

Formulación Variacional de algunos problemas en la Teoría de Transiciones de fase.

Marco Antonio Prado Záyago.

9 de diciembre de 1999

*A mi padre,
cuyas manos fuertes y comprensión
me permitieron no sólo tener,
sino perseguir mis propios sueños...*

A Lala...

*A tí y a mí,
los que nunca fuimos...*

Índice General

1	Motivaciones.	9
1.1	Algunas nociones de Geometría Diferencial.	9
1.2	Observaciones de Laplace y Gauss.	15
1.3	Fenómenos de superficie.	24
1.3.1	Consideraciones Físicas.	24
1.3.2	Física de películas y burbujas de jabón.	28
1.4	Ecuación de difusión y funcional de energía.	35
1.5	Transiciones de fase.	43
1.6	Formación de Patrones.	44
2	Casos particulares.	49
2.1	Cálculo en Espacios de Funciones.	49
2.2	Dos casos particulares del funcional de energía.	53
2.3	Caso unidimensional.	57
2.3.1	Sistemas con un grado de libertad.	57
2.3.2	Péndulo simple.	59
2.3.3	Funcional de energía; caso unidimensional.	62
3	Formulación variacional: Paso de montaña.	69
3.1	Puntos críticos y deformaciones.	73

3.2	Teorema del Paso de Montaña.	84
3.3	Existencia de soluciones.	90
4	Algunas soluciones numéricas.	103
A	Espacios de Sobolev.	115
A.1	Motivación.	115
A.2	Definiciones previas y notación.	116
A.3	Espacios de Sobolev.	120
A.3.1	Derivadas débiles.	120
A.3.2	Definición de espacios de Sobolev.	125
A.4	Espacios Duales.	132
A.4.1	Dual de L^p	132
A.4.2	Dual de un espacio de Sobolev.	134

Agradecimientos.

Al igual que otros, quise aprovechar este espacio para congraciarme (quizá conmigo mismo) y expresar mi agradecimiento hacia todos aquellos que han tenido que ver en la realización de mis sueños. Hace algún tiempo llegue a sentir que mi camino estaba bastante alejado de las matemáticas, aunque seguí estudiándolas. Resultó entonces que tuve la oportunidad de conocer al Dr. Gilberto Flores Gallegos en uno de tantos congresos de matemáticas a los que asistí. Fue Gilberto quien me invito a conocer el Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS y quien me presentó al Dr Pablo Padilla. Ambos me propusieron trabajar en temas harto interesantes e inesperadamente resultó que mi camino no estaba tan difuso como creí. Debo agradecerles a ambos no sólo por volver a interesarme en la matemática sino también por lo mucho que me han hecho trabajar, como nunca antes en mi vida. Así pues, me permito agradecerles a ambos por brindame su confianza cuando la mía andaba medio extraviada. Agradezco también el respaldo que he recibido por parte de todos los investigadores del departamento, quienes nunca han dejado de apoyar a sus estudiantes. Gracias a la Dra. Clara Garza por su valiosa ayuda en la parte numérica de este trabajo.

Por otro lado y dejando la solemnidad por la paz, quiero decir que me siento sumamente afortunado por los amigos que me tocaron, que aunque no diga sus nombres, saben perfectamente quienes son. Ellos y sus locuras han permitido que mi mundo no carezca de valores. Gracias a mi hermano Edgar y al Alberto, quienes siempre están ahí. Al Esteban, quien también es parte fundamental.

Finalmente no me queda más que disculparme con todos aquellos a quienes no nombré y pedirles que no se ofendan. En estos casos es difícil no escribir tantos nombres, pero quiero asegurarles que están presentes en todo lo que hago.

Marco Antonio Prado Z.

Introducción.

Resolver una ecuación diferencial parcial no siempre es posible usando métodos convencionales, pues las soluciones deben cumplir fuertes condiciones de diferenciabilidad para satisfacer la relación propuesta. Por ejemplo, una solución a la ecuación de difusión

$$u_t(x, y, z, t) = k\Delta u + F(x, y, z, t),$$

necesariamente tiene que ser dos veces continuamente diferenciable en un cierto dominio abierto Ω con valores determinados sobre la frontera. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿es posible debilitar las condiciones sobre u , de tal manera que se pueda obtener una función que se aproxime a alguna de las soluciones “fuertes” de la ecuación?; de ser posible encontrar una función de este tipo, ¿cómo saber si ésta resuelve la relación original?. La manera natural para responder a estas cuestiones es convertir la ecuación diferencial parcial en una integral, de tal manera que una solución a ésta sea ahora localmente integrable y una vez diferenciable, con lo que se ha conseguido debilitar momentáneamente la propiedad de ser dos veces continuamente diferenciable.

Existe una teoría general para resolver ecuaciones diferenciables parciales. El cálculo de las variaciones identifica una clase importante de problemas no lineales que pueden ser resueltos usando técnicas relativamente simples del análisis funcional no lineal. Esta es la clase de problemas variacionales, es decir, ecuaciones diferenciables parciales.

Por tal motivo, es muy conveniente discutir el problema de encontrar soluciones adicionales a la ecuación parcial buscando puntos críticos de funcionales de energía. El punto es que mientras usualmente es extremadamente difícil resolver la ecuación parcial, puede resultar más sencillo encontrar máximos, mínimos u otros puntos críticos de cierto funcional.

En este trabajo se estudiará el funcional de energía

$$I_\varepsilon[u] = \int_U \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} dx,$$

definido en H^1 , donde W es un potencial biestable con mínimos locales en $u = \pm 1$ y $W(\pm 1) = 0$. Obsérvese que si $\varepsilon \approx 0$, es necesario que $u \approx \pm 1$, excepto quizá, en un conjunto de medida cero. La intención es tratar de probar que existe al menos una solución diferente de $u = \pm 1$ que exhibe transiciones utilizando el teorema del paso de montaña.

Capítulo 1

Motivaciones.

1.1 Algunas nociones de Geometría Diferencial.

Una manera de modelar aspectos físicos y geométricos de los fenómenos de tensión superficial, es a través de los conceptos clásicos de la Geometría Diferencial. Supóngase que M es una superficie suave y sin picos en el espacio ambiente \mathbb{R}^3 . La superficie M puede pensarse como “sumergida” en el espacio ambiente \mathbb{R}^3 , la cual es muy parecida a un plano \mathbb{R}^2 en pequeñas vecindades de todos sus puntos. Por ejemplo, una pelota esférica es muy parecida en pequeñas vecindades de cualquiera de sus puntos a pedazos de plano. En este trabajo, normalmente se pensará en este tipo de objetos cuando se hable de superficies, a menos que se especifique lo contrario. Una manera natural para describir matemáticamente a una superficie *regular* (suave y sin picos), es simplemente definirla como la imagen de varias funciones

$$\mathbf{x}_i : U_i \longrightarrow V_i \cap M,$$

con $U_i \subset \mathbb{R}^2$ y $V_i \subset \mathbb{R}^3$ conjuntos abiertos, tales que \mathbf{x}_i son *homeomorfismos* (funciones continuas, uno a uno con inversa continua), diferenciables (que es posible aproximar punto a punto un plano tangente) y la *diferencial* (el plano tangente aproximado punto a punto) es también uno a uno. A la función \mathbf{x} normalmente se le llama *parametrización*. No se discutirá aquí con detalle esta definición, aunque se recomienda fuertemente consultar las referencias.

Tómese un punto p en la superficie M . Intuitivamente es clara la posibilidad de dibujar un *plano tangente* a M en cada uno de sus puntos. La elección de una orientación en el plano tangente induce una orientación en una pequeña vecindad de M del siguiente modo.

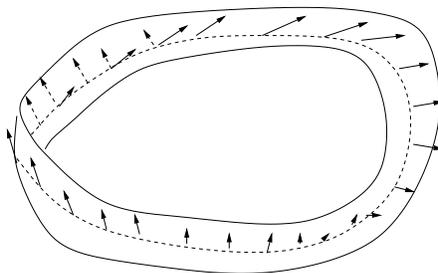


Figura 1. Banda de Möbius.

Un movimiento positivo o negativo de curvas cerradas en un plano es simplemente la elección de la dirección en cómo se recorren éstas. De este modo, la elección de recorrido de curvas cerradas en una pequeñas vecindades del plano tangente a M , induce un recorrido positivo (ó negativo) de curvas cerradas en vecindades pequeñas de la superficie M . Es en este sentido en que puede definirse una *orientación* para la superficie M (figura 2). Claramente, la dirección de recorrido para curvas está determinada por el vector tangente o su negativo, y esta elección considera automáticamente a uno de dos vectores, al normal o su negativo. En el caso de una superficie M , intuitivamente es claro que a cualquiera de sus puntos se le puede asignar un vector normal. La manera de hacer esta asignación es tomar una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ en un punto $p \in M$ dado, y definir el mapeo $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q). \quad (1.1)$$

Donde $q \in \mathbf{x}(U)$, $\mathbf{x}_v = \frac{d\mathbf{x}}{dv}$, $\mathbf{x}_u = \frac{d\mathbf{x}}{du}$ y el símbolo “ \wedge ” se refiere al producto vectorial usual definido para \mathbb{R}^3 . No siempre es posible extender de manera continua este mapeo a toda la superficie M ; más generalmente, si $V \subset M$ es un conjunto abierto en M y $N : V \subset \mathbb{R}^3$ es un mapeo diferenciable que asocia a cada punto $q \in V$ un vector normal unitario (de longitud unitaria) en q , se dice que N es un *campo de vectores normales unitarios* en V . No todas las superficies admiten un campo continuo de vectores normales unitarios definido en toda la superficie; además, hay ejemplos en los que el campo resulta no ser uno a uno. Por ejemplo, no es posible definir un campo continuo para la banda de Möbius, debido a que en cada punto de esta superficie le corresponden los vectores normales $N(p)$ y $-N(p)$ (figura 2).

En lo subsecuente, diremos que una superficie M es *orientable* si es posible definir en todo M un campo continuo de vectores normales unitarios. La elección de tal campo N será llamada simplemente una *orientación*. Obviamente, siguiendo esta definición, la banda de Möbius no es orientable. Una orientación N en M puede ser usada para definir

una dirección de rotación en cada plano tangente $T_p(M)$ a cualquier $p \in M$, del siguiente modo. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, la θ -rotación positiva en el punto p de la superficie orientada M es la transformación lineal $R_\theta : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por $R_\theta(\mathbf{v}) = (\cos \theta)\mathbf{v} + (\sin \theta)N(p) \wedge \mathbf{v}$, donde $N(p)$ es la orientación de M en p . La transformación R_θ es usualmente llamada la rotación de mano derecha de la terna $\{N(p), \mathbf{v}, N(p) \wedge \mathbf{v}\}$ con respecto al ángulo θ (figura 2).

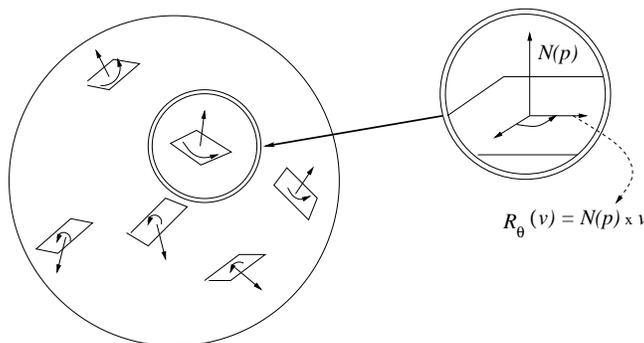


Figura 2. Orientación de S^2 .

Supóngase que $N(p)$ es el vector normal a M en p definido por una orientación dada de M , y denótese como $T_p(M)$ a el plano tangente de M en p . Si por p se hace pasar un plano $\Pi(p)$ que contenga a $N(p)$, este plano $\Pi(p)$ intersectará a M a lo largo de una curva γ llamada *sección normal* (figura 3). El vector unitario v , tangente a γ en p , es llamado la *dirección normal* de la sección normal.

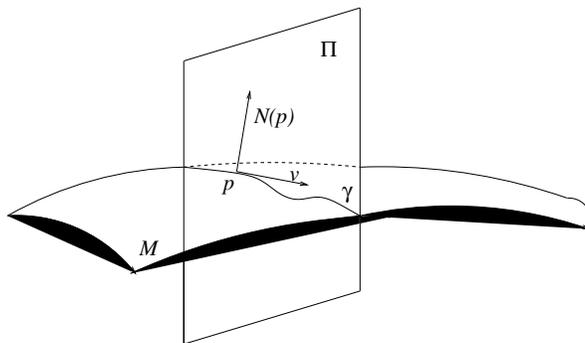


Figura 3.

En el estudio de la *Teoría local de curvas*, normalmente se hace referencia a las *fórmulas de Frenet-Serret*, debido a que éstas abarcan toda la información necesaria en el estudio de curvas. Por ello es conveniente detenerse un poco en su deducción. Una curva en el espacio puede ser definida mediante una función α de un intervalo $I = [0, L]$, donde L es la longitud de la curva, en \mathbb{R}^3 utilizando como parámetro a la longitud de arco

$$s(t) = \int_0^L \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt,$$

No es difícil probar que la velocidad $\dot{\alpha}(s) = \frac{d\alpha}{ds}$ tiene longitud uno para este parámetro y que el vector $\ddot{\alpha}$ es ortogonal a $\dot{\alpha}$ y por lo tanto está en $\Pi(p)$. En el plano, se define $|\ddot{\alpha}(s)| = \frac{d\theta}{ds}$, donde $\theta(s)$ es el ángulo que forma la tangente con la dirección horizontal; por lo tanto, $|\ddot{\alpha}(s)|$ indica que tan rápidamente la curva se aleja de la línea tangente en s . Esto último motiva la siguiente definición.

Definición 1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco $s \in I$. El número $|\ddot{\alpha}(s)| = k(s)$ es llamado *la curvatura* de α en s .

Tampoco es difícil probar que la curvatura así definida no depende de la dirección en que se recorre la curva. Ahora bien, en los puntos donde $k(s) \neq 0$, es posible definir de igual manera un vector unitario $n(s)$ en la dirección de $\ddot{\alpha}(s)$ mediante la ecuación $\ddot{\alpha}(s) = k(s)n(s)$; físicamente, puede pensarse a $\ddot{\alpha}$ como el vector aceleración de una partícula que se mueve sobre la curva α con velocidad $\dot{\alpha}$. Derivando $\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 1$, se observa que $n(s)$ (llamado simplemente *vector normal*) es perpendicular a la curva $\alpha(s)$. Por otro lado, es conveniente definir un nuevo vector unitario llamado *vector binormal* como $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, donde el símbolo “ \wedge ” denota el producto vectorial usual y $t(s) = \dot{\alpha}(s)$. En consecuencia, $b(s)$ es normal al plano determinado por los vectores $\dot{\alpha}(s)$ y $n(s)$ (usualmente llamado *plano osculador*), y $|\dot{b}(s)|$ mide que tan distintos son los planos osculadores con respecto al osculador en s en una vecindad lo suficientemente pequeña; es decir, $\dot{b}(s)$ mide que tan rápido se aleja la curva del plano osculador en s en una vecindad lo suficientemente pequeña de s . Obsérvese que $\dot{b}(s) = t(s) \wedge \dot{n}(s)$, por lo que $\dot{b}(s)$ es perpendicular a $t(s)$. En consecuencia $\dot{b}(s)$ es paralelo a $n(s)$, por lo que es posible escribir

$$\dot{b}(s) = \tau(s)n(s).$$

Para alguna función $\tau(s)$. Esta última es conocida como la *torsión* de α en s . No es difícil probar que α es una curva plana (totalmente contenida en un plano) sí y sólo sí $\tau = 0$, y que τ permanece invariante bajo cambios de orientación. Finalmente, sólo es necesario calcular $\dot{n}(s)$ en términos de la curvatura y la torsión. Como $n = b \wedge t$, se tiene

$$\dot{n}(s) = -\tau b - kt$$

En resumen, para cada valor del parámetro s , se tiene asociada una terna unitaria $\{t, n, b\}$ (llamada *terna de Ferret*) que junto con las derivadas $\dot{t}(s)$, $\dot{n}(s)$ y $\dot{b}(s)$ expresadas

en esta terna, arroja cantidades $(\tau$ y k) que proporcionan toda la información necesaria acerca del comportamiento de la curva α cerca del punto s . Pueden ahora enunciarse las ecuaciones de *Frenet-Serret*

$$\begin{aligned}\dot{t} &= kn, \\ \dot{n} &= -kt - \tau b, \\ \dot{b} &= \tau n.\end{aligned}$$

Normalmente, al inverso $R = 1/k$ de la curvatura se le llama *radio de curvatura* en s . Claramente, un círculo de radio r tiene curvatura $1/r$ y radio de curvatura igual a r .

Si se piensa que una curva cualquiera puede ser obtenida torciendo una línea recta, entonces puede concluirse que si dos curvas tienen la misma curvatura y torsión punto a punto, entonces ambas, salvo un movimiento rígido (traslaciones ó rotaciones), son la misma; además, dadas dos cantidades k y τ puede generarse localmente una curva con curvatura k y torsión τ . Este resultado es conocido como el *Teorema fundamental de la teoría local de curvas*; obsérvese que los puntos y sus tangentes son arbitrarias, por lo que su validéz se debe a la existencia y unicidad de soluciones de Frenet-Serret.

En general, para cualquier curva regular \mathcal{C} sobre la superficie M que pase por el punto $p \in M$, puede definirse la *curvatura normal* como el número $k_n = k \cos \theta$, donde $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ (*producto punto* o *producto interior*), n es el vector normal unitario a la curva \mathcal{C} , N el vector normal a la superficie M en p y k es la curvatura de \mathcal{C} en p . En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector kn (justamente la aceleración $\ddot{\alpha}(s)$), sobre el vector normal a la superficie en p , con el signo dado por la orientación N de M en p (figura 4).

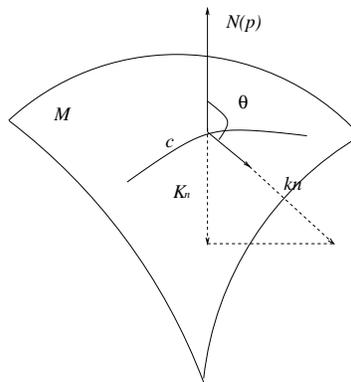


Figura 4.

En el caso de la sección normal γ , ésta es una curva plana cuyo vector normal n tiene la

dirección de la aceleración y es colineal con $N(p)$, por lo que $\cos \theta = \langle n, N \rangle = 1$ y $k_n = k$; Es decir, k_n coincide en este caso con la definición 1 de curvatura para curvas planas. Defínase como $\bar{k}(v)$, (v tangente a la curva \mathcal{C}), al vector cuya magnitud es la proyección de kn en $N(p)$ (es decir, $k \cos \theta$), y cuya dirección coincide con la de éste último; $\bar{k}(v)$ será llamado el *vector curvatura* de \mathcal{C} en la dirección v , entendiéndose que ésto se refiere a que $\bar{k}(v)$ es el vector aceleración en p con movimiento sobre γ con velocidad unitaria (figura 5). Claramente $\bar{k}(v) = \bar{k}(-v)$. Entonces también puede escribirse $k_n = k = \langle \bar{k}(v), N \rangle$. La función k_n está definida en el conjunto compacto S^1 formado por todas las posibles direcciones v en el plano tangente, por lo que k_n alcanza su máximo y su mínimo. Estos valores son llamados las *curvaturas principales* k_1 y k_2 de la superficie M en el punto p y las secciones normales γ_1 y γ_2 en las cuales los valores k_1 y k_2 son alcanzados son llamadas *secciones principales*.

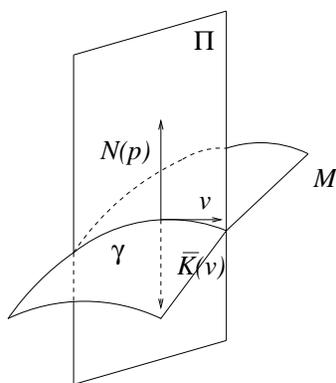


Figura 5. Vector $\bar{k}(v)$.

Definición 2. La curvatura media H de una superficie M en el punto $p \in M$ con respecto al vector normal $N(p)$ es el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

A continuación se dará una de las definiciones clásicas de superficie mínima que involucra a la definición anterior.

Definición 3. Una superficie M es llamada *mínima* si la curvatura media H tiene valor idénticamente cero en todos sus puntos.

