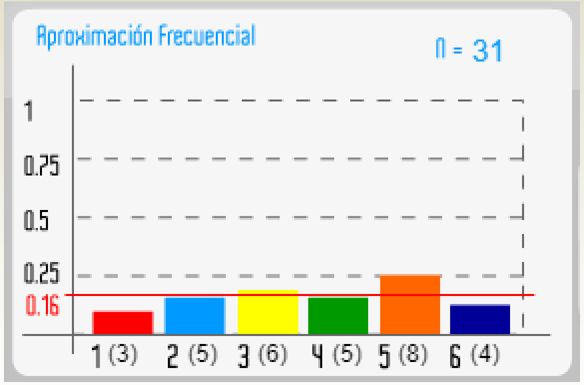
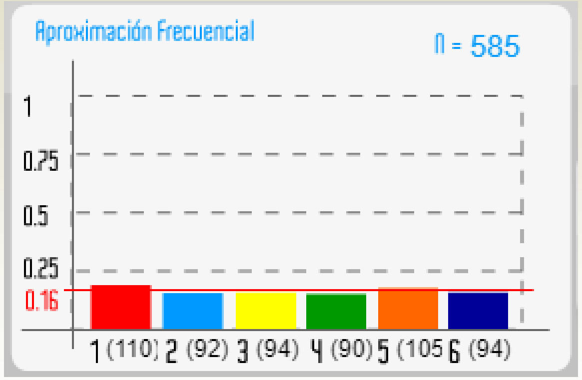
Procesos Estocásticos – Cadenas de Markov Una Motivación

Dr. José Dionicio Zacarías Flores

UN POCO DE HISTORIA





Dos pasos gigantes en probabilidad

- **Andrey Nikolaevich Kolmogorov** (1903-1987) logró dar una definición precisa al concepto de probabilidad, para el uso matemático y lo suficiente amplia como para ser aplicable a una gama amplia de fenómenos aleatorios, al establecer las bases axiomáticas de este concepto.

- **Joseph Leo Doob** (1910-2004), fue uno de los pioneros en el tratamiento moderno de los procesos estocásticos. Su libro Procesos estocásticos (Doob, 1953) es uno de los más influyentes en el tratamiento de los procesos estocásticos modernos (específicamente martingales).

Dos pasos gigantes en probabilidad

- **Paul-Andr'e Meyer** (1934-2003) es otro gran probabilista influyente en el desarrollo posterior de los Procesos Estocásticos. Su aportación fue fundamental en el desarrollo de la teoría de los procesos de Markov en tiempo continuo y en el tratamiento de las martingales de tiempo continuo (descomposición de Doob-Meyer).

Dos pasos gigantes en probabilidad

- Termino esta brevísima reseña histórica citando a ***Ionut¸ Florescu*** del Stevens Institute of Technology:
- “It is from my personal experience that a person with strong theoretical background can apply the theory easily, while a person with only applied background needs to resort to “quick and dirty fixes” to make algorithms work, and then only working in their particular context.”

- “Es de mi experiencia personal que una persona con un fondo teórico fuerte puede aplicar la teoría fácilmente, mientras que una persona con sólo fondo aplicado necesita recurrir a "arreglos rápidos y sucios" para hacer que los algoritmos funcionen, y luego sólo trabajan en su contexto particular.”

¿Qué se entiende por un Proceso Estocástico?

- Los Procesos Estocásticos o Procesos Aleatorios, son una herramienta probabilística, que surge ante la necesidad de ***modelar el comportamiento de experimentos aleatorios que varían en el tiempo, o dependen de alguna otra variable no determinista***.
- De manera general pueden dividirse en procesos estocásticos de ***tiempo discreto*** y de ***tiempo continuo***.

- Es decir, cuando nosotros estudiamos procesos estocásticos, cada observación que realicemos corresponderá a una función del tiempo. A manera de entender lo que es el significado de las palabras **“estocástico”** y **“proceso”**, de una manera sencilla podemos decir que: estocástico significa **“aleatorio”**, al **“azar”** o **“no determinista”**, y la palabra proceso en nuestro contexto diremos que significa una **“función del tiempo”**.

