = a_j^\dagger a_j$, para $j = 1, 2, 3$. Muestre que el operador Hamiltoniano dado en la Ec. (57) se escribe como

$$H = \hbar\omega\Big(N + \frac{3}{2}\cdot\mathbf{1}\Big), \tag{60}$$

donde $\mathbf{1}$ denota al operador identidad y $N \equiv \sum_{j=1}^{3} N_j$.
- Pruebe que todos los operadores N_j son Hermitianos y compatibles entre sí. Este resultado implica que $\{N_1, N_2, N_3\}$ es un conjunto de observables compatibles, al que le corresponde la base de eigenkets $\{|n_1, n_2, n_3\rangle\}$. Denotando, en forma sintética, a dichos eigenkets como

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = |\vec{n}\rangle, \tag{61}$$

tenemos las ecuaciones de eigenkets y eigenvalores

$$N_j|\vec{n}\rangle = n_j|\vec{n}\rangle. \tag{62}$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Muestre que cada operador N_j es compatible con N y con H, y determine los valores de energía que se le pueden medir a este sistema.
- Pruebe las identidades

$$[N_k, a_j] = -\delta_{jk}\, a_k, \tag{63}$$

$$[N_k, a_j^\dagger] = \delta_{jk}\, a_k^\dagger, \tag{64}$$

y use estos resultados para mostrar que se satisfacen las relaciones

$$N_k(a_j|\vec{n}\rangle) = (n_k - \delta_{jk})(a_j|\vec{n}\rangle), \tag{65}$$

$$N_k(a_j^\dagger|\vec{n}\rangle) = (n_k + \delta_{jk})(a_j^\dagger|\vec{n}\rangle). \tag{66}$$

Discuta estas expresiones detalladamente.
- Determine los eigenvalores de energía de $a_j|\vec{n}\rangle$ y $a_j^\dagger|\vec{n}\rangle$, y discuta detalladamente los resultados que obtenga. Use la Ec. (65) para proponer que

$$a_j|\vec{n}\rangle = c_j|\vec{n} - \hat{e}_j\rangle. \tag{67}$$

Aquí, $\hat{e}_j$ denota al j-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^3$, de modo que $\hat{e}_j$ puede ser $\hat{e}_1 = \hat{\imath}$, $\hat{e}_2 = \hat{\jmath}$ ó $\hat{e}_3 = \hat{k}$. Explique claramente el origen y el significado de la Ec. (67).
- Pruebe que los eigenvalores n_j están acotados inferiormente como $n_j \geq 0$. Determine los factores globales c_j y use su resultado para mostrar que se satisfacen las ecuaciones

$$a_j|\vec{n}\rangle = \sqrt{n_j}\,|\vec{n} - \hat{e}_j\rangle, \tag{68}$$

$$a_j^\dagger|\vec{n}\rangle = \sqrt{n_j + 1}\,|\vec{n} + \hat{e}_j\rangle. \tag{69}$$

- Pruebe la identidad

$$a_j^m|\vec{n}\rangle = \big[n_j(n_j-1)\cdots \times(n_j-(m-1))\big]^{\frac{1}{2}}\,|\vec{n} - m\,\hat{e}_j\rangle \tag{70}$$

donde m es, desde luego, un número entero no-negativo. En general, dado un eigenket $|\vec{n}\rangle$, ¿se puede operar a éste con el operador de aniquilación a_j tantas veces como se quiera o hay alguna restricción?
- Suponga que n_j es un número entero no-negativo, para todo $j = 1, 2, 3$. En dicho contexto, muestre que el proceso de operar iteradamente a $|\vec{n}\rangle$ con a_j termina en forma natural. ¿Dónde termina exactamente este proceso? Si, bajo este argumento de naturalidad, establecemos que $n_j = 0, 1, 2, \ldots$,

cualquiera sea $j = 1, 2, 3$, ¿cuál es el eigenket de estado base (al que le corresponde la energía mínima)? ¿Cuál es el eigenvalor de energía correspondiente? Discuta su respuesta.

25. En el contexto del oscilador armónico simple cuántico 1-dimensional, pruebe, usando la fórmula de Baker-Hausdorff, que el operador de momento, en la imagen de Heisenberg, evoluciona en el tiempo como

$$p(t) = -m\omega \sin(\omega t)x + \cos(\omega t)p, \tag{71}$$

donde el tiempo inicial se ha tomado como $t_0 = 0$.

26. Calcule las representaciones matriciales de los operadores de aniquilación, a, y de creación, $a^\dagger$, con respecto de la base de los eigenestados de energía, $\{|n\rangle\}$.