1.2 Observaciones de Laplace y Gauss.

En un ensayo sobre capilaridad presentado a La Real Sociedad de Londres en 1805, Thomas Young introdujo la noción de *curvatura media* de una superficie. En el mismo trabajo, Young dió un razonamiento que justificaba por qué en ausencia de fricción en las paredes frontera, el fluido toca a éstas formando un ángulo constante, dependiendo sólo de los materiales y no de la forma de las paredes; al año siguiente, en 1806, Pierre Simon Laplace reintrodujo tal noción y derivó para ella una expresión analítica formal. A continuación será expuesta una versión con notación moderna, muy parecida a la introducida por Gauss, de tal derivación.

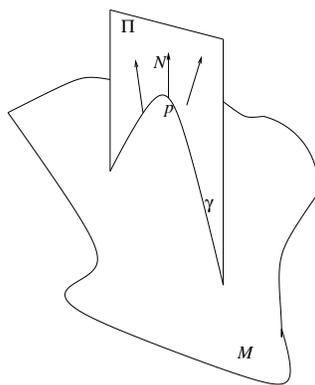


Figura 6. Sección normal de M en p .

Sea la superficie M orientada positivamente, parametrizada por $\mathbf{x} : U \rightarrow V$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ y $V \subset M$ conjuntos abiertos, y téngase en mente la construcción hecha en la sección anterior para las secciones normales. Sea Π un plano que pasa por el punto p y que contiene a $N(p)$. Tómese la sección normal γ contenida en Π (figura 6), y supóngase que γ está parametrizada por su longitud de arco s . Recuerdese la definición de n , $\ddot{\alpha}(s) = k(s)n(s)$; en este caso el vector normal a la curva γ coincide con el vector $N(s)$ normal a la superficie, se tiene $N(s) = n(s)$, por lo que, debido a las fórmulas de Frenet-Serret

$$\left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{dn}{ds} \right\rangle = \langle \dot{\mathbf{x}}, -k\dot{\mathbf{x}} - \tau b \rangle = -k.$$

Considérese la curvatura positiva cuando γ está “doblada” en la dirección de N (fig 5). Como M está orientada positivamente, $\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, N \rangle$ es positivo, por lo que la curva se “dobla” en la dirección de $-N(s)$, y por lo tanto

$$k = - \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle. \quad (1.2)$$

La parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de la superficie, determina la de γ :

$$\gamma(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s)).$$

Si se escribe

$$\dot{u} = \frac{du}{ds}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{ds}$$

$$e = -\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle, \quad 2f = -(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle), \quad g = -\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle, \quad (1.3)$$

(donde $\mathbf{x}_u = \frac{d\mathbf{x}}{du}$, $\mathbf{x}_v = \frac{d\mathbf{x}}{dv}$, $N_u = \frac{dN}{du}$ y $N_v = \frac{dN}{dv}$), y se sustituye en (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} k &= - \left\langle \left(\frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dv} \frac{dv}{ds} \right), \left(\frac{dN}{du} \frac{du}{ds} + \frac{dN}{dv} \frac{dv}{ds} \right) \right\rangle, \\ &= e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ahora, escribiendo

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = |\mathbf{x}_u|^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = |\mathbf{x}_v|^2. \quad (1.5)$$

Se observa que

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right|^2 = \left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\rangle, \\ &= \left\langle \left(\frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dv} \frac{dv}{ds} \right), \left(\frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dv} \frac{dv}{ds} \right) \right\rangle, \\ &= E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las cantidades E , F y G son los *coeficientes de la primera forma fundamental*, mientras que e , f y g son los *coeficientes de la segunda forma fundamental*. Es conveniente hacer algunos comentarios sobre estos últimos conceptos. El producto interior (punto) natural en \mathbb{R}^3 induce un producto interior en cada espacio tangente $T_p(M)$ de la superficie M , usualmente denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Claramente, el producto interior de dos vectores en $T_p(M)$ será el producto interior de éstos como vectores de \mathbb{R}^3 . A este producto interior le corresponde una *forma cuadrática* $I_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2.$$

Esta forma, definida positiva, es llamada *la primera forma fundamental*. Notemos que si ésta se calcula para vectores tangentes a una curva γ parametrizada por longitud de arco, se obtiene justamente la relación (1.6); por lo tanto, $I_p(w)$ no depende de la parametrización, pero sí del punto p . Los coeficientes proporcionan mucha información acerca de la geometría de la superficie. Por ejemplo, si el coeficiente $F(u, v) = 0$ para todo punto $(u, v) \in U$, entonces se puede concluir que los vectores de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ para el plano tangente, para \mathbf{x} , son mutuamente ortogonales, y que las *curvas coordenadas* (las curvas que se obtienen cuando se aplica \mathbf{x} a los puntos de la forma (u, v_0) y (u_0, v) , con u_0, v_0 constantes) de la parametrización lo son igualmente.

Retómese la superficie M con orientación N . Recuérdese que el mapeo $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por la relación (1.1), toma sus valores en la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Entonces, el mapeo $N : M \rightarrow S^2$ es conocido como el *mapeo de Gauss* de M . No es difícil probar que este mapeo es diferenciable y que la diferencial dN_p es un mapeo lineal de $T_p(M)$ en $T_{N(p)}(S^2)$. Como los planos $T_p(M)$ y $T_{N(p)}(S^2)$ son paralelos, puede pensarse que dN_p es un mapeo lineal de $T_p(M)$ en sí mismo. Es conveniente entender la manera en que opera $dN_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en M con $\alpha(0) = p$, considérese la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ en la esfera S^2 . Esta representa la restricción del vector normal N a la curva α . El vector tangente a $N(t)$ definido por $\dot{N}(0) = dN_p(\dot{\alpha}(0))$ pertenece al plano $T_p(M)$ y mide la razón de cambio del vector normal restringido a la curva α .

La forma cuadrática Π_p definida en $T_p(M)$ por $\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, es la *segunda forma fundamental* de M en p . Para dar una interpretación geométrica de este último concepto, considérese una curva α en M parametrizada por su longitud de arco y $\alpha(0) = p$.

Sea $N(s)$ el vector normal a M restringido a la curva $\alpha(s)$. Entonces $\langle N(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0$, por lo que

$$\frac{d}{ds} \langle N(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = \langle \dot{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle + \langle N(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle.$$

Y en consecuencia

$$\langle \dot{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = -\langle N(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle.$$

Aplicando la segunda forma fundamental al vector tangente $\dot{\alpha}(s)$ en el punto p se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_p(\dot{\alpha}(0)) &= -\langle dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle, \\ &= -\langle \dot{N}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle, \\ &= \langle N(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle, \\ &= \langle N, kn \rangle(p), \\ &= k_n(p). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Es decir, el valor de la segunda forma fundamental Π_p para un vector unitario $v \in Tp(M)$ es igual a la curvatura normal (la expresión 1.5 fué definida en la sección anterior) de una curva que pasa por p y es tangente a v .

Sea $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización de M en el punto p . Entonces, la curva α en M puede ser descrita bajo esta parametrización como $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}, \\ dN(\dot{\alpha}) &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) = N_u \dot{u} + N_v \dot{v}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Por otro lado, como N_u y N_v pertenecen a $T_p(M)$ ($dN_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$), puede escribirse

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Y en consecuencia

$$dN(\dot{\alpha}) = (a_{11}\dot{u} + a_{12}\dot{v})\mathbf{x}_u + (a_{21}\dot{u} + a_{22}\dot{v})\mathbf{x}_v.$$

O bien

$$dN \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Esto muestra que en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN está dado por la matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$.

Por otro lado, la segunda forma fundamental expresada en términos de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, está dada por (utilizando las ecuaciones (1.8))

$$\prod_p(\dot{\alpha}) = \langle dN(\dot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle = \langle N_u\dot{u} + N_v\dot{v}, \mathbf{x}_u\dot{u} + \mathbf{x}_v\dot{v} \rangle = e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2.$$

Resultando nuevamente la expresión (1.4). Es posible expresar los valores de a_{ij} en términos de los coeficientes e , f y g , utilizando las relaciones (1.9) y (1.5). Lo importante es que e , f y g pueden ser calculados si se conoce la parametrización de la superficie. Por ejemplo, para el caso $f = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$, tenemos $f = -\langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -(a_{11}F + a_{21}G)$; además $f = -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = -(a_{12}E + a_{22}F)$. Por tal motivo

$$\begin{aligned} f &= -(a_{11}F + a_{21}G) = -(a_{12}E + a_{22}F), \\ e &= -(a_{11}E + a_{21}F), \\ g &= -(a_{12}F + a_{22}G). \end{aligned}$$

En notación matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

O bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.12)$$

Donde $(\)^{-1}$ representa la matriz inversa.

Para calcular la curvatura media, considérese nuevamente el mapeo lineal dN_p . Por un resultado clásico del álgebra lineal, para cada $p \in M$ existe una *base ortonormal* (una base de vectores unitarios y ortogonales) $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(M)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ y $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$, con $k_1 \geq k_2$, y k_1, k_2 son los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, definida en el círculo unidad de $T_p(M)$. Calculando la segunda forma fundamental en estos vectores se obtiene

$$\Pi_p(e_1) = -\langle dN(e_1), e_1 \rangle = \langle k_1 e_1, e_1 \rangle = k_1,$$

y análogamente $\Pi_p(e_2) = -k_2$. Los valores k_1 y k_2 son justamente las curvaturas principales en p (vease 1.7). Recuérdese que las curvaturas principales son los valores máximo y mínimo de la curvatura normal k_n definida en el compacto S^1 de $T_p(M)$; es decir, son los valores máximo y mínimo de la segunda forma fundamental Π_p , restringida a el círculo unitario de $T_p(M)$ Tomando la orientación standard de S^2 . Resumiendo, estas curvaturas resultan ser los valores propios negativos del mapeo dN_p . Los vectores e_1 y e_2 son las *direcciones principales*. Entonces, k_1 y k_2 satisfacen la ecuación para k

$$dN_p(v) = -kv = -kIv, \quad v \in T_p(M), v \neq 0.$$

Donde I es la matriz identidad en \mathbb{R}^2 . El mapeo lineal $dN_p(v) + kIv$ no es invertible; por lo tanto, su determinante debe valer cero; es decir, de la relación (1.10) se tiene

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como k_1 y k_2 son raíces de esta última ecuación, por la definición 2

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-(a_{11} + a_{22})}{2}.$$

Utilizando la relación (1.12)

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}. \quad (1.13)$$

Esto demuestra que $2H = k_1 + k_2$ es un invariante geométrico; es decir, es invariante bajo isometrías y cambios de coordenadas. Laplace observó esta última propiedad y también tenía conocimiento de otros conceptos como las curvaturas principales, aunque el modo y la notación con que han sido expuestos aquí, son debidos a Gauss. Lo que motivó a Laplace para utilizar conceptos de la geometría de superficies, fue intentar clarificar conceptualmente y caracterizar cuantitativamente el levantamiento de líquidos en tubos *capilares*. Laplace probó (mediante un razonamiento de teoría de potencial) que el cambio de presión a lo largo de la superficie es proporcional al curvatura media; esto es, que las leyes de la Hidrostática, en este caso son $H = \frac{1}{2}\kappa u$ donde u es la altura de la superficie sobre el nivel correspondiente a la presión atmosférica y κ es una constante física, de este modo, la ecuación (1.13) se transforma en una ecuación diferencial para la superficie M . Para ilustrar esto último, supóngase cierto el resultado de Laplace y que la superficie M puede ser descrita como la gráfica de una función $z = u(x, y)$. El vector normal a la superficie descrita de este modo es justamente el gradiente

$$\text{grad}(z - u(x, y)) = \nabla(z - u(x, y)) = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El mapeo de Gauss requiere que el normal a la superficie sea unitario; por lo tanto para este caso $N = \frac{\nabla W}{|\nabla W|}$, con $W(x, y, z) = z - u(x, y)$. La parametrización está definida por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, u(x, y))$ por lo que

$$\mathbf{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}.$$

Estos últimos forman una base para el plano tangente $T_p(M)$. Entonces, $E = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle =$

$|\mathbf{x}_x|^2 = 1 + u_x^2$; F y G se obtienen análogamente. Por otro lado, observese que $\langle N, \mathbf{x}_x \rangle = 0$; derivando esta última relación con respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle N, \mathbf{x}_x \rangle = \langle N_x, \mathbf{x}_x \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{xx} \rangle = 0.$$

En consecuencia

$$e = -\langle N_x, \mathbf{x}_x \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{xx} \rangle = \begin{pmatrix} -u_x / \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \\ -u_y / \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \\ 1 / \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{xx} \end{pmatrix} = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}.$$

El símbolo “ \cdot ” denota el producto punto. Los coeficientes f y g se obtienen similarmente . Por lo tanto

$$\begin{aligned} E &= 1 + u_x^2, & F &= u_x u_y, & G &= 1 + u_y^2. \\ e &= \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, & f &= \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, & g &= \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ahora, utilizando (1.13), y sustituyendo la relaciones (1.14) se obtiene

$$2H = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy},$$

con

$$a = \frac{1 + u_y^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad b = \frac{-u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad c = \frac{1 + u_x^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entonces (bajo la suposición de que se cumple el resultado de Laplace), se obtiene la ecuación

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = \kappa u \tag{1.15}$$

para la altura u . Es importante notar que

$$ac - b^2 = \frac{(1 + u_y^2)(1 + u_x^2) - u_y^2 u_x^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^3} = \frac{1}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2} > 0,$$

para cualquier función $u(x, y)$, por lo que la ecuación (1.14) es, además de no lineal, de tipo elíptico.

Es difícil dar ejemplos explícitos de superficies mínimas, debido a la dificultad de encontrar soluciones explícitas a la ecuación (1.15). Para superficies con u_x y u_y pequeños, la condición de que ésta sea mínima es aproximadamente que $\Delta u = 0$; esta última es usualmente llamada *ecuación de Laplace* o simplemente *laplaciano*. Laplace observó que para este problema, el laplaciano no es adecuado para describir a las superficies que aparecen en casos reales. Recuérdese que debido a que conceptualmente es preferible la manera de Gauss para derivar todos los conceptos de esta sección, no se expondrá aquí el modo en que procedió Laplace. De cualquier modo, aun usando otra notación, lo importante es hacer notar sus observaciones.

A continuación se enunciará formalmente el resultado que engloba a estas observaciones.

Teorema 1. (Poisson-Laplace). Supongamos que una superficie diferenciable M de dimensión dos en \mathbb{R}^3 es la interface entre dos medios homogéneos en equilibrio. Sean P_1 y P_2 las *presiones en cada medio*. Entonces la curvatura media H de la superficie M es constante e igual $H = h(P_1 - P_2)$, donde la constante $\lambda = \frac{1}{h}$ es llamado *coeficiente de tensión superficial* y $P_1 - P_2$ es la diferencia entre las presiones del medio (la presión resultante).

En la siguiente sección, se estudiará con detalle la demostración de este último resultado, utilizando conceptos físicos, así como las propiedades geométricas que hasta ahora se han expuesto. Conviene ahora hablar un poco de fenómenos capilares. El término *capilar* se derivó del latín “*capillus*”, que significa cabello. Normalmente se usa la palabra *capilaridad* para referirse al levantamiento de líquidos en tubos estrechos. No fue sino hasta el siglo XVIII que se comprendió que este fenómeno, al igual que muchos otros, se manifiesta cuando dos materiales distintos se juntan, pero sin mezclarse. Si alguno de estos materiales es un fluido que forma con algún otro fluido (o gas) una superficie de interfase, entonces la interfase será llamada *superficie capilar*. Los intentos para explicar este tipo de fenómenos se remontan a Leonardo da Vinci, pero una teoría consistente y capaz de hacer predicciones, no apareció sino hasta principios del siglo XIX en los trabajos de Young y Laplace. Posteriormente, ésta fue puesta en una fundamentación mucho más sólida por Gauss en 1830 y se convirtió en el objeto más estudiado por las figuras científicas de ese siglo. La teoría de Gauss fue conceptualmente diferente. Su razonamien-

to se basó en el principio del *trabajo virtual*. El *trabajo* se define como la transferencia de energía de un objeto a otro por medio de una fuerza que actúa entre ellos, cuando el segundo es desplazado por ésta. El principio de trabajo virtual se basa en la suposición de que la energía de un sistema mecánico en equilibrio es invariante bajo desplazamientos muy pequeños de los sistemas de referencia en un tiempo dado, en los que puede considerarse que fuerzas que actúan no son significativas y que el trabajo es nulo. Tales desplazamientos son los llamados *desplazamientos virtuales*.

En las siguientes secciones se discutirán formalmente los conceptos de energía y trabajo, debido a que resulta muy conveniente pensar algunos conceptos matemáticos en estos términos.

1.3 Fenómenos de superficie.

1.3.1 Consideraciones Físicas.

Es generalmente aceptado que la *energía* es cierta cantidad escalar que un objeto (onda o partícula) posee. No es algo directamente observable, sin embargo en ciertos casos, es posible analizar el comportamiento de los objetos con cierta cantidad de energía. Para predecir el comportamiento de los objetos, se supone la conservación de la energía con el propósito de tener control sobre la energía total. La conservación de la energía no explica el modo en que la energía se transforma, sino que el total de ésta debe permanecer constante. El *trabajo* es la transferencia de energía entre objetos. Normalmente, no se necesita especificar la naturaleza de los objetos si la fuerza que efectúa el trabajo es conocida. Por ejemplo, si se empuja una caja, la fuerza que realiza el trabajo es el empujón que experimenta la caja, y el trabajo puede ser calculado sin tener conocimiento de quien empujó. En general, el trabajo puede ser calculado ya sea por la fuerza aplicada o por los cambios de energía involucrados.

Para dar una formulación del trabajo, obsérvese que el desplazamiento de un objeto debe ser paralelo a la fuerza que actúa. Si la fuerza aplicada es constante y está a un ángulo constante con respecto a el desplazamiento de longitud Δx , entonces

$$W = F \cos \theta \Delta x.$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores de fuerza y desplazamiento. Si se suman todas las pequeñas contribuciones en cierto intervalo $[r_1, r_2]$, entonces el trabajo realizado es la integral de línea sobre alguna curva c , sobre la cual se realiza el desplazamiento:

$$W = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cos \theta dr.$$

Si el producto punto es positivo (es decir, si el desplazamiento y la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento están en la misma dirección), entonces el trabajo es positivo y se agrega energía al objeto. Si el producto punto es negativo, el trabajo es negativo y se le resta energía al objeto. Esto no implica que se viola la conservación de la energía. Si se le suma energía al objeto, ésta viene de un segundo responsable de la fuerza usada en el cálculo del trabajo. La energía total de dos objetos es constante, y el trabajo realizado es solamente la transferencia de energía (igual al trabajo realizado) de un objeto a otro.

La *energía cinética* es una forma de energía asociada con el movimiento del objeto, esto es, con la magnitud de su velocidad lineal v o con su velocidad angular ω . En la mecánica clásica, la energía cinética de una partícula en movimiento está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

para la velocidad lineal. La *energía potencial* es la energía asociada con la posición relativa del objeto. También está asociada con la compresión o elongación de un resorte ideal $U = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el cambio en la longitud del resorte y k es la constante de elasticidad.

Si una fuerza externa realiza un trabajo en un sistema, el proceso es reversible y además el sistema regresa a su estado inicial de energía, el trabajo neto realizado es cero y se dice entonces que el sistema es conservativo. La energía del sistema es entonces independiente de cómo fue realizado el trabajo y depende sólo de los estados inicial y final del sistema. Si una fuerza es conservativa, entonces localmente tiene una energía potencial, es decir

$$F = -\nabla U.$$

Considérese ahora un fluido y supóngase que cada elemento de volumen en él es lo suficientemente pequeño para incluir un número grande de partículas; es decir, es un medio continuo. Cuando se hable de elementos de volumen, se entenderá que se consideran porciones con un volumen muy pequeño comparado con el volumen total del fluido.

Si se sumerge un cuerpo Ω , el fluido ejerce una fuerza de presión sobre la frontera del cuerpo, que será denotada por $\partial\Omega$. Tal fuerza es normal a la superficie y por lo tanto es de la forma $p(x, y, z)\vec{n}$, donde $p(x, y, z)$ es justamente la presión y \vec{n} es el vector normal unitario interior a Ω . Entonces, la fuerza sobre el cuerpo Ω está dada por

$$\iint_{\partial\Omega} p\vec{n} dS,$$

donde dS es el elemento de superficie del cuerpo. Esta última relación puede escribirse como

$$\iint_{\partial\Omega} p\vec{n} dS = \iint_{\partial\Omega} \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{n} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \right) dS,$$

donde $\vec{a}_j = p\vec{e}_j$. Supóngase que $p(x, y, z)$ está definido en todo Ω y no sólo en su frontera. Aplicando el Teorema de Gauss en cada coordenada se obtiene

$$\text{Fuerza} = - \iiint_{\Omega} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} dV = - \iiint_{\Omega} \nabla p dV.$$

Donde dV es el elemento de volumen y el signo negativo se debe a que se está considerando al vector normal interior.