- Concluimos entonces que un proceso estocástico es ***un sistema que se va desarrollando a través del tiempo, mientras va pasando por fluctuaciones al azar***.
- Es usual describir a tales sistemas como una familia de variables aleatorias, {Xt}, donde Xt mide, en el instante t, el comportamiento del sistema en estudio.

Definición formal

- Un proceso estocástico puede definirse generalmente como ***cualquier colección de variables aleatorias*** X(t), t ∈ T, ***definida en un espacio de probabilidad común***, donde T es un subconjunto de (-∞,∞) y se considera como el ***parámetro de tiempo*** establecido.
- El proceso es llamado un proceso con ***parámetro continuo*** si T es un intervalo teniendo longitud positiva y un proceso con ***parámetro discreto*** si T es un subconjunto finito o contable.
- Si todas las variables aleatorias X(t) toman valores de un conjunto fijo $\mathbb{S}$, entonces $\mathbb{S}$ es llamado el ***espacio de estados*** del proceso.

Se agradece la aportación de la Prof. Guadalupe del Carmen Rodríguez Moreno por describir algunos ejemplos en el siguiente link:

https://es.slideshare.net/lupiuxlupiux/procesos-estocsticos-ejemplos

EJEMPLOS

Clasificación de procesos estocásticos

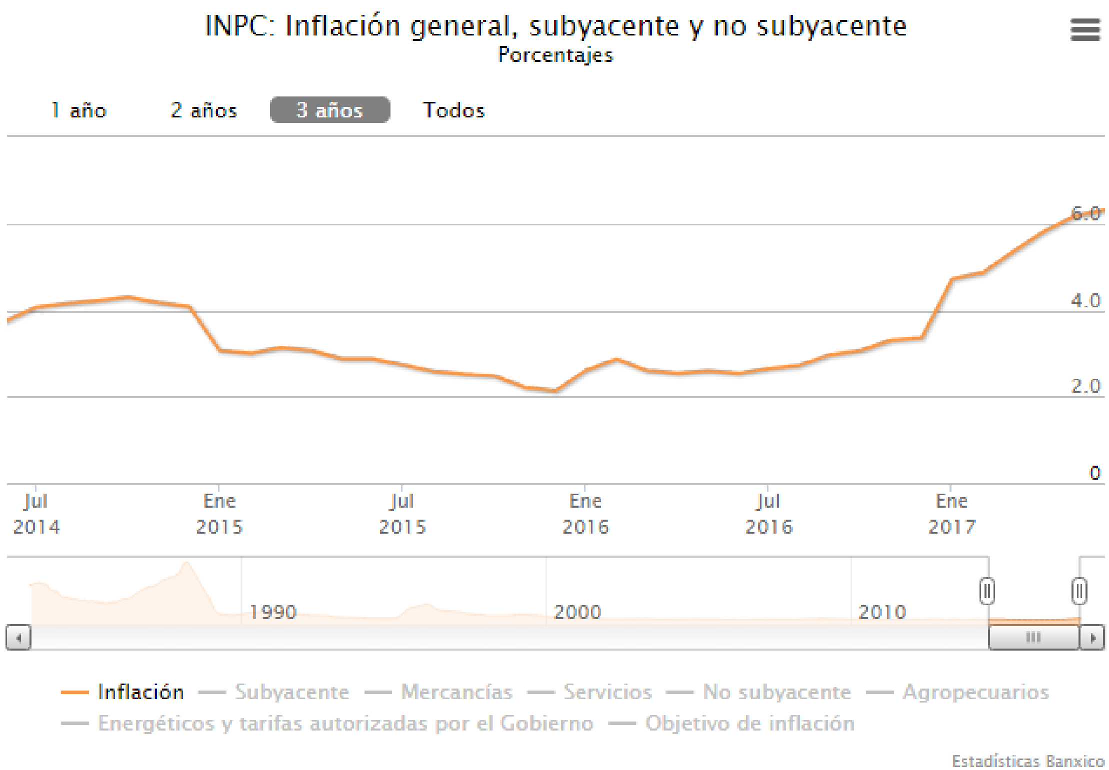
- El espacio de estados “S” puede ser continuo o discreto
- El espacio paramétrico “T” puede ser continuo o discreto