Si se supone que actúan otras fuerzas sobre el cuerpo Ω , por ejemplo la fuerza de gravedad, entonces esta última estará dada por

$$\iiint_{\Omega} \rho G dV;$$

donde ρ es la densidad, $G = g\vec{e}_3$ es el campo gravitacional y g la constante de gravedad.

Si Ω está inmóvil, entonces existe un equilibrio de fuerzas entre la presión y la gravedad. Esto es expresado por

$$- \iiint_{\Omega} \nabla p dV + \iiint_{\Omega} \rho G dV = 0.$$

O bien

$$\iiint_{\Omega} (\rho G - \nabla p) dV = 0.$$

Como Ω es arbitrario,

$$\nabla p = \rho G.$$

Si el fluido está en movimiento con velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, entonces sobre cada partícula, por la segunda ley de Newton, se tiene

$$\rho G - \nabla p = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Llámense por comodidad v_1 , v_2 y v_3 a las coordenadas de la velocidad v . Claramente $v_1 = \dot{x}$, $v_2 = \dot{y}$ y $v_3 = \dot{z}$, si se toma al tiempo como parametro para la curva que describe una partícula de fluido. Entonces

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t), z(t), t) \\ v_2(x(t), y(t), z(t), t) \\ v_3(x(t), y(t), z(t), t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \cdot \mathbf{v} \\ \nabla v_2 \cdot \mathbf{v} \\ \nabla v_3 \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = G - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.16)$$

donde $(\mathbf{v}, \nabla) = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \cdot \mathbf{v} \\ \nabla v_2 \cdot \mathbf{v} \\ \nabla v_3 \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}$. Obsérvese que en todo este desarrollo no se han considerado fuerzas de viscosidad.

La ecuación (1.16) es la llamada *ecuación de Euler* y es la requerida para el estudio del movimiento de un fluido. Fue obtenida originalmente por L. Euler en 1755 y es una de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos.

Claramente, si no se considera la fuerza gravitacional, en la ecuación (1.16) sólo desaparece el término G . Para un fluido en reposo en un campo gravitacional, la ecuación de Euler toma la forma

$$\nabla p = \rho G. \quad (1.17)$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido; si no actúa alguna fuerza externa, la ecuación de equilibrio es simplemente $\nabla p = 0$; es decir p constante, por lo que la presión es la misma en todos los puntos del fluido.

1.3.2 Física de películas y burbujas de jabón.

El propósito ahora es estudiar el fenómeno que se presenta cuando una superficie orientada M separa a dos medios continuos, (en realidad, los medios están separados por una capa, pero ésta es tan delgada, que puede pensarse como una superficie). Ambos medios ejercen cierta presión sobre la superficie de separación; entonces la diferencia de presiones deberá determinar la forma de M . A continuación será modelada esta situación.

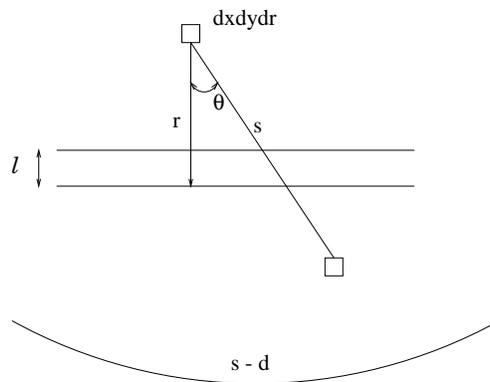


Figura 7.

Supóngase que se tienen dos cuerpos semi-infinitos de cierto líquido con apariencia plana separados por vapor a una cierta distancia l (figura 7) y tómesese un elemento de volumen en cada uno. Tómesese como primer cuerpo el de arriba; éste está a una altura r sobre el cuerpo inferior y su volumen es $dx dy dr$. El segundo es el cuerpo inferior y su volumen es $s^2 \sin \theta ds d\theta d\phi$, tomando como origen de coordenadas al primer elemento de volumen, por lo que

$$\begin{aligned} x &= s \sin \theta \sin \phi \\ y &= s \sin \theta \cos \phi \\ r &= s \cos \theta. \end{aligned}$$

Sea $f(s)$ la fuerza de interacción entre dos moléculas que están a una distancia s y

supóngase que fuera de un radio d ya no existe tal interacción. Claramente, la fuerza que actúa es la de atracción, por lo que

$$f(s) < 0 \quad \text{para } s < d, \quad f(s) = 0 \quad \text{para } s \geq d. \quad (1.18)$$

Sea ρ el la densidad de moléculas en ambos cuerpos. La componente vertical de la fuerza entre los dos elementos de volumen es

$$\rho dx dy dr \rho s^2 \sin \theta ds d\theta d\phi f(s) \cos \theta.$$

La fuerza total de atracción por unidad de área debe ser una cantidad positiva. Si r y s son fijos, el valor máximo de θ es aquel para el cual $\cos(\theta_m) = r/s$ (figura 8). Por lo tanto

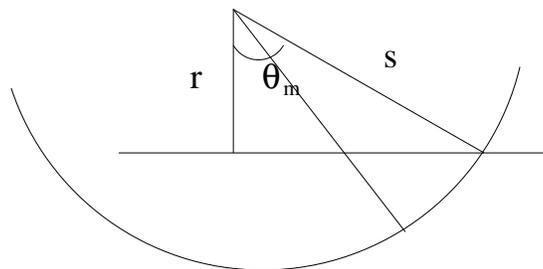


Figura 8.

$$\begin{aligned} F(l) &= -\rho^2 \int_l^d \int_r^d \int_0^{\cos^{-1}(r/s)} \int_0^{2\pi} (s^2 f(s) \sin \theta \cos \theta) d\phi d\theta ds dr \\ &= -\rho^2 \int_l^d \int_r^d \int_0^{2\pi} s^2 f(s) \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta) \Big|_0^{\cos^{-1} r/s} d\phi ds dr \\ &= \frac{-\rho^2}{2} \int_l^d \int_r^d \int_0^{2\pi} s^2 f(s) (1 - (r/s)^2) d\phi ds dr \\ &= \frac{-\rho^2}{2} \int_l^d \int_r^d \int_0^{2\pi} f(s) (s^2 - r^2) d\phi ds dr \\ &= -\rho^2 \pi \int_l^d \int_r^d f(s) (s^2 - r^2) ds dr. \end{aligned}$$

Sea $u(s)$ el potencial de la fuerza intermolecular. Entonces

$$u(s) = \int_s^d f(\tau) d\tau \quad \text{ó} \quad \frac{du}{ds} = -f(s) \quad \text{con} \quad u(s) = 0 \quad \text{para} \quad s \geq d.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} F(l) &= \rho^2 \pi \int_l^d \int_r^d \frac{du}{ds} (s^2 - r^2) ds dr \\ &= \rho^2 \pi \int_l^d \left(u(s) (s^2 - r^2)_r^d - \int_r^d u(s) 2s ds \right) dr \\ &= -2\rho^2 \pi \int_l^d \int_r^d s u(s) ds dr. \end{aligned}$$

Integrando por partes nuevamente

$$\begin{aligned} F(l) &= -2\pi\rho^2 \left[\left(r \int_r^d s u(s) ds \right)_l^d + \int_l^d r^2 u(r) dr \right] \\ &= -2\pi\rho^2 \left[-l \int_l^d s u(s) ds + \int_l^d r^2 u(r) dr \right] \\ &= -2\pi\rho^2 \int_l^d r u(r) (r - l) dr. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$F(0) = -2\pi\rho^2 \int_0^d r^2 u(r) dr = -\frac{\rho^2}{2} \int_0^d u(r) 4\pi r^2 dr,$$

obsérvese que $4\pi r^2 dr$ es un elemento de volumen, por lo que puede escribirse $d\mathbf{r} = 4\pi r^2 dr$ y por lo tanto se tiene la integral de volumen

$$F(0) = -\frac{\rho^2}{2} \int_{B_d(p)} u(r) dr,$$

donde p es un punto ubicado como en la figura 9. La *presión interna de Laplace* está definida por $K = F(0)$ y es positiva definida debido a que $u(r)$ es negativo o cero para todo r .

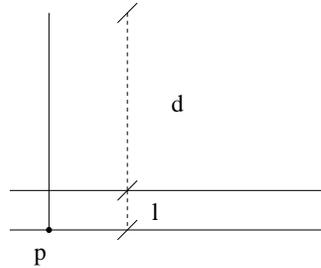


Figura 9.

Por definición, el trabajo realizado para alcanzar una separación d es

$$\begin{aligned} H &= \int_0^d F(l) dl = \int_0^d \left[-2\pi\rho^2 \int_l^d r u(r)(r-l) dr \right] dl \\ &= \left(-2\pi\rho^2 l \int_l^d r u(r)(r-l) dr \right)_0^d + \int_0^d 2\pi\rho^2 l \int_l^d r u(r) dr \\ &= \left(2\pi\rho^2 \frac{l^2}{2} \int_l^d r^2 u(r) dr \right)_0^d - \int_l^d 2\pi\rho^2 \frac{l^2}{2} u(l) l dl. \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$H = -\pi\rho^2 \int_l^d l^3 u(l) dl.$$

La separación produce dos superficies libres; en consecuencia, el trabajo realizado para separarlas puede igualarse con el doble de la energía superficial por unidad de área, que es justamente la tensión superficial σ ; es decir

$$\sigma = \frac{1}{2}H = - \int_{B_d(p)} r u(r) d\mathbf{r} \quad (1.19)$$

Como ambas superficies están constituidas de líquido, existe un fenómeno de cohesión; esto es, para cada punto en el fluido existe una densidad de energía de cohesión ϕ , que es la razón $\frac{\delta U}{\delta V}$, donde δU es la energía interna de cierta porción de fluido que contiene al punto en cuestión. Para el modelo molecular normalmente se acostumbra tomar ϕ como

$$\phi(p) = \rho^2 \int_{B_d(p)} u(r) d\mathbf{r},$$

y por lo tanto

$$2\phi = \rho^2 \int u(r) d\mathbf{r}, \quad (1.20)$$

a 2ϕ se le llama el *potencial de Rayleigh* y fue introducido en el estudio de la presión interna de una superficie líquida curvada. Si se calcula la diferencia de potencial entre un punto $2p_s$ sobre la superficie plana del líquido y en un punto $2p_i$ en su interior, de tal forma que $B_d(p)$ esté totalmente contenida en el fluido (figura 10a), es posible identificar la K de Laplace con tal diferencia de potencial mediante $\phi_s = \frac{1}{2}\phi_i$. Entonces

$$2\phi_s - 2\phi_i = -\phi_i = -2\pi\rho^2 \int_0^d r^2 u(r) dr = K. \quad (1.21)$$

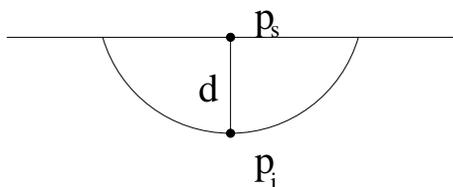


Figura 10a.

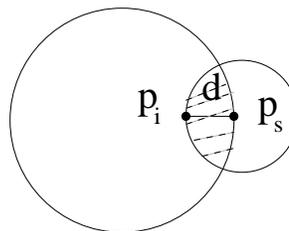


Figura 10b.

Si se considera ahora una gota de radio $R > d$ (figura 10b), la integración para ϕ_i es idéntica a la del caso anterior, mientras que para el ϕ_s debe ser tomada sobre un volumen

más restringido debido a la curvatura de la superficie. Si θ es el ángulo entre el vector \mathbf{r} y un radio fijo \mathbf{R} , entonces

$$\begin{aligned}\phi_s &= \pi \rho^2 \int_0^d \left[\int_0^{\cos^{-1}(r/2R)} r^2 u(r) \sin \theta dr \right] d\theta \\ &= \pi \rho^2 \int_0^d r^2 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) u(r) dr,\end{aligned}$$

Donde el límite de integración $\cos^{-1}(r/2R)$ resulta de integrar la región sombreada en la figura 10b. En consecuencia, la presión interna de la gota es

$$2\phi_s - 2\phi_i = K + H/R = K + 2\sigma/R,$$

con H como en (1.19). Si se toma una gota no esférica sino una con superficie convexa, aproximando secciones curvas por secciones circulares, se obtiene

$$2\phi_s - 2\phi_i = K + H/R = K + \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right], \quad (1.22)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de las curvaturas principales de la superficie. Escribiendo (1.22) en la forma

$$p_1 - p_2 = h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.23)$$

se obtiene la llamada *ecuación de Laplace*, que modela la presión superficial. Tal ecuación se refiere a la diferencia de presiones entre el líquido contenido en una burbuja esférica (o no necesariamente) y el gas afuera, pues la presión externa coincide con la presión sobre una superficie plana; para efectos del cálculo, es indistinto si la superficie es esférica o plana, pues el potencial se anula fuera de $B_d(p_e)$ (figura 11). La ecuación de Laplace prueba el teorema 1. Obsérvese que si R_1 y R_2 son positivos, entonces $p_1 - p_2$ es positivo; esto significa que la presión interna es mayor en una gota convexa que en una con superficie plana. Si $R_1 = R_2 = \infty$; es decir, si la superficie de separación es plana, la presión

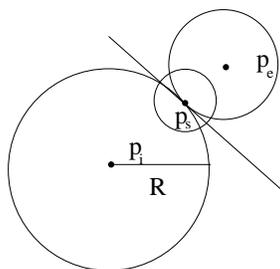


Figura 11.

es la misma en ambos medios. Estas últimas observaciones fundamentan la *teoría de capilaridad de Laplace*.

El siguiente paso es investigar el equilibrio mecánico de dos medios contiguos utilizando la fórmula (1.23). Si se supone que no actúan fuerzas externas en la superficie de separación o en ninguno de los dos medios, entonces la presión es constante en cada medio. La ecuación de equilibrio para este caso es

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante} \quad (1.24)$$

De este modo, la suma de las curvaturas tendrá que ser constante sobre una superficie de separación libre de fuerzas externas. La condición (1.24) significa que M debe ser esférica (como la superficie de una gota pequeña, para la cual el efecto de la gravedad puede ser despreciado). Sin embargo, si la superficie está fija a lo largo de una curva (una película de líquido en un marco sólido), su forma es menos simple.

Cuando la condición (1.24) es aplicada a películas delgadas sostenidas por un marco sólido, la constante a la derecha debe tener valor cero, debido a que en este caso, M separa a dos medios iguales. La suma $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ debe tener el mismo valor en todos los puntos de la superficie, por lo que las curvaturas principales tendrán signos opuestos; en consecuencia, si hacia un medio la superficie es cóncava, entonces hacia el otro será convexa, y el radio de curvatura, salvo el signo, es el mismo en ambos casos. De este modo, la condición de equilibrio para una película delgada es

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \quad (1.25)$$

En caso de considerarse un medio en un campo gravitacional, conviene suponer por simplicidad que alguno de los medios es simplemente la atmósfera (cuya presión puede ser considerada constante en sobre toda la superficie), y el otro un fluido incompresible.

Si p_2 es la presión atmosférica, entonces está es constante, mientras que para determinar p_1 , la presión del fluido, usando la relación (1.17) (deducida en la sección anterior), y tomando el eje z en la dirección vertical, se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

En consecuencia

$$p = -\rho g z + \text{constante.}$$

De este modo, la condición de equilibrio se transforma en

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g z}{h} = \text{constante.} \quad (1.26)$$

□

Es usualmente conveniente utilizar la condición de equilibrio no en la forma (1.26), sino resolviendo el problema variacional de minimizar la energía libre total. Para un estudio detallado de esta resolución, se recomienda consultar [12].

1.4 Ecuación de difusión y funcional de energía.

Si en un medio físico hay un fluido de modo tal que éste no cubra el medio uniformemente, entonces habrá un fenómeno de *difusión* del fluido de los lugares con mayor a los de menor concentración. Si se piensa ahora en el proceso de difusión en un tubo vacío, bajo la suposición de que en todo instante la concentración del fluido es la misma en cada sección del tubo, entonces este fenómeno puede ser descrito mediante una función $u(x, t)$ que representará la concentración de sustancia en el corte x y en el instante de tiempo t .

De acuerdo con la *ley de Nernst*, la masa del fluido que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t + \delta t)$ es

$$\delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S \delta t = W S dt,$$

con $W = -D \frac{\partial u}{\partial x}$, donde D es el coeficiente de difusión, S la superficie de el corte del tubo. En consecuencia, $W(x, t)$ es la densidad del flujo de difusión, esto es, la masa de gas que pasa por unidad de superficie por unidad de tiempo.

Por definición de concentración, la masa de gas en el volumen V es igual a

$$Q = uV.$$

Por lo que, la variación de masa del gas en el segmento del tubo (x_1, x_2) al variar la concentración en δu , es igual a

$$\delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \delta u \cdot S dx.$$

Donde $c(x)$ es el *coeficiente de porosidad*, definido como el cociente del volumen de los poros entre el volumen total V_0 , igual, en este caso, a $S dx$.

Para escribir la ecuación de equilibrio de la masa del gas en el segmento (x_1, x_2) durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) , obsérvese que la cantidad de masa del gas que sale del tubo por x_2 es la misma que entra por x_1 , menos el cambio neto de masa en $[x_1, x_2]$ entre $t = t_1$ y $t = t_2$

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau = S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi.$$

Esta última relación es llamada *ecuación de difusión* en forma integral. Para encontrar la ecuación de difusión en forma diferencial, es necesario suponer que la función $u(x, t)$ tiene derivadas u_{xx} y u_t y que son continuas. Aplicando el teorema del valor medio para integrales se obtiene

$$S \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right]_{\tau=t_3} (t_2 - t_1) = S \left[c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] \right]_{\xi=x_3} (x_2 - x_1).$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, ahora para derivadas

$$S \frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{\substack{x=x_4 \\ t=t_3}} (t_2 - t_1)(x_2 - x_1) = S \left[c(x) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_4}} (t_2 - t_1)(x_2 - x_1).$$

Con t_3, t_4, x_3 y x_4 puntos intermedios en los intervalos (t_1, t_2) y (x_1, x_2) respectivamente.

Por lo tanto, simplificando la expresión

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{\substack{x=x_4 \\ t=t_3}} = \left[c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_4}}.$$

Observese que este razonamiento puede ser aplicado a cualesquiera intervalos.

Finalmente, tomando los límites cuando $x_1, x_2 \rightarrow x$ y $t_1, t_2 \rightarrow t$ se obtiene la *ecuación de difusión*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t). \quad (1.27)$$

Nótese que en la deducción, se ha supuesto ausencia de fuentes de sustancia y de difusión a través de las paredes del tubo.

Si el coeficiente de difusión y la porosidad son constantes, la ecuación (1.27) toma la forma

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Donde $a^2 = \frac{D}{c}$. Finalmente, si el coeficiente de porosidad c es igual a 1 y entonces la relación (1.27) es de la forma

$$u_t = D u_{xx}.$$

Si se quiere obtener ahora la *ecuación de conducción de calor*, la deducción de ésta puede ser hecha de modo análogo a nuestro razonamiento, a partir de las consideraciones físicas adecuadas. La ecuación que se obtiene es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t). \quad (1.28)$$

Donde c es el calor específico, ρ la densidad y $F(x, t)$ la densidad de las fuentes térmicas en el punto x al tiempo t para una barra homogénea de longitud l .

Obsérvese que las ecuaciones (1.27) y (1.28) son muy parecidas; de hecho, consideraciones de fenómenos parecidos a éstos arrojan ecuaciones similares.

El interés en estudiar fenómenos de difusión se debe a que éstos pueden ser relacionados con el problema de superficies mínimas. Por ejemplo, un problema físico en el que las superficies mínimas juegan un papel central, pero en el que aparecen de manera menos directa que para las burbujas y películas de jabón, es el estudio de algunos sistemas llamados de reacción y difusión. Como se verá mas adelante, estos sistemas se usan para modelar diversos fenómenos como Transiciones de fase y Formación de patrones.

Para entender el proceso de difusión en el espacio, es necesario discutir antes una importante ecuación llamada *ley de conservación de momento*. Para su deducción, considérese la cantidad de fluido que atraviesa cierto elemento de superficie ΔS en el intervalo de tiempo Δt . Si \mathbf{v} es la velocidad en cada punto del fluido, puede pensarse que \mathbf{v} es prácticamente constante sobre ΔS . Entonces, la cantidad de fluido que atraviesa a ΔS en Δt , es igual a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$, y la masa de éste es $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$. Por lo tanto, para cierto volumen V sumergido en el fluido y delimitado por la superficie S , la masa de flujo que sale de V en un intervalo de tiempo de longitud Δt es

$$\left(\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \right) \Delta t.$$

Aplicando el Teorema de Gauss (o de la divergencia), esta última integral es igual a

$$\begin{aligned} \left(\iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz \right) \Delta t &= M(t) - M(t + \Delta t) \\ &= \iiint_V (\rho(x, y, z, t) - \rho(x, y, z, t + \Delta t)) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

donde ρ es la función de densidad y en la primera igualdad se ha supuesto que no se crea ni se destruye la masa. Obsérvese que

$$\iiint_V (\rho(x, y, z, t) - \rho(x, y, z, t + \Delta t)) \, dx \, dy \, dz \approx \left(\iiint_V -\rho_t(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz \right) \Delta t,$$

y por lo tanto, puede escribirse, tomando límites cuando $\delta t \rightarrow 0$,

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz = - \iiint_V \rho_t(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz.$$

En consecuencia

$$\iiint_V [\rho_t(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})] dx dy dz = 0,$$

para todo cuerpo V en el fluido. Finalmente, como esta última relación es válida para todo volumen V y suponiendo el integrando continuo,

$$\rho_t(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Esta última relación es la *ecuación de conservación de masa* para fluidos. Obsérvese que ésta se ha deducido a partir de la ley de conservación, por lo que la misma ecuación puede ser usada para modelar otros fenómenos; por ejemplo, en electromagnetismo, es la *ecuación de conservación de carga*. En contextos más generales, ésta es conocida simplemente como *ecuación de conservación*.

En general, el fenómeno de difusión en el espacio está caracterizado por una función $u(x, y, z, t)$, que representa la concentración (temperatura, densidad, según sea el caso). Si $u(x, y, z, t)$ no es constante, entonces se da lugar a el fenómeno de difusión (en el caso de la propagación de calor, u representa la temperatura y si ésta no es constante, se presentan flujos térmicos de los lugares de mayor a los de menor temperatura). Para el caso general, la ley de conservación de masa se escribe como

$$\iiint_V u_t(x, y, z, t) dx dy dz = - \iint_S \mathcal{V} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.29)$$

O bien,

$$u_t(x, y, z, t) + \operatorname{div} \mathcal{V} = 0, \quad (1.30)$$

donde $\mathcal{V} = uv$.

Por otro lado, para ciertos procesos de difusión, la función de concentración $u(x, y, z, t)$ cumple con la *ley de Fourier*, es decir

$$\mathcal{V}_n dS = (\mathcal{V} \cdot \mathbf{n}) ds = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

donde k es una constante positiva (por ejemplo, el coeficiente de conductividad térmica en el caso de conducción de calor), y $\frac{\partial u}{\partial n}$ la derivada normal de u , definida por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Normalmente, la ley de Fourier se escribe como

$$\mathcal{V} = -k\nabla u. \quad (1.31)$$

\mathcal{V} es el vector de densidad de flujo. Es importante señalar que k es un escalar sólo en caso de que el medio sea *isótropo*; pero si el medio no lo es, entonces k es un tensor (matriz de 3×3), y el vector de densidad de flujo \mathcal{V} es el producto del tensor k por el vector $-\nabla u$. Aquí solo serán considerados medios isótropos. La relación (1.31) también es conocida como *ley de Fick*¹, cuando k es un escalar positivo.

Tómese nuevamente el volumen V limitado por la superficie S y supóngase que la densidad $u(x, y, z, t)$ cumple con la ley (1.31) y que existen fuentes de flujo dentro de V . La ecuación de equilibrio de flujo para el volumen V durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, debido a la ley de conservación (1.29), es de la forma

$$\begin{aligned} \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz &= \int_{t_1}^{t_2} \left[- \iint_S \mathcal{V} \cdot \mathbf{n} ds + \iiint_V F dx dy dz \right] dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[- \iiint_V \operatorname{div} \mathcal{V} dx dy dz + \iiint_V F dx dy dz \right] dt, \end{aligned}$$

donde $F = F(x, y, z, t)$ es la densidad de las fuentes (por ejemplo, en el caso de la conducción de calor, F es la densidad de fuentes térmicas dentro de el volumen V). Procediendo de modo totalmente análogo al caso de la ley de conservación de masa, se obtiene

¹Adolf Fick (1829-1901), fisiólogo alemán. Propuso la ley que lleva su nombre en 1855 para modelar la densidad de corriente de partículas en una sustancia homogénea cuyas partículas están esencialmente fijas.

$$u_t(x, y, z, t) + \operatorname{div} \mathcal{V} - F(x, y, z, t) = 0.$$

O bien

$$u_t(x, y, z, t) = k\Delta u + F(x, y, z, t). \quad (1.32)$$

Ahora obsérvese lo siguiente. Si se multiplica la ecuación (1.32) por la función u , y posteriormente se integra sobre todo V , se tiene

$$\iiint_V uu_t \, dx \, dy \, dz - \iiint_V ku\Delta u \, dx \, dy \, dz = \iiint_V uF \, dx \, dy \, dz.$$

Como $u\Delta u = uu_{xx} + uu_{yy} + uu_{zz} = \frac{d}{dx}(uu_x) + \frac{d}{dy}(uu_y) + \frac{d}{dz}(uu_z) - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = \operatorname{div}(u\nabla u) - |\nabla u|^2$, entonces

$$\iiint_V \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) \, dx \, dy \, dz - \iiint_V k[\operatorname{div}(u\nabla u) - |\nabla u|^2] \, dx \, dy \, dz = \iiint_V uF \, dx \, dy \, dz.$$

Por el teorema de la divergencia

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \iiint_V u^2 \, dx \, dy \, dz \right] + \iiint_V k|\nabla u|^2 \, dx \, dy \, dz - \iint_S ku \frac{\partial u}{\partial n} \, dx \, dy = \iiint_V uF \, dx \, dy \, dz.$$

Si se tiene que $u = 0$ ó $\frac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial V = S$, y además no existen fuentes de masa, entonces

$$\iiint_V \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + k|\nabla u|^2 \right\} \, dx \, dy \, dz = 0.$$

El lado izquierdo de esta última relación es *la energía del sistema*. La función $I(u) = \iiint_V \left(\frac{u^2}{2} \right) \, dx \, dy \, dz$ es la *integral de energía* para (1.32).

Supóngase que las funciones u son estacionarias (independientes del tiempo), y que se tiene un fenómeno de difusión lenta en el que se sigue satisfaciendo la ley de Fick. Entonces, la relación (1.31) será de la forma $\mathcal{V} = -\frac{\varepsilon}{2}\nabla u$, con $\varepsilon > 0$. Durante la difusión, se

llevan a cabo reacciones químicas. Si se toman en cuenta estas reacciones en la modelación del fenómeno, éstas pueden ser introducidas mediante la relación $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{du}[W]$, llamada *reacción rápida*. Por lo tanto, la energía del sistema es

$$\iiint_V \left\{ \frac{W(u)}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 \right\} dx dy dz.$$

La energía del sistema depende de la función u . Denótese como $E(u)$ a la energía del sistema para la distribución u . Por lo tanto, puede escribirse

$$E(u) = \iiint_V \left\{ \frac{W(u)}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 \right\} dx dy dz.$$

$E(u)$ es el *funcional de energía*.

Para más dimensiones, $E(u)$ tiene exactamente la misma forma.

Si el proceso tiene lugar en un dominio regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, la energía total en Ω

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} dx,$$

u es ahora una función de las variables espaciales $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. Este último funcional de energía es justamente el que será estudiado en este trabajo. Específicamente, se estudiarán las características de los estados de equilibrio cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para funciones W que son potenciales biestables (con un comportamiento biestable o de “doble pozo” como en la figura 12, para el caso unidimensional), con mínimos locales en $u = \pm 1$, $W(\pm 1) = 0$ y $W \geq 0$.

Es conveniente escribir el funcional de energía en la forma

$$E_{\varepsilon}(u) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} dx. \quad (1.33)$$

Supóngase que $\varepsilon \approx 0$, y que se tiene una colección u^{ε} con $E_{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) \leq M$. Para controlar el segundo término de $E_{\varepsilon}(u)$ es necesario que $u \approx \pm 1$, excepto quizás, en un conjunto de medida pequeña. Por otro lado, si la transición de +1 a -1 se da sobre una hipersuperficie (superficie de codimensión uno), ésta arrojará una contribución a la energía por unidad de área al término gradiente. Esto último hace suponer que $E_{\varepsilon}(u)$ debe tener valor muy

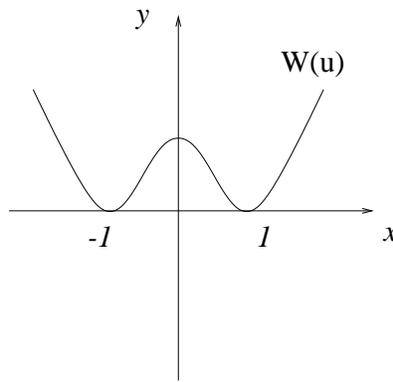


Figura 12. Potencial biestable, caso $n = 1$.

cercano al área de la región de transición. Por lo tanto, para $\varepsilon \approx 0$, al minimizar (1.33), se estará minimizando el área de transición; en consecuencia, la transición se dará en conjuntos muy parecidos a las superficies mínimas (ver el problema de área de una superficie del cap.2). En la figura 13, A_ε representa las regiones en Ω en las que $u = \pm 1$, mientras que B_ε es la región de transición.

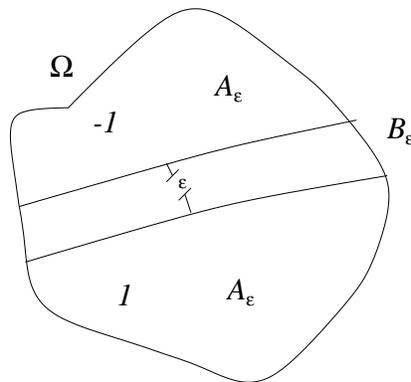


Figura 13.

Funcionales similares a (1.33) para $\varepsilon \approx 0$, aparecen en una gran variedad de aplicaciones, tales como transiciones de fase y formación de patrones, y han sido estudiados exhaustivamente en los últimos diez años.

1.5 Transiciones de fase.

Consideremos ahora un problema que sirve como motivación directa al que aquí nos interesa. En un artículo clásico, J. D. Van der Waals consideró fluidos cuya energía libre a temperatura constante no sólo está determinada por la densidad, sino también por el

gradiente de la densidad. Posteriormente, J. W. Cahn y J. E. Hilliard revisaron tal artículo y tomaron lo que consideraron esencial de la teoría de Van der Waals y usando esto obtuvieron resultados importantes relacionados con el cambio de energía entre fases. A partir de entonces, el estudio de gradientes ha sido considerado para analizar transiciones de fase y otros fenómenos físicos.

En la teoría de Van der Waals, la energía de un contenedor en una sección transversal de $x = -L$ a $x = L$ es

$$E_\varepsilon(\rho) = \int_{-L}^L [W(\rho(x)) + \varepsilon^2 \rho'(x)^2] dx$$

Donde $\rho(x)$ es la densidad del fluido, $W(\rho)$ es la energía libre por unidad de volumen, y ε es un parámetro pequeño. Si la masa total en el contenedor es M_0 , entonces se tiene la restricción adicional

$$\int_{-L}^L \rho(x) dx = M_0$$

Van der Waals propone que las configuraciones estables del fluido son las que minimizan la energía sujetas a la restricción anterior.

Este problema puede ser planteado con métodos directos de cálculo de variaciones y teoría elemental de regularidad para encontrar soluciones (no necesariamente únicas), variando los términos en el funcional. No será desarrollado este trabajo aquí. La intención es únicamente mostrar la similitud de éste con el problema de difusión en el que aparece el funcional de energía (1.33).

1.6 Formación de Patrones.

Uno de los problemas más importantes en Biología, que ha sido objeto de un extenso estudio en los últimos años, es el de la diferenciación celular, y estrechamente relacionados con éste, los problemas de morfogénesis y formación de patrones. Para atacar este problema es necesario recurrir a la información genética del organismo, pero los genes no pueden explicar directamente por sí solos las diferencias en diferentes partes del organismo puesto que puede suponerse que el material genético en la mayoría de las células es el mismo.

Si se quiere construir una teoría del desarrollo, es necesario hacer varias observaciones. El desarrollo es una alteración en el tiempo; si se supone que el desarrollo está controlado

por alguna substancia, entonces la teoría tendrá que describir los cambios de concentración de substancias como una función de otras sustancias y del tiempo.

Si se piensa en las interacciones más simples posibles para obtener un patrón estable, la suposición más sencilla que puede hacerse acerca de la dispersión de moléculas es que el decaimiento es proporcional al número de éstas, es decir

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\mu a.$$

Supóngase que la “comunicación” entre células se efectúa por un proceso de difusión y pensemos el modelo para una dimensión. Denotemos la posición de una célula por c , con c un número entero, y dos vecinos por $c - 1$ y $c + 1$. Si las concentraciones son a_c , a_{c+1} y a_{c-1} . El intercambio neto de “información” entre dos células vecinas a_c y a_{c-1} , está dado por

$$a_{c-1} - a_c.$$

La pérdida o ganancia de la célula, tomando en cuenta sólo a las células vecinas está dada por

$$D_a((a_{c+1} - a_c) + (a_{c-1} - a_c)),$$

Donde D_a es la constante de difusión. Si se cumple la ley de Fick (1.31) y la ley de conservación de masa, entonces el intercambio neto es nulo. Si además se tiene que el espacio es continuo y no existe separación entre las células, entonces la difusión está dada por

$$D_a \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Los términos importantes para las reacciones de formación de patrones son los de la producción como función de otras sustancias involucradas, bajo las suposiciones de modos de decaimiento y redistribución que hasta ahora se han hecho. Considérese el siguiente ejemplo

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{ca^2}{h} - \mu a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = ca^2 - \nu h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (1.35)$$

Donde a es un *activador* (sustancia que estimula la producción de otra sustancia ó de ella misma) y h un *inhibidor* (sustancia que inhibe la producción de sustancia). Si se supone que la concentración de inhibidor es constante (igual a uno), la distribución de activador es uniforme (sin cambio por difusión), y se hacen las constantes c , μ y ν iguales a uno, entonces la ecuación (1.34) se transforma en

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a^2 - a.$$

En $a = 1$, $(\partial a / \partial t) = 0$, por lo que se tiene un estado de equilibrio. Si a es mucho más grande que uno, $a^2 - a$ es positivo y cada vez más grande si los valores de a aumentan; en consecuencia, el equilibrio es inestable.

Obsérvese ahora la ecuación (1.34). La concentración de inhibidor está controlada unicamente por la concentración de activador presente en el sistema. Si $(\partial h / \partial t) = 0$, entonces la concentración de inhibidor tendrá que ser $h = a^2$. Insertando ésto en (1.34) se tiene

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{a^2}{a^2} - a = 1 - a.$$

Obteniendo nuevamente un equilibrio en $a = 1$. Si a es más grande que 1, $\partial a / \partial t$ es negativo; en consecuencia el equilibrio es estable.

De este modo, se han encontrado los dos casos extremos, estabilidad ó inestabilidad dependiendo de la concentración de inhibidor en el sistema. Claro está, ésto ha sido encontrado bajo el supuesto de que no hay cambios espaciales.

Tómense ahora las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \rho \frac{a^2}{h(1+ka)^2} - \mu a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \rho \rho_0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \rho' a^2 - \nu h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho_1. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones permiten una descripción teórica de sistemas biológicos reales. Aquí ρ_0 es la producción básica de activador, ρ_1 es la producción básica de inhibidor, ρ denota

la densidad de sustancia. El término $\frac{a^2}{h(1+ka)^2}$ es un regulador en caso de saturación de producción de activador. No serán tratados en detalle estos problemas. Lo que interesa es hacer notar que en éstos, normalmente se plantean y estudian ecuaciones muy similares a las relaciones (1.34) y (1.35), (casos particulares de las relaciones (1.27) y (1.28)), deducidas para los fenómenos de difusión y propagación de calor respectivamente. Obsérvese que tanto en las últimas ecuaciones como en (1.34) y (1.35), no importando cuales hayan sido las suposiciones, la modelación consiste esencialmente en estudiar ligeras variaciones de la ecuación de difusión. Las modelaciones en este tipo de problemas también pueden hacerse en algunos casos, a partir del planteamiento de un funcional de energía, y tratar de explicar los patrones de difusión a través del estudio de las transiciones de fase de los puntos críticos de tal funcional.

Capítulo 2

Casos particulares.

2.1 Cálculo en Espacios de Funciones.

Para entrar en materia, es necesario conocer algunos resultados de la teoría de cálculo variacional para funcionales en espacios de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Un *Espacio de Funciones* X es un conjunto de funciones que es un espacio vectorial; es decir, si $f, g \in X$ entonces $f + g \in X$ y $\alpha f \in X$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Para precisar, tómesese el conjunto de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables denotado por $C^1[a, b]$. En general, los conjuntos $C^n[a, b]$ denotarán espacios de funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$ que son n veces continuamente diferenciables. Claramente, todos estos conjuntos son espacios de funciones. Si estos conjuntos tienen además definida una *norma* $\|f\|$, entonces son llamados *Espacios Normados*. Es posible igualmente definir un *producto escalar* (f, g) para espacios de funciones, pidiendo a éste que cumpla con las propiedades conocidas del producto punto para espacios Euclidianos. Una vez habiendo definido la métrica en el espacio X , pueden ser definidos mapeos continuos entre espacios de funciones. Estos mapeos serán llamados *funcionales*. No nos detendremos en estas cuestiones por el momento. En el Apéndice sobre *Espacios de Sobolev* justificaremos lo que aquí se presenta. La intención es más bien hablar de operadores lineales entre espacios de funciones. Sea $L : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo entre dos espacios de funciones X y Y ; L es un *Operador Lineal* si cumple

$$L(f + g) = L(f) + L(g), \quad L(\alpha f) = \alpha L(f); \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad f, g \in X.$$

Sea $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido en un espacio normado X ; el propósito es encontrar una forma de “derivación” para espacios de funciones equivalente a la conocida para espacios Euclidianos. Para ello, defínase una *dirección* en el espacio de funciones X como un elemento $h \in C_c^1[a, b]$ (vease el apéndice); entonces se dirá que el funcional J tiene *derivada de Gateaux* en $f_0 \in X$ en la dirección de h si el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(f_0 + th) - J(f_0)}{t} = \frac{d}{dt} J(f_0 + th) \Big|_{t=0} \equiv D_h J(f_0),$$

existe. Cuando se hace mención a la derivada Gateâux, también se dice que se está tomando la *primera variación* de J en la dirección de h . De igual modo, puede definirse la *derivada de Fréchet* para J en f_0 ó simplemente decir que el funcional J es diferenciable en f_0 si existe un funcional lineal continuo φ para todo $h \in X$ tal que

$$J(f + h) - J(f) = \varphi h + o(\|h\|).$$

Donde $o(\|h\|)$ es un término que tiende a cero cuando $\|h\| \rightarrow 0$. El funcional lineal continuo se denota por

$$\varphi = DJ(f_0).$$

Es posible probar que en caso de existir φ ésta es única; igualmente puede probarse que si el funcional J tiene derivada de Fréchet entonces éste tiene derivada de Gateâux en todo $h \in X$ y

$$D_h J(f_0) = DJ(f_0)h.$$

Como ejemplo de lo anterior, sea $F = F(x, f(x), f'(x))$ una relación entre la función $f(x)$ y sus derivadas. Supóngase F continua y tómesese el funcional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(f) = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx, \quad (2.1)$$

con $X \subset C^1([a, b], \mathbb{R})$, $f \in X$ y norma $|f|_1 \equiv \max_{[a, b]}(|f| + |f'|)$. Entonces

$$\begin{aligned} J(f + h) - J(f) &= \int_a^b [F(x, f(x) + h(x), f'(x) + h'(x)) - F(x, f(x), f'(x))] dx \\ &= \int_a^b [F_y(x, f(x), f'(x))h + F_z(x, f(x), f'(x))h'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + o(x, f, f')[h + h'] dx \\
& = \int_a^b [F_y(x, f(x), f'(x))h + F_z(x, f(x), f'(x))h' + o(|h|_1)] dx.
\end{aligned}$$

Donde $y = f(x)$ y $z = f'(x)$. El segundo renglón de esta igualdad es cierto bajo el supuesto que F_y y F_z existen y son continuas en el punto $(x, f(x), f'(x))$. Bajo estas mismas suposiciones, se tiene

$$D_h J(f_0)h = DJ(f_0)h = \int_b^a [F_y h + F_z h'] dx,$$

debido a la linealidad de $DJ(f_0)$ en h .