S \ T	Discreto	Continuo
Discreto	Serie estocástica con espacio de estados discreto	Proceso estocástico con espacio de estados discreto
Continuo	Serie estocástica con espacio de estados continuo	Proceso estocástico con espacio de estados continuo

Ejemplo

X_t mide el cambio de temperatura en la Ciudad de Puebla, las 24 horas de cada día

Ejemplo

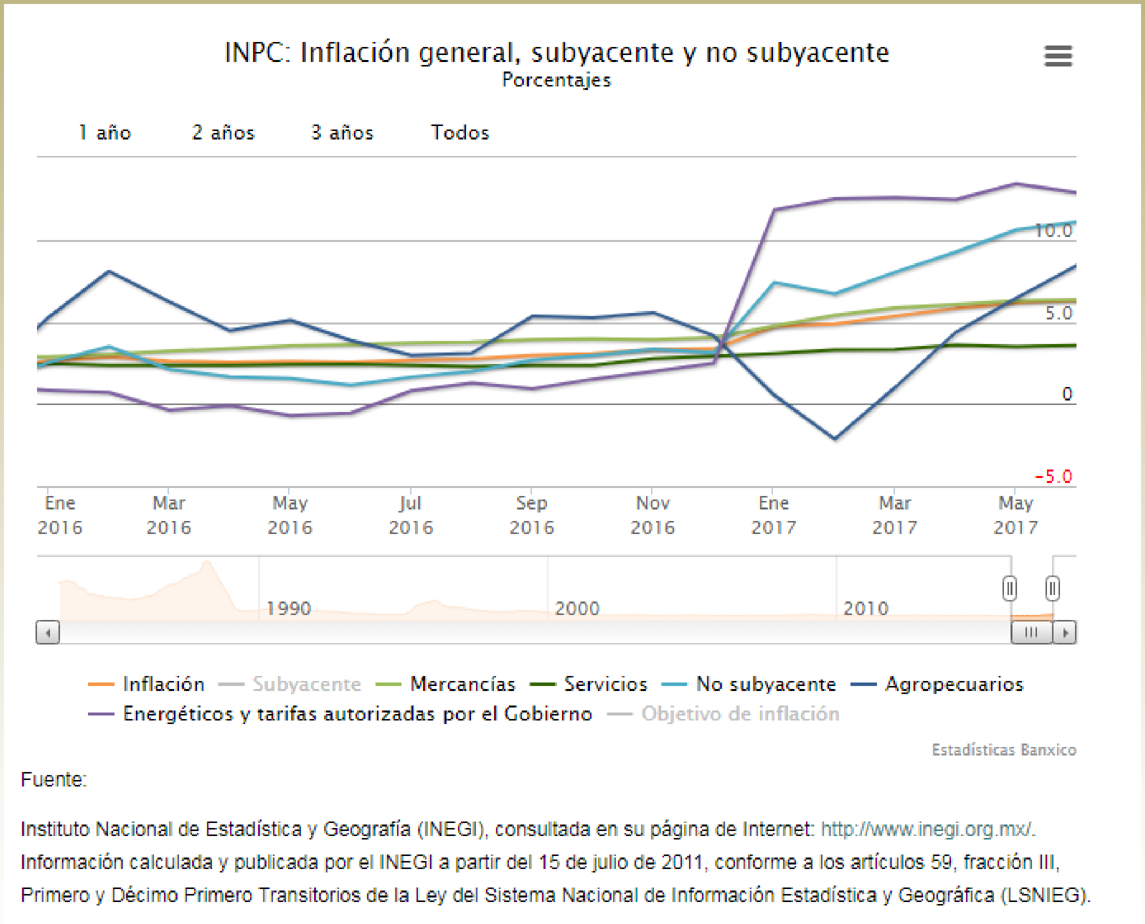


Fuente:

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), consultada en su página de Internet: http://www.inegi.org.mx/.
Información calculada y publicada por el INEGI a partir del 15 de julio de 2011, conforme a los artículos 59, fracción III, Primero y Décimo Primero Transitorios de la Ley del Sistema Nacional de Información Estadística y Geográfica (LSNIEG).