Ahora, se desearía tener algún criterio que detecte cuando un funcional evaluado en alguna función $f_0(x) = y_0$, resulta ser un valor *máximo* o *mínimo*; es decir, se quisiera encontrar los *extremos del funcional*. La manera como será encontrado tal criterio, resulta ser totalmente análoga a la ya conocida para funciones definidas sobre espacios Euclidianos. Sea $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido en un espacio normado X . La manera natural para detectar un mínimo local para J en $y_0 \in X$ es observando la siguiente condición

$$J(y) \geq J(y_0).$$

Siempre y cuando y esté muy cercano a y_0 . Una condición necesaria pero no suficiente para encontrar extremos locales para el funcional J es justamente

$$D_h J(f_0) = 0.$$

Para toda dirección $h \in X$ en la que la derivada de Gateaux esté definida.

Sea $F(x, y(x), y'(x)) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y el funcional (2.1) con condiciones de frontera $y(a) = A$ y $y(b) = B$; supóngase además que y_0 es un extremo de J . Tómesese el funcional

$$I(h) = J(y_0 + h).$$

Con $h \in X$ tal que $h(a) = h(b) = 0$. Entonces; en caso de que y_0 sea un punto crítico (máximo o mínimo), se tendrá

$$DI(0)h = 0.$$

Es decir

$$\int_a^b [F_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F_z(x, y(x), y'(x))h'(x)] dx = 0.$$

Con $y = f(x)$, $y' = f'(x)$. Ahora, si se supone que $\frac{d}{dx}F_z(x, y_0(x), y'_0(x))$ existe, entonces es posible integrar por partes para obtener

$$\int_a^b [F_y(x, y(x), y'(x))h(x) - h(x)\frac{d}{dx}F_z(x, y_0(x), y'_0(x))] dx + F_z(x, y_0(x), y'_0(x))h(x) \Big|_a^b = 0.$$

Como $h(a) = h(b) = 0$, el término de frontera se anula; de este modo, se obtiene

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_z)h dx = 0.$$

Para toda $h \in C^1[a, b]$ con $h(a) = h(b) = 0$. Ahora, como esto último se cumple para toda h , Por el lema fundamental del cálculo de variaciones (véase por ejemplo [9]), se obtiene la denominada *ecuación de Euler* para el funcional J

$$F_y - \frac{d}{dx}F_z = 0. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, si en $f_0 = y_0$ el funcional J tiene un punto crítico, entonces en tal punto debe satisfacerse la ecuación de Euler.

Para el problema con dos variables, considérese ahora un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y sea

$$J(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy,$$

con u una función continua y diferenciable en Ω , y F diferenciable. Supóngase que se conocen los valores de u en $\partial\Omega$. Si u_0 es candidato a ser extremo de $J(u)$, entonces escríbase $u = u_0 + th$, con $h|_{\partial\Omega} = 0$, pues u es conocida en la frontera del dominio Ω . Entonces, (procediendo análogamente a como se hizo para el caso de una variable), la derivada de Fréchet es

$$D_h J(u_0) = \frac{d}{dt} J(u_0 + th)|_{t=0} = \iint_{\Omega} (F_u h + F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y) dx dy = DJ(u_0)h.$$

Si u_0 es un punto crítico, $DJ(u_0)h = 0$, para toda h continua y diferenciable en $\overline{\Omega}$. Observese además que $F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y = \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h) - \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})h - \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})h$. En consecuencia

$$\begin{aligned} DJ(u_0)h &= \iint_{\Omega} \left\{ \left(F_u h - \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h) \right) \right\} dx dy, \\ &= \iint_{\Omega} \left(F_u h - \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} h) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} h) \right) dx dy + \oint_{\partial\Omega} h \begin{pmatrix} F_{u_x} \\ F_{u_y} \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds. \end{aligned}$$

La segunda igualdad es debida al teorema de la divergencia. Como $h|_{\partial\Omega} = 0$, y $DJ(u_0)h = 0$ se tiene

$$\iint_{\Omega} \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}) \right) h dx dy = 0.$$

Esta última igualdad debe cumplirse para toda $h \in C^1(\overline{\Omega})$; debido al lema fundamental del cálculo de variaciones para el caso en \mathbb{R}^2 (véase [9]), se obtiene

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}) = 0. \quad (2.3)$$

La relación (2.3) es la ecuación de Euler para este caso.

Para espacios de funciones de más dimensiones, las definiciones que hemos presentado como derivada de Gâteaux y de ecuación de Euler son totalmente análogas. Una discusión más amplia será dada posteriormente en el apéndice sobre Espacios de Sobolev.

2.2 Dos casos particulares del funcional de energía.

La intención ahora, es analizar dos ejemplos de funcionales que son casos particulares del funcional de energía (1.33); estos son de la energía potencial de una membrana y el funcional de área de una superficie .

En primer lugar, tómesese el caso de la membrana. Supóngase que esta última está determinada por una función $z = \varphi(x, y)$, con $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si se desea encontrar la posición de equilibrio de una membrana fija en su frontera ($\varphi = \varphi_0$ en $\partial\Omega$, φ_0 es dada), es necesario minimizar su energía potencial

$$E(\varphi) = \iint_{\Omega} \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{2} dx dy,$$

sobre todas las funciones $\varphi(x, y)$ definidas en el dominio Ω y que coinciden en $\partial\Omega$. El funcional $E(\varphi)$ se conoce como *integral de Dirichlet*, y está asociado al estudio de configuraciones de equilibrio en electrostática, mecánica de fluidos y otras teorías físicas.

La ecuación de Euler correspondiente, debido a la relación (2.3), es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_y) = 0.$$

Es decir, $\Delta\varphi = 0$.

Si φ es un punto crítico de $E(\varphi)$, entonces $\Delta\varphi = 0$ en Ω con $\varphi = \varphi_0$ en $\partial\Omega$.

Obsérvese ahora lo siguiente

$$\begin{aligned} E(\varphi + h) - E(\varphi) &= \iint_{\Omega} \frac{\|\nabla(\varphi + h)\|^2}{2} - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \langle \nabla(\varphi + h), \nabla(\varphi + h) \rangle + \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2\langle \nabla\varphi, \nabla h \rangle + \|\nabla h\|^2 dx dy \\ &= D_h E(\varphi) + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} (\Delta\varphi)h dx dy + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 dx dy. \end{aligned}$$

$D_h E(\varphi)$ (la derivada de Gâteaux), es idénticamente igual a cero en los puntos críticos. Si $h \neq 0$ entonces la última integral es estrictamente positiva, por lo que $E(\varphi + h) > E(\varphi)$;

entonces el problema tiene un único punto crítico y es mínimo. La existencia y unicidad del punto crítico es debida a la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Laplace (siempre y cuando $\partial\Omega$ sea regular): $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \Delta\varphi = 0$.

Nótese que cuando la distribución u es estacionaria en (1.33), y no se toman en cuenta reacciones químicas en el problema de difusión, el funcional de energía que se obtiene es muy parecido a la integral de Dirichlet.

Por otro lado, es sabido que el área de una superficie está dada por

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy,$$

donde $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$ y $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ se suponen continuas sobre $\bar{\Omega}$.

Esta última integral puede ser pensada como una función de la función f para obtener el funcional

$$A(f) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy,$$

en el que f es conocida sobre $\partial\Omega$. La derivada de Gateâux de A en la dirección de h , es

$$\frac{d}{dt}[A(f + th)](0) = \iint_{\Omega} \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} dx dy.$$

Donde $h = h(x, y)$ es una función continua y diferenciable, con $h = 0$ en $\partial\Omega$.

Para un punto crítico (ver la forma en que se dedujo la ecuación (2.3) de la sección anterior), se tiene

$$\iint_{\Omega} \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} dx dy = 0.$$

La ecuación de Euler (debido a (2.3)), es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Si f_x y f_y son muy pequeñas, entonces la ecuación (2.4) es prácticamente $\Delta f = 0$, con f dada en $\partial\Omega$.

La ecuación de Euler para $A(f)$, (derivando la relación (2.4)), puede ser escrita en la forma

$$f_{xx}(1 + (f_y)^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1 + (f_x)^2) = 0$$

Comparando esta última expresión con (1.15), (deducida en el capítulo 1), se llega a la misma condición sobre la curvatura media H , para obtener superficies mínimas. En este caso la superficie M está dada por $\vec{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, por lo que $E = \|\vec{X}_x\|^2 = 1 + (f_x)^2$, $F = \langle \vec{X}_x, \vec{X}_y \rangle = f_xf_y$ y $G = \|\vec{X}_y\|^2 = 1 + (f_y)^2$; además $e = \langle \vec{X}_{xx}, \vec{N} \rangle$, $f = \langle \vec{X}_{xy}, \vec{N} \rangle$, $g = \langle \vec{X}_{yy}, \vec{N} \rangle$, con $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1)$.

De este modo, se ha rescatado la condición ya antes encontrada para superficies mínimas, pero esta vez con procedimientos variacionales.

Si la superficie M está dada en la forma paramétrica $M = M(u, v)$ y Ω es una región del plano (u, v) , mapeada en U bajo la aplicación $M(u, v)$ entonces

$$A = \iint_{\Omega} \|M_u \wedge M_v\| \, du \, dv. \quad (2.5)$$

Esta última integral representa una visión más general que el problema en que la superficie es la gráfica de una función, por lo que es conveniente pensar en este sentido.

Nótese que cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, para $\varepsilon \approx 0$, el funcional de energía (1.33), (véase la sección 1.4 del cap.1), es prácticamente el funcional de área de la superficie; en consecuencia, (1.33) está muy próximo a la relación (2.5), para $\varepsilon \approx 0$.

Como caso particular, considérese $f = f(x)$. En este caso, el perímetro de la curva descrita por la función f , está dado por

$$P(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

De manera análoga, si la curva descrita por f está parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces

$$P(f) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{\langle \vec{v}(t), \vec{v}(t) \rangle} \, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\vec{v}(t)\| \, dt.$$

Donde $v(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ es el vector tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$. Nótese que estas últimas ecuaciones son exactamente la definición del parámetro de longitud de arco (véase el cap.1, sección 1.1).

2.3 Caso unidimensional.

2.3.1 Sistemas con un grado de libertad.

Un *sistema con un grado de libertad* es un sistema cuyo estado está determinado por una cantidad escalar, descrita por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, para un parámetro t (usualmente el tiempo), en cierto intervalo (a, b) . A x se le llama *variable de estado* (o *parámetro de orden*, en el lenguaje termodinámico o de transiciones de fase). En el caso de una partícula de masa unitaria que se mueve en una dirección, la energía cinética del sistema (ver cap.1, sección 1.4), está dada por

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2.$$

La energía potencial, es la función

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi,$$

en donde f es la fuerza que actúa sobre la partícula en la posición x . Observese que si se suma una constante a la energía potencial, la ecuación (2.6) no se altera.

Nótese que la energía potencial $U(x)$ determina a la función f , por lo que, para especificar un sistema con un grado de libertad basta determinar la energía potencial.

La *energía total* es la suma

$$E = T + U.$$

En general, la energía total es una función $E = E(x, \dot{x})$.

Uno de los resultados clásicos en física (véase cap.1, sección 1.4), es la ley de conservación de la energía : *La energía total de los puntos que se mueven de acuerdo a la ecuación*

(2.6) *se conserva*; es decir $E(x, \dot{x})$ no depende de t . Esto puede corroborarse si se deriva la energía total con respecto a t

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0.$$

Escríbase la ecuación (2.6) en la forma

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = f(x). \quad (2.7)$$

El *plano fase* de la ecuación (2.6) es el plano con las coordenadas x y y , donde el lado derecho de (2.7) determina el campo vectorial de velocidades en dicho plano.

Una solución de (2.7) es una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que describe el movimiento de un punto tal que la velocidad del movimiento a todo tiempo t es justamente el campo vectorial de velocidades en el plano fase.

De este modo, la *curva* fase está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \dot{\varphi}(t).$$

La ley de conservación de la energía permite encontrar las curvas fase "fácilmente". En cada curva fase la energía total es constante, por lo que cada una de éstas pertenecerá completamente a un nivel de energía $E(x, y) = h$.

Un ejemplo sencillo de lo anterior, es la ecuación básica de la teoría de oscilaciones (el oscilador armónico), dada por

$$\ddot{x} = -x.$$

Para este caso se tiene

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}x^2, \quad E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2.$$

La velocidad fase en el punto (x, y) está dada por $(y, -x)$, por lo que el campo de velocidades es tangente al radio vector punto a punto y de igual magnitud; o también, de la expresión para la energía E , se sigue que las curvas fase son círculos. De este modo, las partículas se mueven uniformemente alrededor de 0, por lo que

$$x = r_0 \cos(\theta - t), \quad y = r_0 \sin(\theta - t),$$

(r_0 y θ dependen de las condiciones iniciales). De este modo, los niveles de energía son círculos concéntricos y el origen.

Supóngase ahora que un potencial de energía está dado por la gráfica de una función. Para identificar los niveles de energía $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E$, es conveniente hacer algunas observaciones: cualquier posición de equilibrio para (2.7) debe pertenecer al *eje x* del plano fase. El punto $(\xi, 0)$ es una posición de equilibrio si ξ es un punto crítico de U , es decir, $(dU/dx)|_{x=\xi} = 0$. Por otro lado, cada conjunto de nivel es una curva diferenciable en una vecindad de los puntos que no sean una posición de equilibrio (por el Teorema de la Función Implícita). En particular, si el número E no es un valor crítico de la energía potencial U entonces el conjunto de nivel correspondiente al valor E es una curva diferenciable.

2.3.2 Péndulo simple.

Tómese el caso

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin(x). \tag{2.8}$$

Esta es la ecuación que modela el péndulo simple, con $\omega_0^2 = g/a$, g la constante de gravedad y a la longitud del péndulo.

Si se supone $|x|$ muy pequeño, entonces $\sin(x) \approx x$, por lo cual se tienen oscilaciones pequeñas. En consecuencia

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \approx 0.$$

La solución aproximada es $x(t) = a \sin(\omega_0 t + t_0)$, con t_0 una constante real. En consecuencia, será obtenido un movimiento periódico de periodo $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_0$. La curva fase estará dada por

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + t_0) \quad y(t) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + t_0).$$

Donde $t \in (-\infty, \infty)$. No es difícil comprobar que

$$x^2 + \frac{y^2}{\omega_0^2} = a^2.$$

Por lo que, para este caso, las soluciones aproximadas son elipses con ejes principales a y ω_0/a y el origen.

Para la ecuación completa (2.8), se tiene

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U = \omega_0^2(\cos(x_0) - \cos(x)), \quad E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega_0^2 \cos(x). \quad (2.9)$$

Los puntos críticos de U se localizan en $x = k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$; en consecuencia las posiciones de equilibrio para el sistema se localizan en $(k\pi, 0)$. La función $x(t) = 0$ representa el estado de equilibrio en el que el péndulo está suspendido sin moverse, en cuyo caso $x = 0$, $\dot{x} = 0$; la curva fase degenera en un solo punto. Esta es una solución válida ya encontrada anteriormente. Una segunda posición de equilibrio es el caso $x = \pi$, $\dot{x} = 0$, que representa la posición vertical del péndulo. El punto $x = -\pi$, $\dot{x} = 0$ representa la misma condición física. De hecho, los puntos $x = k\pi$, $\dot{x} = 0$ representan alguna de estas condiciones de equilibrio. Por tal motivo, es suficiente estudiar este problema para $x \in [0, 2\pi]$. La ecuación encontrada para la energía total en (2.9) no puede ser resuelta en términos de funciones elementales. No es fácil encontrar una relación útil de x en función de t .

El valor de la energía total al tiempo t es el mismo que en el tiempo t_0 para cada nivel de energía, es decir

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega_0^2 \cos(x) = \frac{\dot{x}_0^2}{2} - \omega_0^2 \cos(x_0) \quad (2.10)$$

Donde $x_0 = x(0)$ y $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$.

De la relación (2.10) se encuentra que, para cada curva fase

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E + \omega_0^2 \cos \xi)}}$$

Esta integral es de tipo elíptico para ciertos valores de x_0 y \dot{x}_0 ; no es posible encontrar una solución explícita. Sin embargo, obsérvese que, para que la integral esté bien definida, es necesario

$$E + \omega_0^2 \cos \xi \geq 0.$$

Si se toma $x_0 = 0$ y $\dot{x} \neq 0$ entonces, de la relación anterior se obtiene

$$|\sin x/2| \leq \frac{|\dot{x}_0|}{2\omega_0}$$

Esta relación se cumple siempre en caso de que $\frac{|\dot{x}_0|}{2\omega_0} \geq 1$. En caso contrario, es necesario

$$|x| < 2 \arcsin \frac{|\dot{x}_0|}{2\omega_0}. \quad (2.11)$$

De la relación (2.10) se tiene

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 + 2\omega_0^2(\cos x - 1)}. \quad (2.12)$$

Si $\dot{x}_0 = 2\omega_0$ entonces

$$\dot{x}(t) = \pm 2\omega_0 |\cos x/2|.$$

Y por lo tanto

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\pm \sqrt{(4\omega_0^2 \cos^2 \frac{\xi}{2})}} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{2\omega_0 |\cos \frac{\xi}{2}|}.$$

La solución a esta última integral es $\frac{1}{2\omega_0} |2 \ln \tan(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4})|$. Por lo que, para $x = \pi$, la solución es infinita; por lo tanto, para este caso, el tiempo en que se recorre la órbita es infinito, que físicamente representa la imposibilidad de que el péndulo se detenga exactamente en posición vertical hacia arriba.

Si se toman los distintos valores de E y se representan los niveles de energía en el plano xy , se obtienen las curvas integrales en el *plano fase*. El *Teorema de Existencia y unicidad* de las soluciones para una ecuación diferencial con condiciones iniciales dadas, garantiza que las distintas curvas en la representación no se intersecten. Además, de la relación (2.10) se observa que las curvas dentro de las separatrices son cerradas y por lo tanto $x(t)$, $\dot{x}(t)$ son periódicas. El diagrama de la figura 14 muestra todos los distintos niveles de energía.

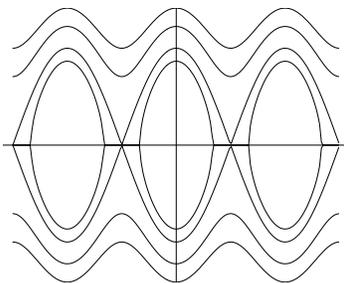


Figura 14. Plano fase del péndulo.

Las soluciones para el caso $\sin x \approx x$ ($x \approx 0$), están representadas por las curvas (elipses aproximadas) alrededor del origen. Estas curvas indican movimientos periódicos y en este caso el péndulo oscila de un lado a otro de la vertical hacia abajo. El valor máximo sobre la curva representa la amplitud de la oscilación.

Para valores de x_0 superiores a $2\omega_0$ o inferiores a $-2\omega_0$, de la relación (2.12), se tiene que $\dot{x}(t)$ tiene signo constante y $x(t)$ crece o decrece continuamente. Las curvas que representan este caso son las líneas onduladas; éstas corresponden a los movimientos en los que el péndulo gira siempre en la misma dirección. Cuando el valor de $\dot{x}(t)$ es muy grande, las trayectorias oscilan periódicamente y se comportan como en la figura 14.

Finalmente, si el *estado inicial* (la pareja (x_0, y_0)), se desplaza ligeramente del origen, la trayectoria correspondiente es una órbita cerrada y en consecuencia el péndulo oscila con amplitud pequeña alrededor del origen. Si el estado inicial se desplaza ligeramente de $(-\pi, 0)$ (la posición que corresponde a la posición vertical de equilibrio inestable), el péndulo se aleja de este punto para describir una trayectoria periódica o una ondulada.

2.3.3 Funcional de energía; caso unidimensional.

Tómese ahora el funcional (1.33), para el caso más sencillo; ésto es, para el caso unidimensional. El funcional de energía tendrá entonces la forma

$$E_\varepsilon(u) = \int_a^b \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} dx. \quad (2.13)$$

En este caso, Ω es un intervalo (a, b) de \mathbb{R} , y $W(u)$ es un potencial biestable con mínimos locales en $u = \pm 1$ y $W(\pm 1) = 0$, con comportamiento similar al de la figura 12. Obsérvese que $E_\varepsilon(u)$ está definido para todas las funciones $u \in C^1(a, b)$. Nuevamente, cuando $\varepsilon \approx 0$,

la definición del segundo término del funcional (2.13) implica que $u \approx \pm 1$, excepto quizás, en un conjunto de medida pequeña, para colecciones u^ε con $E_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq M$. Por otro lado, la transición de +1 a -1 puede ser dada sobre curvas derivables y éstas arrojarán una contribución por unidad de perímetro al término gradiente (que en este caso es $\frac{\varepsilon}{2} (du/dx)^2$). Esto último, hace suponer que la ley de transición debe estar cerca de un punto crítico del funcional de perímetro (véase funcional de área, sección 2.2).

Las funciones u distintas de $u = \pm 1$, que minimizan al funcional de energía (2.13), deben satisfacer la ecuación de Euler (2.2), (véase sección 2.1); por lo tanto

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dW}{du} = 0.$$

Por lo que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{dW}{du}. \quad (2.14)$$

Esta última ecuación puede ser reescrita en la forma

$$\ddot{u} = \omega_0 f(u).$$

Con $\omega_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}$. De este modo, el problema de encontrar los puntos críticos del funcional (2.13), es equivalente a resolver la ecuación de Euler para ω_0 y $f(u)$ dadas. Nótese que la relación $\ddot{u}^\varepsilon = \omega_0 f(u)$, es parecida al sistema descrito por un péndulo, ya estudiado con detalle en la sección anterior. Para resolver la ecuación (2.14), es conveniente tomar el reescalamiento

$$\frac{x}{\varepsilon} = \xi; \quad \varepsilon \neq 0.$$

Observando que $\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\xi}{dx}$, la ecuación (2.14) puede ser rescrita como

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{dW}{du}.$$

Como ejemplo de lo anterior, tómesese la función $W(u) = (1 - u^2)^2$, donde u es justamente la transición diferenciable entre los valores 1 y -1; la intención es que esta transición

tenga un comportamiento similar al de la figura 15. Obsérvese que a la función minimizante u^ε ha sido escrita como u , pero entiéndase que el valor ε es un parámetro que indica el comportamiento de las transiciones en regiones pequeñas (de tamaño ε). Nótese que la función W así definida, nunca es negativa; además $W = 0$ en $u = \pm 1$ y $W(0) = 1$, por lo que en el intervalo $[-1, 1]$, tiene un máximo local en $u = 0$. Para valores de u superiores en valor absoluto a 1, la función W es creciente y tiende a $+\infty$ cuando u aumenta en valor absoluto. Por lo tanto, la función $W(u)$ es un potencial biestable y su gráfica es como la figura 12 (ver cap.1, sección 1.4). La intención es encontrar una función diferenciable u que modele la transición de $u = 1$ a $u = -1$, (figura 15). El funcional de energía para este caso es

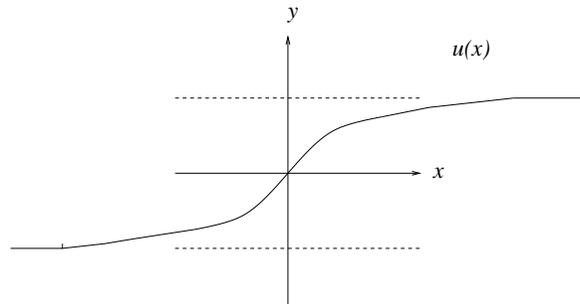


Figura 15.

$$E_\varepsilon(u) = \int_a^b \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{(1-u^2)^2}{\varepsilon} dx. \quad (2.15)$$

Con ecuación de Euler

$$\frac{4}{\varepsilon}(u^3 - u) - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4}{\varepsilon^2}(u^3 - u). \quad (2.16)$$

Tomando el rescalamiento $\frac{x}{\varepsilon} = \xi$, con $\varepsilon \neq 0$, la ecuación (2.16) puede ser reescrita como

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = 4(u^3 - u). \quad (2.17)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.17) por $\frac{du}{dx}$, e integrando con respecto a ξ , se tiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = u^4 - 2u^2 + c,$$

con c una constante real. Obsérvese que el valor de c debe ser 1, debido a que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = (1 - u^2)^2 = W(u); \quad (2.18)$$

derivando esta última expresión con respecto a ξ , se obtiene la ecuación (2.17).

Elevando a la potencia $\frac{1}{2}$ ambos miembros de la ecuación (2.18), se obtiene

$$\frac{u'(\xi)}{(1-u)(1+u)} = \sqrt{2};$$

utilizando fracciones parciales, e integrando con respecto a ξ ambos lados, se obtiene

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{2} \left(\frac{u'(s)}{1-u} + \frac{u'(s)}{1+u} \right) ds = \sqrt{2}\xi + k,$$

para cierta constante k . Por lo tanto

$$-\ln|1-u| + \ln|1+u| = 2\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{2},$$

con k_1 una constante. Recuérdese que el propósito es encontrar la transición de -1 a 1 ; por lo tanto, serán tomados en cuenta sólo valores de u , tales que $|u| < 1$. En consecuencia

$$\ln \frac{1+u}{1-u} = 2\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{2},$$

es decir,

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{2}};$$

distribuyendo y despejando u , se obtiene

$$u = \frac{e^{2\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{2}} - 1}{e^{2\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{2}} + 1}.$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de esta última relación por $e^{-(\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4})}$, se tiene que la solución a la ecuación (2.17) es

$$u(\xi) = \left(\frac{e^{\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4}} - e^{-(\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4})}}{e^{\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4}} + e^{-(\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4})}} \right) = \tanh\left(\sqrt{2}\xi + \frac{k_1}{4}\right).$$

Por lo tanto, la transición ocurre en $\xi = \frac{-k_1}{4\sqrt{2}}$. Obsérvese que la constante k_1 en la solución encontrada, es simplemente una traslación de la solución sobre el eje x ; por conveniencia, tómesese $k_1 = 0$. Por lo tanto, recordando que $\xi = x/\varepsilon$, la solución a la ecuación (2.16) es

$$u(x) = \tanh\left(\frac{\sqrt{2}x}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{e^{\sqrt{2}x/\varepsilon} - e^{-\sqrt{2}x/\varepsilon}}{e^{\sqrt{2}x/\varepsilon} + e^{-\sqrt{2}x/\varepsilon}} \right). \quad (2.19)$$

Escribiendo (2.19) como

$$u(x) = \left(\frac{1 - e^{-\sqrt{2}x/\varepsilon}}{1 + e^{-\sqrt{2}x/\varepsilon}} \right),$$

obsérvese que si el valor de ε está muy cercano a 0 y $x < 0$, entonces el valor de u estará muy próximo a -1 ; por otro lado, escribiendo ahora

$$u(x) = \left(\frac{e^{\sqrt{2}x/\varepsilon} - 1}{e^{\sqrt{2}x/\varepsilon} + 1} \right),$$

se observa que, si ε está muy cercano a 0 y $x > 0$, entonces u estará muy cercana a 1. Finalmente, si $\varepsilon \rightarrow \infty$, de la relación (2.19), se observa que $u(x) \rightarrow 0$.

Para dar una interpretación a los resultados encontrados, obsérvese que para el caso límite $\varepsilon = 0$, la transición no existe. Para el caso $\varepsilon = \infty$, se tiene que la región de transición es de tamaño infinito, y la transición es la función $u(x) = 0$; si se piensa que la variable x es el tiempo, entonces la transición de 1 a -1 se dará en un tiempo infinito, para este caso. Los casos límite están ilustrados en la figura 17, mientras que la transición para $\varepsilon > 0$ finito, está ilustrado en la figura 16.

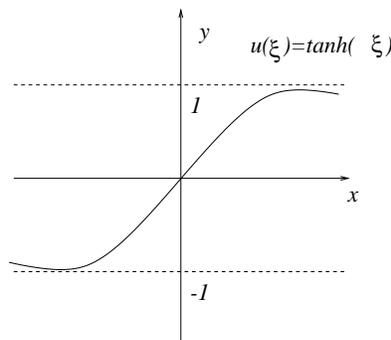


Figura 16.

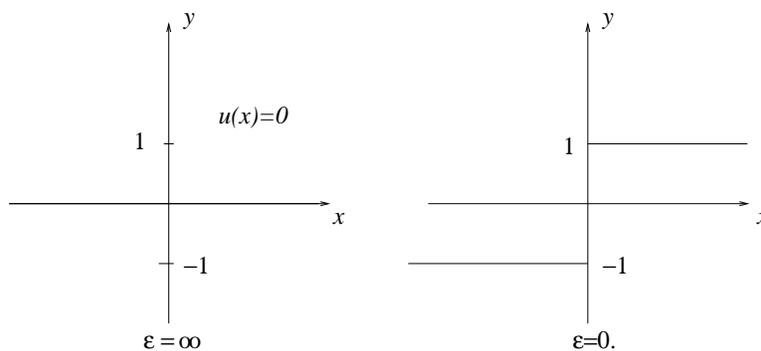


Figura 17. Casos límite.

Nótese que la ecuación (2.18), es justamente la energía total E , definida en la subsección 2.3.1, con $T(x) = \frac{1}{2}(\dot{u}(x))^2$ y $U(x) = (1 - u^2)^2$. De igual modo, la ecuación (2.16) puede ser pensada como el estado de un sistema con un grado de libertad, como el definido en la subsección 2.3.1. Sea

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = 4(u^3 - u). \quad (2.20)$$

En la figura está representado el plano fase del sistema (2.20).

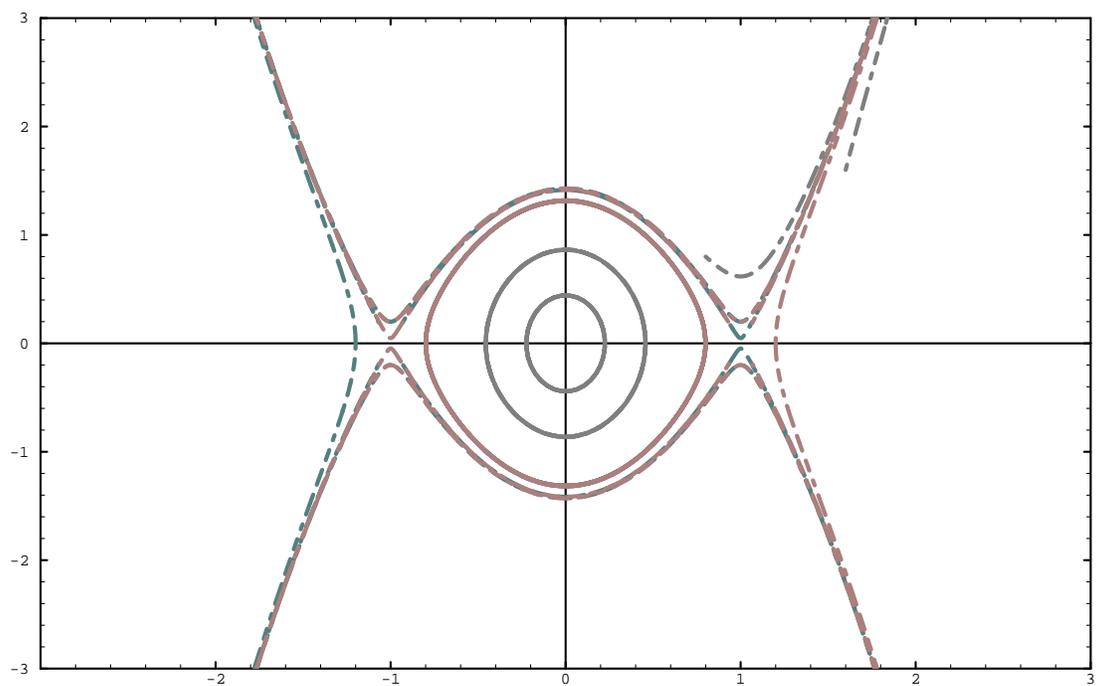


Figura 18. Plano fase del sistema (2.20).

Capítulo 3

Formulación variacional: Paso de montaña.

La conexión entre películas de jabón y superficies mínimas está dada por el problema de Plateau¹, que en términos generales dice lo siguiente: “dada una curva cerrada α existe una superficie M de área mínima con α como frontera” (véase [17]). Tal problema puede ser modelado minimizando el funcional

$$A(u) = \int_{\Omega} [\det(\nabla u^t \nabla u)]^{1/2} dz = \int_{\Omega} [\|u_x\|^2 \|u_y\|^2 - \langle u_x, u_y \rangle] dz,$$

para funciones $u \in H^{1,2} \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ($H^{1,2}$ espacio de Hilbert, véase el apéndice), que satisfacen la condición de frontera de Plateau, es decir, el mapeo $u|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \alpha$ es una parametrización monótona (débilmente) que preserva la orientación, donde Ω es el disco $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Laplace observó que si una superficie M minimiza localmente el área para una frontera fija α , entonces necesariamente la curvatura media de M se anula. Considerando coordenadas isotermas en M (es decir $\langle u_x, u_x \rangle = \langle u_y, u_y \rangle$ y $\langle u_x, u_y \rangle = 0$), esto último puede ser descrito a través de la relación

$$\Delta u = 0.$$

Debido a la elección de parámetro, se obtiene

¹Joseph Plateau (1801-1883), físico belga. Realizó varios experimentos con interfases entre dos medios (películas de jabón) y formuló cuatro principios que describen posibles singularidades estables en tales superficies.

$$\|u_x\|^2 - \|u_y\|^2 = 0 = \langle u_x, u_y \rangle \quad \text{en } \Omega,$$

junto con la condición de frontera de Plateau.

En 1930, Douglas y Radó [17], propusieron minimizar la integral de Dirichlet

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2) dx dy$$

para resolver el problema de Plateau sobre la clase

$$C(\alpha) = \{u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) : u|_{\partial\Omega} \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)\};$$

para $u|_{\partial\Omega}$ que satisface la condición de frontera de Plateau.

Claramente, $E(u) \geq A(u)$; la igualdad se cumple si y sólo si u es conforme. De hecho, se tiene que

$$\inf_{C(\alpha)} A(u) = \inf_{C(\alpha)} E(u).$$

La igualdad anterior puede ser derivada del *lema de ϵ -conformidad de Morrey* (véase [18]).

En consecuencia, la solución al problema de Plateau se reduce al siguiente resultado:

Proposición 1. Para cualquier curva $\alpha \in C^1$, existe una función minimizante u de la integral de Dirichlet en $C(\alpha)$.

Este último problema ha sido muy importante en la historia del cálculo de variaciones; gracias al estudio de las superficies mínimas, fueron desarrolladas importantes ideas que permitieron el crecimiento de tal disciplina. Por ejemplo, Courant estableció la existencia de superficies mínimas inestables utilizando el clásico lema de paso de montaña.

Para un tratamiento más amplio del problema de Plateau, véase por ejemplo, [5] o [13].

La intención de este trabajo es probar que para el funcional de energía (1.33), existen soluciones que exhiben transiciones. En el capítulo anterior, fue discutida la relación existente entre encontrar los puntos críticos del funcional (2.13), y resolver la ecuación

diferencial (2.14); de hecho, la solución a la ecuación (2.14), para un caso particular, exhibe una transición entre los valores $u = \pm 1$, para una función u definida sobre \mathbb{R} . Para el caso general, la situación es totalmente análoga; resolver el problema de encontrar puntos críticos para el funcional de energía (1.33), es equivalente a resolver una ecuación diferencial parcial no lineal apropiada, llamada justamente *ecuación de Euler-Lagrange*. Por lo tanto, es muy conveniente discutir el problema de encontrar soluciones adicionales a la ecuación de Euler-Lagrange, buscando puntos críticos de funcionales de energía, como el funcional (1.33). Es necesario ahora, introducir formalmente el cálculo de las variaciones. Supóngase que se quiere resolver la ecuación diferencial parcial no lineal, descrita por

$$A[u] = 0, \tag{3.1}$$

donde $A[\cdot]$ es un operador diferencial parcial no lineal y u es la incógnita. Existe una teoría general para resolver todas las ecuaciones parciales (3.1). El cálculo de las variaciones identifica una importante clase de problemas no lineales de la forma (3.1) que pueden ser resueltos usando técnicas relativamente simples del análisis funcional no lineal. Esta es la clase de *problemas variacionales*, es decir, ecuaciones diferenciales parciales de la forma (3.1), donde el operador no lineal $A[\cdot]$ es la derivada de un funcional apropiado $I[\cdot]$. Simbólicamente, puede escribirse

$$A[\cdot] = I'[\cdot];$$

en consecuencia, el problema (3.1) puede ser rescrito como

$$I'[u] = 0. \tag{3.2}$$

La ventaja de esta nueva formulación es que ahora las soluciones de (3.1) pueden ser reconocidas como *puntos críticos* de $I[\cdot]$. Bajo ciertas circunstancias, estos últimos pueden ser fácilmente encontrados; por ejemplo, si el funcional $I[\cdot]$ tiene un mínimo en u , entonces presumiblemente la relación (3.2) es válida y u es una solución de la ecuación parcial (3.1) original. El punto es que mientras usualmente es extremadamente difícil resolver directamente el problema (3.1), puede resultar mucho más sencillo descubrir mínimos (o máximos, u otros puntos críticos) del funcional $I[\cdot]$. Un estudio más detallado de funcionales definidos en espacios más generales que los euclidianos, será dado en el apéndice sobre espacios de Sobolev.

Por otro lado, obsérvese que si f es una función definida sobre un subconjunto compacto K de \mathbb{R} , entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre K ; si éstos no son alcanzados sobre la frontera de K , entonces $f' = 0$, en al menos dos puntos interiores de K . En general, los dominios sobre los cuales está definido el funcional de energía, no siempre serán conjuntos compactos; de hecho, pueden ser subconjuntos de espacios euclidianos de dimensión infinita, (llamados *espacios de Hilbert reales*). De esta última observación, se desprende la necesidad de una “propiedad de compacidad”; es decir una propiedad equivalente a la compacidad para subconjuntos de espacios euclidianos. Esta propiedad es la *condición de compacidad de Palais-Smale*.

Obsérvese también que si f es una función real continua y diferenciable, y además se tiene que $f(a) = f(b)$, para $a < b$, entonces el *Teorema de Rolle* garantiza la existencia de al menos un punto $c \in (a, b)$ para el cual $f'(c) = 0$; nótese que los valores de la derivada f' no crecen desmesuradamente cerca de c , debido a que la función f es continua y derivable en (a, b) . La generalización de esta última afirmación es justamente la condición de Palais-Smale, y la generalización del teorema de Rolle para funciones reales es el llamado *Teorema de Paso de Montaña*; es este último resultado el que garantizará la existencia de un punto crítico, distinto de $u = \pm 1$, para el funcional (1.33), no sólo en espacios euclidianos, sino en espacios más generales, como los de Hilbert reales.

Es conveniente interpretar el teorema de paso de montaña como aquel que permite encontrar el camino de “menor esfuerzo” sobre una cordillera de montañas, que conecte a dos puntos a la misma altura en valles distintos. En tal caso, lo esperado es que este camino tenga algún “punto silla” (figura 19).

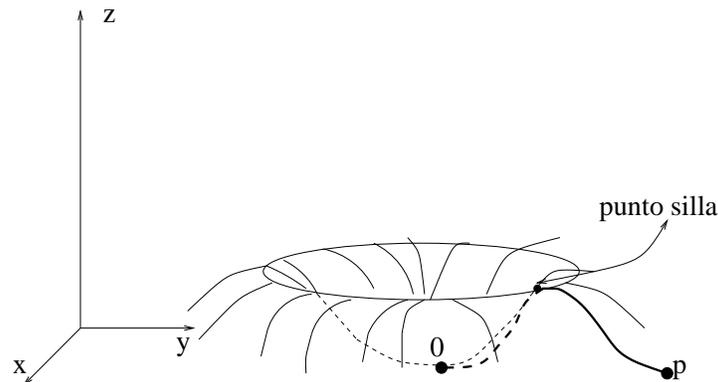


Figura 19. Interpretación del paso de montaña.