X_t mide la inflación en México de manera anual y mensual

Ejemplo

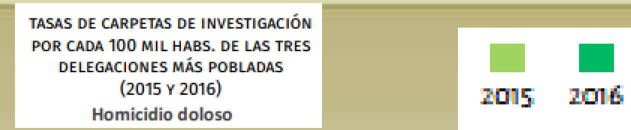


X_t mide la inflación en México de manera anual y mensual

Fuente: Banco de México, http://www.banxico.org.mx/portal-inflacion/inflacion.html

Ejemplo

Ciudad de México



X_t mide distintos indicadores de delincuencia en las principales delegaciones de la CDMX

Fuente: Observatorio nacional ciudadano http://onc.org.mx/2017/06/29/incidencia-de-los-delitos-de-alto-impacto-en-mexico/

¿Dónde aplicar los procesos estocásticos?

- Usualmente se usan como modelos matemáticos de fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo o el espacio. Y como la aleatoriedad está presente en una gran diversidad de situaciones, sus posibles aplicaciones son muy amplias:
- Enlistaremos una breve lista de ejemplos:

Una breve lista de ejemplos:

- Telecomunicaciones: Tamaño de Redes, cobertura de las antenas, control de tráfico, enrutamiento alternativo y reconocimiento de voz.
- Computadoras: Diseño de redes, procesamiento paralelo, inteligencia artificial, reconocimiento de patrones y optimización de desempeño.
- Fabricación: pronóstico, planificación, programación, ubicación de instalaciones y gestión de recursos.
- Finanzas: Carteras, precios de opciones, fondos de pensiones y pronósticos.
- Seguros: Análisis de riesgo, demografía, inversiones y diversificación.

Una breve lista de ejemplos:

- Internet: diseño, control, búsqueda óptima, procesamiento paralelo, publicidad y reconocimiento de patrones.
- Call-centers: pronóstico, elección de personal, enrutamiento alternativo y diseño óptimo.
- Aerolíneas: Programación, mantenimiento, precios de boletos y sobreventa.
- Cadenas de suministro: Diseño de redes, control de inventario, transbordo, fuentes alternativas y contratación.
- Militar: Logística, programación, mantenimiento, selección de objetivos, inteligencia, compras y juegos de guerra.

Una breve lista de ejemplos:

- Infraestructura: Confiabilidad y mantenimiento de carreteras, edificios, puentes, represas, diques y servicios públicos.
- Aeropuertos: Control de tráfico, emergencias, seguridad y diseño de pistas.
- Control de inventario: artículos de venta y alquiler, sangre, aceite, agua y alimentos.
- Seguridad: Computadoras, patria, bancos, teléfonos y archivos de datos.
- Medicina: Secuenciación del ADN, diagnósticos, epidemias y vacunas.

Aplicaciones especializadas

- Otro tipo de aplicaciones especializadas y de las cuales no siempre se tiene acceso fácilmente a tales aplicaciones, se da en disciplinas científicas como Matemáticas, Ingeniería, Física, Ciencias Sociales, Biología, Negocios, etc., así como en asuntos relacionados a dependencias gubernamentales como PEMEX, NASA, CFE, ARMADA NAVAL, ETC.
- Trabajos relacionados a las áreas mencionadas pueden encontrarse en revistas como: Advances in Applied Probability, Annals of Applied Probability, Journal of Applied Probability, Probability in the Engineering and Informational Sciences, Queueing Systems: Theory and Applications, and Stochastic Processes and their Applications.

Referencias

- Hoel, P. G., Port, S. C., Stone, C. J. (1972) Introduction to Stochastic Process. Houghton Mifflin Company, Boston. USA
- Serfozo, R. (2009) Basics of Applied Stochastic Processes. Springer.