3.1 Puntos críticos y deformaciones.

A continuación se darán algunas definiciones que serán útiles en lo sucesivo. Algunas de éstas pueden ser revisadas en el apéndice sobre espacios de Sobolev. Para un tratamiento detallado, véase [16], [6], etc.

Supóngase que T es un espacio de funciones. Entonces un *funcional* es una función real en T , es decir, un mapeo de T en \mathbb{R} . Un funcional aditivo y homogéneo es llamado *funcional lineal*.

Definición 4. Un *espacio de Hilbert real* es un conjunto H , cuyos elementos se denotan por f, g, \dots , tal que

(i) H es un *espacio euclideo*; es decir, un espacio real y lineal con un producto escalar definido por (\cdot, \cdot) , el cual define una norma: $\|f\| = (f, f)^{1/2}$

(ii) H es un *espacio completo* con respecto a la métrica $\rho(f, g) = \|f - g\|$; es decir, toda sucesión de Cauchy en H converge a un punto de H .

(iii) H es un *espacio separable*; es decir H contiene un subconjunto S numerable y denso en todo H ; esto es, $\overline{S} = H$.

(iv) H es *infinito dimensional*; es decir, dado $n \in \mathbf{Z}^+$, H contiene n elementos linealmente independientes.

Ahora sea

$$I : H \longrightarrow \mathbb{R}.$$

un funcional no lineal en H .

Definición 5. Se dice que I es diferenciable en $u \in H$, si existe $v \in H$ tal que

$$I[w] = I[u] + (v, w - u) + o(\|w - u\|).$$

El elemento v , si existe, es único. Escríbase entonces

$$I'[u] = v.$$

Esta definición es equivalente a la del capítulo anterior, debido al *teorema de representación de Riesz* (vease apéndice).

Definición 6. Se dice que I pertenece a $C^1(H, \mathbb{R})$ si $I'[u]$ existe para toda $u \in H$ y el mapeo

$$I' : H \longrightarrow H$$

es continuo.

Notación. Sea $c \in \mathbb{R}$.

- (i) $A_c \equiv \{u \in H : I[u] \leq c\}$.
- (ii) $K_c \equiv \{u \in H : I[u] = c, I'[u] = 0\}$.

Definición 7.

- (i) Se dice que $u \in H$ es un *punto crítico* de I , si

$$I'[u] = 0.$$

- (ii) El número real c , es un *valor crítico* si $K_c \neq \emptyset$.

Resultará muy útil tener un criterio que permita deformar conjuntos de nivel en otros esencialmente iguales; es decir, si c no es un punto crítico, ¿es posible deformar el conjunto $A_{c+\epsilon}$ en $A_{c-\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$, de tal manera que los conjuntos $A_{c+\epsilon}$ y $A_{c-\epsilon}$ sean esencialmente los mismos?; antes de responder a esta pregunta, será analizado un ejemplo concreto. Tómese el *toro* T , de dimensión dos en \mathbb{R}^3 , tangente a el plano Π como en la figura 20.

Defínase $h : T \longrightarrow \mathbb{R}$ como la altura sobre el plano Π . Sea T_a el conjunto de puntos $x \in T$ tales que $h(x) \leq a$, para $a \in \mathbb{R}$. Cuando el valor de la altura h varía, también lo harán los conjuntos A ; obsérvese que

- (a) Si $a < 0 = h(q)$, entonces T_a es el conjunto vacío.
- (b) Si $h(q) < a < h(p)$, entonces T_a tendrá la forma de la figura 21.

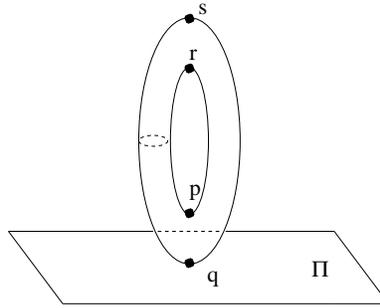


Figura 20.

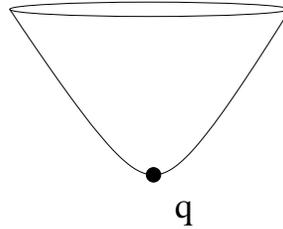


Figura 21.

Claramente, este último conjunto puede ser deformado continuamente alrededor del punto q , de tal modo que todas sus deformaciones sigan siendo esencialmente el conjunto de la figura 21. Intuitivamente es claro que al deformar alrededor del punto q un conjunto de esta forma, eventualmente se obtendrá algo muy parecido a un disco.

(c) Si $h(p) < a < h(r)$, entonces T_a tendrá la forma de la figura 22a.

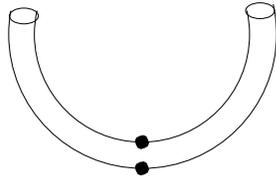


Figura 22a.

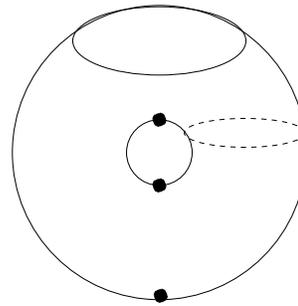


Figura 22b.

El conjunto T_a para este caso es prácticamente un cilindro.

(d) Si $h(r) < a < h(s)$, entonces T_a tomará ahora la forma de la figura 22b.

(e) Si $h(s) < a$, entonces T_a es todo el toro.

Los conjuntos T_a obtenidos en los casos (a), (b), (c), (d) y (e) son muy distintos entre

sí; intuitivamente es claro que no hay manera de llevar uno a otro sin romper, es decir, de manera continua. Claramente, en tanto los valores de $h(x)$ se mantengan dentro de alguno de estos casos, los conjuntos T_a pueden ser deformados de modo tal que las deformaciones sean todas esencialmente la misma. Las deformaciones sólo pueden hacerse de manera continua dentro de los límites que marcan los distintos casos, es decir, si no se tienen puntos críticos intermedios.

Estas ideas ejemplifican el resultado central de la *teoría de Morse*, que será presentado a continuación.

Recuérdese que la idea es deformar el conjunto $A_{c-\varepsilon}$ en $A_{c+\varepsilon}$ para ε dada. Específicamente, resulta que bajo hipótesis adecuadas, un conjunto de nivel se puede deformar en otro si no se atraviesa un nivel crítico. Esto proporciona una manera indirecta de probar existencia de puntos críticos (soluciones a $I'(u) = 0$), si es posible establecer que dos niveles críticos no pueden deformarse uno en el otro. Para probar lo anterior, es necesario resolver una ecuación diferencial apropiada en el espacio de Hilbert H y seguir el flujo gradiente asociado a I . El espacio H es de dimensión infinita, por lo que es necesario dar una condición de compacidad sobre este espacio.

Definición 8. Un funcional $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisface la condición de compacidad de *Palais-Smale* si toda sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ que satisface

$$(i) \{I[u_k]\}_{k=1}^{\infty} \text{ es acotado en } H$$

$$(ii) I'[u_k] \longrightarrow 0 \text{ en } H$$

es precompacta en H ; es decir, toda sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{u_{k_j}\}$, tal que $u_{k_j} \longrightarrow u$ para algún $u \in H$.

Si $H = \mathbb{R}$, y se toma una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces la condición de *Palais-Smale* es: para toda sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathbb{R} que satisface que $\{|f(x_k)|\}_{k=1}^{\infty} < c$, para una constante $c \in \mathbb{R}$ y que $|f'(x_k)| \longrightarrow 0$, se tiene que $x_{k_j} \longrightarrow x^*$ para algún $x^* \in \mathbb{R}$ y para alguna subsucesión $\{x_{k_j}\}$. Para este caso, la condición de compacidad se justifica mediante el siguiente resultado: *Toda función continua y diferenciable acotada por arriba (ó por abajo) que satisfase la condición de Palais-Smale alcanza su valor máximo (ó su valor mínimo).* Este último es una generalización del teorema clásico de análisis real: *Toda función continua definida en un subconjunto compacto K de \mathbb{R} alcanza sus valores máximo y mínimo sobre K .*

Para ilustrar la definición 8, considérese por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$. Si se considera en \mathbb{R} la sucesión $x_n = n$, con n perteneciente al conjunto de los naturales, la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada por cero y la sucesión $f'(x_n) = -1/n^2$

converge a cero, pero no existe x tal que $x_n \rightarrow x$. Por lo tanto la función f no satisface la condición de Palais-Smale.

Denótese por \mathcal{C} a la colección de funciones $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ que además satisfacen la condición: $I' : H \rightarrow H$ es una función de *Lipschitz* en subconjuntos acotados de H .

Ahora será formulado el lema de deformación.

Lema 1. (de deformación). Supóngase que $I \in \mathcal{C}$ satisface la condición de Palais-Smale y que $I[u] \rightarrow \infty$ si $\|u\| \rightarrow \infty$.
Supóngase además

$$K_c = \emptyset.$$

Entonces para cada $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existe una constante $0 < \delta < \epsilon$ y una función

$$\eta \in C([0, 1] \times H; H),$$

tal que los mapeos

$$\eta_t(u) \equiv \eta(t, u), \quad (0 \leq t \leq 1, u \in H)$$

satisfacen

- (i) $\eta_0(u) = u, \quad (u \in H)$
- (ii) $\eta_1(u) = u, \quad (u \notin I^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon])$
- (iii) $I[\eta_t(u)] \leq I[u], \quad (u \in H, 0 \leq t \leq 1)$
- (iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}.$

Antes de demostrar este resultado, es necesario discutir su significado. El propósito es deformar sin que las propiedades “generales” de los conjuntos se pierdan; para esto, hay que deformar de manera continua. Intuitivamente es claro que el mapeo $\eta_0 : H \rightarrow H$, puede ser llevado a otro mapeo $\eta_1 : H \rightarrow H$, mediante una familia de transformaciones dada por $\eta_t : H \rightarrow H$, donde $t \in [0, 1]$ es el parámetro de deformación, (puede ser pensado como el tiempo). Un mapeo continuo

$$\eta_t : H \times [0, 1] \longrightarrow H,$$

tal que $\eta_t(0, u) = \eta_0(u)$ y $\eta_t(1, u) = \eta_1(u)$ es llamado una *homotopía* entre η_0 y η_1 . Las propiedades que se preservan bajo cierta homotopía son las llamadas *estables*. Para ilustrar qué tipo de propiedades son estables y cuales no, tómense por ejemplo, mapeos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. La propiedad de que una curva pase por el origen tangencialmente no es estable dado que una pequeña deformación puede inmediatamente desconectar a ésta del origen (figura 23a), mientras que la propiedad de intersectar transversalmente a el eje x es estable (figura 23b).

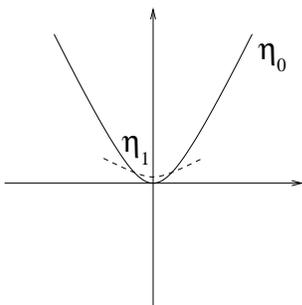


Figura 23a.

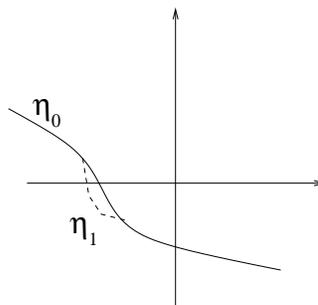


Figura 23b.

La homotopía η_t que interesa para el lema de deformación, de acuerdo con la condición de Palais-Smale y $K_c = \emptyset$, debe preservar la propiedad de no “contener” puntos críticos; es decir, el lema 1 establece que, en caso de que $c \in \mathbb{R}$ no sea un nivel crítico del funcional I (es decir, si $I^{-1}[c]$ no contiene ningún punto u tal que $I'[u] = 0$), entonces existe una homotopía que deforma al conjunto $A_{c+\epsilon}$ en el conjunto $A_{c-\epsilon}$ para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeña, de tal modo que la deformación no incluya puntos críticos de I .

Demostración del lema de deformación.

Retomando el ejemplo del *toro*, puede dibujarse un flujo representado por “flechitas” tangentes a la superficie T , pensada esta última como en la figura 20; este campo tangencial corresponde al gradiente de la función altura en T . Nótese que en los puntos p, q, r y s , este flujo tangente se anula, tiene distinto comportamiento en pequeñas vecindades de estos puntos; por lo tanto, si se toman puntos diferentes a éstos sobre el toro, entonces una primera condición natural para poder deformar una pequeña vecindad de éstos en otro conjunto de tamaño menor es justamente que los flujos tangentes no se anulen en una vecindad de puntos regulares de la superficie. Por lo tanto, el primer paso en esta demostración será probar en general esta condición.

En primer lugar, puede asegurarse que existen constantes $\sigma < 1$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\|I'[u]\|_H \geq \sigma \quad \text{para todo } u \in A_{c+\epsilon} - A_{c-\epsilon}. \quad (3.3)$$

Para probar tal aseveración, razónese por contradicción. Si se supone que la relación (3.3) es falsa para cualesquiera constantes $\sigma, \epsilon > 0$, entonces existen sucesiones $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$\sigma_k \longrightarrow 0, \quad \epsilon_k \longrightarrow 0$$

y elementos

$$u_k \in A_{c+\epsilon} - A_{c-\epsilon} \quad (3.4)$$

tales que

$$\|I'[u_k]\|_H \leq \sigma_k. \quad (3.5)$$

De la relación (3.4), se tiene que $\{I[u_k]\}_{k=1}^{\infty}$ está acotado en H debido a que

$$A_{c+\epsilon} - A_{c-\epsilon} = \{u \in H : c - \epsilon \leq I[u] \leq c + \epsilon\}.$$

Además, de la condición (3.5), se tiene que $I'[u_k] \longrightarrow 0$. De acuerdo con la condición de Palais-Smale, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ y u en H tales que

$$u_{k_j} \longrightarrow u \quad \text{en } H.$$

Pero puesto que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$, de las relaciones (3.4) y (3.5), se tiene que en el caso límite

$$I[u] = c, \quad I'[u] = 0.$$

En consecuencia $K_c \neq \emptyset$; una contradicción a la suposición inicial $K_c = \emptyset$. Por lo tanto, (3.3) se cumple para todo $u \in H$.

El siguiente paso es definir la homotopía que deformará subconjuntos acotados de H . Para ello, escójase $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \delta < \epsilon, \quad 0 < \delta < \frac{\sigma^2}{2}. \quad (3.6)$$

Y defínanse

$$\begin{aligned} A &\equiv \{u \in H \mid I[u] \leq c - \epsilon \text{ o } I[u] \geq c + \epsilon\} \\ B &\equiv \{u \in H \mid c - \delta \leq I[u] \leq c + \delta\}. \end{aligned}$$

Considérese además el mapeo $w : H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $w(u) = \text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)$. Sea $v \in H$. Por la Hipótesis I es una función de Lipschitz en H ; por lo tanto, existe una constante positiva $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|I[u] - I[v]\| \leq A \|u - v\|,$$

para todo $u, v \in H$. Obsérvese que

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B),$$

se cumple para todo u en H . Tómense, por ejemplo, $u \in A$ y $b \in B$ (o al contrario). Entonces, para subconjuntos acotados de H ($\|u - v\| \leq K$ para todo u, v en el subconjunto), se tiene que

$$\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B) \geq M \|u - v\| \geq \frac{M}{A} \|I[u] - I[v]\| \geq \frac{M}{A}(\epsilon - \delta),$$

con $M = \frac{\text{dist}(A, B)}{K}$. De este modo, la función w está acotada por abajo en subconjuntos acotados de H . En consecuencia, la función

$$g(u) \equiv \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}, \quad (u \in H).$$

está bien definida (para subconjuntos acotados de H), y satisface

$$\begin{cases} 0 \leq g \leq 1, \\ g = 0 \text{ en } A, \quad g = 1 \text{ en } B. \end{cases} \quad (3.7)$$

Sea además

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Tómese finalmente el mapeo

$$V : H \longrightarrow H$$

definido por

$$V(u) \equiv -g(u)h(\|I'[u]\|)I'[u] \quad (u \in H). \quad (3.9)$$

Y considérese para cada $u \in H$ la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = V(\eta(t)) & (t > 0) \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

De la relación (3.9), se observa que el mapeo $V : H \longrightarrow H$ es acotado y Lipschitz en conjuntos acotados; por lo tanto existe una única solución para todo tiempo $t \geq 0$. Si se escribe

$$\eta = \eta(t, u) = \eta_t(u), \quad (t \geq 0, u \in H)$$

y se restringe a los tiempos $0 \leq t \leq 1$, se observa que si $u \notin I^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$, entonces $u \in A$, por lo que $g(u) \equiv 0$; en consecuencia $V(u) \equiv 0$ y

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad (u \in A)$$

de donde se concluye que η es constante con respecto a t . Tomando el valor de η en cero, se encuentra que $\eta_t(u) \equiv u$ para $u \notin I^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Por lo tanto, la homotopía

$$\eta \in C([0, 1] \times H; H),$$

así definida satisface las condiciones (i) y (ii) del lema 1.

El siguiente paso es comprobar que el valor de $I \in \mathcal{C}$, restringido al mapeo $\eta_t(u)$, es menor que el valor obtenido sin aplicar la homotopía. Para ello, calcúlese

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I[\eta_t(u)] &= (I'[\eta_t(u)], \frac{d}{dt}\eta_t(u)), & (3.10) \\ &= (I'[\eta_t(u)], V(\eta_t(u))), \\ &= (I'[\eta_t(u)], -g(\eta_t(u))h(\|I'[\eta_t(u)]\|)I'[\eta_t(u)]), \\ &= -g(\eta_t(u))h(\|I'[\eta_t(u)]\|)\|I'[\eta_t(u)]\|^2. \end{aligned}$$

Obsérvese

$$\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)] \leq 0 \quad (u \in H, 0 \leq t \leq 1).$$

Por lo que $I[\eta_t(u)]$ es decreciente como función de t , en consecuencia $I[\eta_t(u)] \leq I[\eta_0(u)]$; por lo tanto la condición (iii) se cumple.

El último paso es probar que el conjunto deformado bajo la homotopía resulta ser uno más pequeño contenido en el original.

Tómese algún $u \in A_{c+\delta}$. El propósito es probar

$$\eta_1(u) \in A_{c-\delta}$$

y en consecuencia concluir la condición (iv).

Si $\eta_t(u) \notin B$ para algún $0 \leq t \leq 1$, entonces la prueba se ha terminado debido a que la elección de u implica $I[\eta_t(u)] < c - \delta$ y como $I[\eta_1(u)] \leq I[\eta_t(u)] \leq c - \delta$ se tiene que $\eta_t(u) \in A_{c-\delta}$. Por otro lado, si

$$\eta_t(u) \in B, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

de la relación (3.7), se tiene

$$g(\eta_t(u)) = 1, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

sustituyendo en (3.10)

$$\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)] = -h(\|I'[\eta_t(u)]\|)\|I'[\eta_t(u)]\|^2.$$

Ahora, si $\|I'[\eta_t(u)]\| \geq 1$, entonces de la relación (3.8)

$$h(\|I'[\eta_t(u)]\|) = \frac{1}{\|I'[\eta_t(u)]\|}.$$

En consecuencia, (3.3) implica

$$\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)] = -\|I'[\eta_t(u)]\| \leq -\sigma. \quad (3.11)$$

Por otro lado, si $\|I'[\eta_t(u)]\| \leq 1$, entonces (3.8) implica

$$h(\|I'[\eta_t(u)]\|) = 1.$$

Y de la relación (3.3), se obtiene

$$\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)] = \|I'[\eta_t(u)]\|^2 \leq -\sigma^2. \quad (3.12)$$

Ahora, tomando las relaciones (3.11) y (3.12)

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} I[\eta_t(u)] dt \leq \int_0^1 (-\sigma^2) dt.$$

pues $\sigma < t$. Por lo tanto

$$I[\eta_1(u)] \leq I[u] - \sigma^2 \leq (c + \delta) - \sigma^2,$$

y finalmente, por la relación (3.6)

$$I[\eta_1(u)] \leq c + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma^2 \leq c - \delta.$$

Por lo tanto $\eta_1(u) \in A_{c-\delta}$, con lo que queda demostrada la condición (iv). Con ésto último queda demostrado el lema 1.

□

A continuación será discutido el resultado que garantizará la existencia de puntos críticos no triviales (distintos de $u = \pm 1$), para el funcional (2.1).

3.2 Teorema del Paso de Montaña.

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable, tal que $g(a) = g(b)$, restringida al intervalo $[a, b]$; entonces la función no es monótona en el intervalo $[a, b]$, por lo tanto debe existir un máximo o un mínimo (por lo menos), de $g(x)$ en tal intervalo; es decir, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $g'(c) = 0$. Este resultado es conocido como *El Teorema de Rolle*. Dos posibles casos de tal resultado, están representados por las figuras 24a y 24b.

La generalización de este último resultado es el *teorema de paso de montaña*. Al principio del capítulo se mencionó que el paso de montaña garantiza la existencia de puntos críticos para el funcional (1.33); ¿cuándo estos puntos críticos son puntos silla?; en general, puntos de este tipo no necesariamente existen, a menos que se tenga alguna propiedad de compacidad sobre el espacio; ésta es la condición de Palais-Smale y algunas

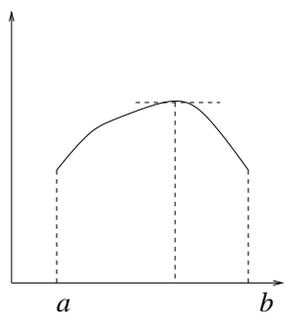


Figura 24a.

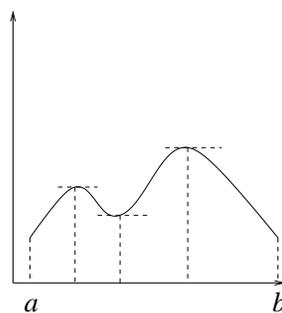
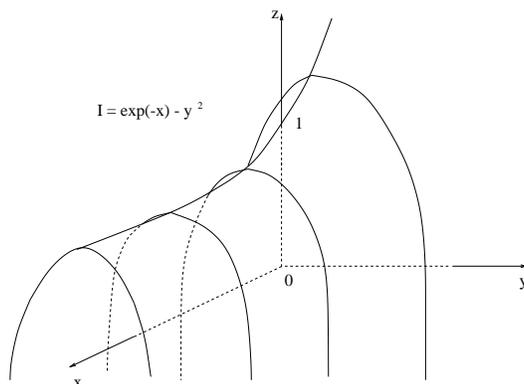


Figura 24b.

suposiciones adicionales. El siguiente es un ejemplo en el que no es posible encontrar el paso de montaña debido a que no se satisface Palais-Smale.

Ejemplo. Considérese la función $I(x, y) = e^{-x} - y^2$. La gráfica de ésta es como la de la figura 25.

Figura 25. Gráfica de $I = \exp(-x) - y^2$.

Defínase el conjunto $I_0 = \{(x, y) : I(x, y) \leq 0\}$. Este último es desconexo; por ejemplo, los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ pertenecen a I_0 , pero no existe el “paso de montaña” de altura mínima 0 para ninguno de los caminos entre ambos puntos (figura 26). Esto se debe a que I no satisface la condición de Palais-Smale; en efecto, considérese la sucesión de caminos $\{\alpha_m\}$, con $\alpha_m(t) = (m, t)$, $-1 \leq t \leq 1$, que conectan a ambas componentes de I_0 , tal que el máximo de I es alcanzado sobre $\{\alpha_m\}$ en los puntos $z_m = (m, 0)$. Entonces $I(z_m) \rightarrow 0$ y $DI(z_m) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$. En este caso, la trayectoria de paso de montaña con menor altura se va al infinito.

Además de la condición de compacidad, es necesario un segundo ingrediente para

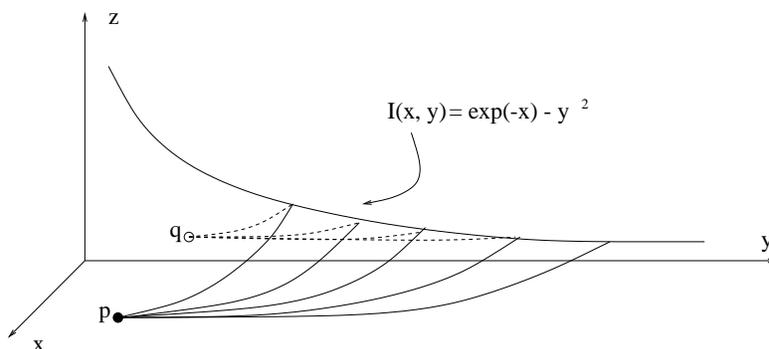


Figura 26. No existe el paso de montaña para p y q en I_0 .

probar el “teorema de paso de montaña”; a saber el “lema de deformación” (lema (1)). Este último es un instrumento sumamente poderoso para probar la existencia de puntos críticos para ciertos funcionales. A continuación será enunciado formalmente el teorema de paso de montaña.

Teorema 2. (de paso de montaña). Supóngase que $I \in \mathcal{C}$ satisface la condición de Palais-Smale. Supóngase además

- (i) $I[0] = 0$.
- (ii) Existen constantes $r, a > 0$ tales que

$$I[u] \geq a \quad \text{si} \quad \|u\| = r.$$

- (iii) Existe un elemento $v \in H$ con

$$\|v\| > r, \quad I[v] \leq 0.$$

Defínase

$$\Gamma \equiv \{g \in C([0, 1]; H) \mid g(0) = 0, g(1) = v\}.$$

Entonces

$$c \equiv \inf_{g \in \Gamma} \left(\max_{0 \leq t \leq 1} I[g(t)] \right)$$

es un valor crítico de I .

Para visualizar este resultado, piénsese que la gráfica de la función $I[u]$ es un paisaje como el de la figura 27.

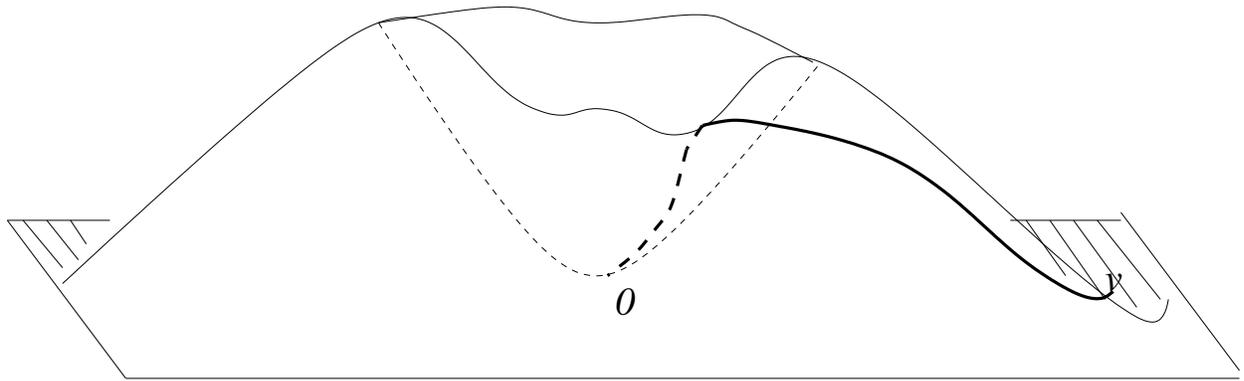


Figura 27.

La idea es buscar un camino g que pase por las montañas, que conecte a 0 con v y que sea el de mínimo esfuerzo, es decir, un punto silla para $I[\cdot]$; tal camino es “el paso de montaña”. Nótese que el teorema (2) garantiza la existencia de un punto crítico correspondiente al “nivel de energía” c , pero éste no necesariamente tiene que ser un verdadero punto silla; tampoco garantiza la existencia del camino óptimo que realice el paso de montaña.

Demostración del teorema del paso de montaña.

La demostración se hará razonando por contradicción y aplicando el teorema de deformación.

En primer lugar, obsérvese que $c \geq a$. El propósito es encontrar de entre todas las trayectorias que unen a 0 con v , aquella que “escale” la menor altura posible; si el valor c no es tal altura, entonces es posible variar las alturas, para encontrar el valor deseado. Por lo tanto, supóngase que c no es un valor crítico de I , es decir

$$K_c = \emptyset.$$

Escójase entonces algún número ϵ lo suficientemente pequeño tal que

$$0 < \epsilon < \frac{a}{2}. \quad (3.13)$$

De acuerdo con el lema de deformación (lema (1)), debe existir una constante

$$0 < \delta < \epsilon$$

y un *homeomorfismo* (mapeo continuo e inyectivo entre dos espacios con inversa continua)

$$\eta : H \longrightarrow H$$

con

$$\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$$

y

$$\eta(u) = u \quad \text{si} \quad u \notin I^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]. \quad (3.14)$$

El siguiente paso es escoger aquellas trayectorias que pasen a alturas no muy lejanas del valor c y que unan a los puntos 0 y v ; es decir, tómesese alguna $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I[g(t)] \leq c + \delta, \quad (3.15)$$

es decir

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I[g(t)] \in A_{c+\delta}.$$

Esta última elección es posible debido a la definición de c como ínfimo de cierto conjunto. Entonces, si se define

$$\hat{g} \equiv \eta \circ g,$$

se observa que la relación (3.14) implica que ésta también pertenece a Γ , puesto que

$$\eta(g(0)) = \eta(0) = 0 \quad y \quad \eta(g(1)) = \eta(v) = v,$$

pues 0 y v no pertenecen a $I^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ debido a la elección (3.13), y a la hipótesis (iii). En consecuencia, la relación (3.15) implica

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I[\hat{g}(t)] \leq c - \delta;$$

es decir

$$\hat{g}(t) \in A_{c-\delta} \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

o bien

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I[\hat{g}(t)] \in A_{c-\delta};$$

ha sido encontrada una trayectoria $\hat{g} \in \Gamma$ cuya altura máxima no excede el valor $c - \delta$; por lo tanto

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \left(\max_{0 \leq t \leq 1} I[g(t)] \right) \leq c - \delta.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, c es un valor crítico de I . El teorema queda demostrado.

□

3.3 Existencia de soluciones.

El propósito ahora es establecer la existencia global de soluciones débiles del funcional (1.32), por lo que esencialmente hay que probar que éste satisface las hipótesis del teorema de paso de montaña.

Un resultado importante de análisis funcional es la *desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*, que asegura la existencia de una constante C dependiente sólo de p y n tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad 1 \leq p < n,$$

para toda función $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, donde p^* es el *conjugado de Sobolev* de p y está determinado por $p^* \equiv \frac{np}{n-p}$. Si se toma un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, con ∂U de clase C^1 y $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u \in L^{p^*}(U)$ y se tiene que $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$, y en este caso C depende de p, n y U . Como corolario de este último, si además $u \in W_0^{1,p}(U)$ para algún $1 \leq p < n$, entonces $\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}$, para todo $q \in [1, p^*]$, C dependiente de p, q, n y U . El caso

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|Du\|_{L^2(U)}, \quad (u \in H_0^1(U))$$

es llamado la *desigualdad de Poincaré*. La demostración de estas desigualdades se puede encontrar en [6], [1], etc.

Obsérvese que el gradiente de u en x está caracterizado por $\nabla u(x) \cdot v = Du(x)v = (Du, v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, por lo tanto, puede escribirse

$$I[u] = \int_U \left(\frac{\varepsilon}{2} |Du|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) d\Omega, \quad u \in H_0^1(U). \quad (3.16)$$

La intención es aplicar el lema de paso de montaña a este último.

Antes de demostrar que el funcional (3.16) satisfase las hipótesis del paso de montaña para funciones $u \in H^1$, considerese el siguiente problema

$$I[u] = \int_U \left(\frac{\varepsilon}{2} |Du|^2 - F(u) \right) d\Omega, \quad u \in H_0^1(U). \quad (3.17)$$

La ecuación de Euler de (3.17) puede ser escrita como

$$\begin{cases} \Delta u = -f(u) & \text{en } U \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases} \quad (3.18)$$

donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$; entonces el funcional (3.17) puede ser utilizado para encontrar soluciones débiles de la ecuación (3.18). Obsérvese que en la ecuación (3.18) se han tomado condiciones de Dirichlet en la frontera y funciones $u \in H_0^1(U)$; recuérdese que el problema original es resolver la ecuación de Euler del funcional (3.16) con condiciones de Neuman en la frontera para funciones $u \in H^1$, pero las soluciones triviales $u = \pm 1$ no pertenecen a H_0^1 . Sin embargo, para resolver el problema

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta u = f(u) & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases}$$

puede ser usado un tratamiento análogo al que aquí será presentado. La utilización del tratamiento para $u \in H_0^1(U)$ es un poco más simple debido a que contempla menos términos en las operaciones de las demostraciones. Supóngase que

$$\begin{cases} |f| \leq C(1 + |z|^p), & |f'| \leq C(1 + |z|^{p-1}) \\ \text{para } 1 < p < \frac{n+2}{n-2}, & \text{para alguna constante } C. \end{cases} \quad (3.19)$$

Además

$$\begin{cases} 0 \leq F(z) \leq \gamma f(z)z & (z \in \mathbb{R}) \\ \text{para alguna constante } \gamma < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.20)$$

Supóngase finalmente que para $0 < a \leq A$

$$a|z|^{p+1} \leq |F(z)| \leq A|z|^{p+1} \quad (z \in \mathbb{R}). \quad (3.21)$$

Por comodidad, a partir de ahora se escribirá H en lugar de $H_0^1(U)$, considerando que la norma en este espacio es

$$\|u\| \equiv \left(\int_U |Du|^2 dx \right)^{1/2},$$

y el producto interior es

$$(u, v) \equiv \int_U Du \cdot Dv dx,$$

(Obsérvese que si se considera el problema con condiciones de Neuman para $u \in H^1(U)$, entonces la norma en este espacio debería además contemplar al término $\sum_{\alpha=1}^k \|D^\alpha u\|_{L^p}$ y el producto interior al término $\sum_{\alpha=1}^k (D^\alpha u, D^\alpha v)$). En consecuencia

$$I[u] = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_U F(u) d\Omega = I_1[u] - I_2[u].$$

La primera afirmación es que $I \in \mathcal{C}$ para todo $u, v \in H$.

Para demostrar ésta, nótese que para todo $u_1, u_2 \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} I_1[u_2] &= \frac{1}{2} \|u_2\|^2 = \frac{1}{2} \|u_1 + (u_2 - u_1)\|^2 = \frac{1}{2} \int_U |D(u_1 + (u_2 - u_1))|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_U (D(u_1 + (u_2 - u_1)), D(u_1 + (u_2 - u_1))) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_U (|Du_1|^2 + 2(Du_1, D(u_2 - u_1)) + |D(u_2 - u_1)|^2) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \int_U (Du_1, D(u_2 - u_1)) d\Omega + \frac{1}{2} \|u_2 - u_1\|^2 \\ &= I_1[u_1] + (u_1, u_2 - u_1) + I_1[u_2 - u_1]; \end{aligned}$$

de donde se observa que

$$I_1[u + h] = I_1[u] + (u, h) + I_1[h];$$

obsérvese que $\frac{I_1[h]}{\|h\|} = \frac{1}{2} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \rightarrow 0$ si $\|h\| \rightarrow 0$, por lo tanto I_1 es diferenciable en u_0 con $DI_1[u] = u$. En consecuencia, $I_1 \in \mathcal{C}$.

Es conveniente introducir un resultado muy simple del análisis funcional que garantiza, bajo ciertas circunstancias, la existencia y unicidad de una solución débil. Tal resultado es conocido como el *teorema de Lax-Milgram* y es consecuencia del teorema de representación de Riesz (véase apéndice).

El teorema de Lax-Milgram asegura que para $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ acotado en H (H cualquier espacio de Hilbert), existe un único elemento $u \in H$ tal que $B[u, v] = \langle f, u \rangle$ para todo $v \in H$, donde $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo bilineal tal que $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ ($u, v \in H$) y $\beta \|u\|^2 \leq B[u, v]$ ($u \in H$), para ciertas constantes $\alpha, \beta > 0$.

En consecuencia, debido a Lax-Milgram, para toda $v^* \in H^{-1}(U)$ (véase el apéndice), la ecuación

$$\begin{cases} \Delta v = -v^* & \text{en } U \\ v = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases} \quad (3.22)$$

tiene una única solución $v \in H_0^1(U)$. Escribáse $v = Tv^*$ para resaltar que el mapeo $T : H^{-1}(U) \rightarrow H_0^1(U)$ es un isomorfismo. Nótese en particular que si $w \in L^{2n/n+2}(U)$, entonces el funcional lineal w^* definido por

$$\langle w^*, u \rangle = \int_U wu \, d\Omega \quad (u \in H_0^1(U)), \quad (3.23)$$

pertenece a $H^{-1}(U)$.

Por otro lado, obsérvese que de (3.19) se tiene

$$p \frac{2n}{n+2} < \left(\frac{n+2}{n-2} \right) \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2^*,$$

por lo que el máximo exponente al que puede elevarse $u \in U$, sigue garantizando que $f(u) \in L^{2n/n+2}(U) \subset H^{-1}(U)$ si $u \in H_0^1(U)$.

A continuación será demostrado que si $u \in H_0^1(U)$, entonces

$$I_2'[u] = T(f(u)).$$

Para ello, nótese que

$$F(a+b) = F(a) + f(a)b + b^2 \int_0^1 (1-s)f'(a+sb) ds.$$

Aplicando aproximación de Taylor con residuo. En consecuencia, para cada $u_2 \in H_0^1(U)$

$$\begin{aligned} I_2[u_2] &= \int_U F(u_2) d\Omega = \int_U F(u_1 + (u_2 - u_1)) d\Omega \\ &= \int_U (F(u_1) + f(u_1)(u_2 - u_1)) d\Omega + R, \end{aligned}$$

entonces, debido a la relación (3.22) y a la primera identidad de Green, se tiene

$$\begin{aligned} I_2[u_2] &= I_2[u_1] - \int_U (\Delta T f(u_1))(u_2 - u_1) d\Omega + R \\ &= I_2[u_1] + \int_U \nabla T f(u_1) \cdot \nabla(u_2 - u_1) d\Omega + R \\ &= I_2[u_1] + \int_U DT f(u_1) \cdot D(u_2 - u_1) d\Omega + R. \end{aligned}$$

Obsérvese que para el residuo $R = \int_U [\int_0^1 (1-s)f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds](u_2 - u_1)^2 d\Omega$, debido a (3.19), se tiene

$$\begin{aligned} |R| &\leq \int_U \int_0^1 |(1-s)f'(u_1 + s(u_2 - u_1))| ds (u_2 - u_1)^2 d\Omega \\ &\leq \int_U \int_0^1 C(1 + |u_1 + s(u_2 - u_1)|)^{p-1} (1-s) ds (u_2 - u_1)^2 d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_U C \left[\int_0^1 (1 + |u_1|^{p-1} + |u_2 - u_1|^{p-1})(1-s) ds \right] (u_2 - u_1)^2 d\Omega \\
&\leq \int_U C \left(s + s|u_1|^{p-1} + \frac{s^2}{2}|u_2 - u_1|^{p-1} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2}|u_1|^{p-1} - \frac{s^3}{3}|u_2 - u_1|^{p-1} \right)_0^1 (u_2 - u_1)^2 d\Omega \\
&\leq \int_U C (1/2 + 1/2|u_1|^{p-1} + 1/6|u_2 - u_1|^{p-1}) (u_2 - u_1)^2 d\Omega \\
&\leq \int_U C (1 + |u_1|^{p-1} + |u_2 - u_1|^{p-1}) (u_2 - u_1)^2 d\Omega
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|R| \leq \int_U C(u_2 - u_1)^2 + |u_2 - u_1|^{p+1} d\Omega + \int_U C|u_1|^{p-1}(u_2 - u_1)^2 d\Omega;$$

tomando $\frac{1}{p} = \frac{(p-1)}{(p+1)}$ y $\frac{1}{p^*} = \frac{2}{(p+1)}$, se tiene que $1/p^* + 1/p = 1$; aplicando la desigualdad de Hölder (ver apéndice)

$$|R| \leq C \int_U (u_2 - u_1)^2 + |u_2 - u_1|^{p+1} d\Omega + C \left(\int_U (|u_1|^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}} d\Omega \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_U (|u_2 - u_1|^2)^{\frac{p+1}{2}} d\Omega \right)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Obsérvese que $p+1 < 2^*$; por lo tanto, aplicando la desigualdad de Sobolev

$$\begin{aligned}
|R| &\leq C \int_U (u_2 - u_1)^2 + |u_2 - u_1|^{p+1} d\Omega + C (\|u_1\|_{L^{p+1}})^{p-1} (\|u_2 - u_1\|_{L^{p+1}})^2 \\
&\leq C \int_U (u_2 - u_1)^2 + |u_2 - u_1|^{p+1} d\Omega + C (\|Du_1\|_{L^2})^{p-1} (\|D(u_2 - u_1)\|_{L^2})^2 \\
&= C \int_U (u_2 - u_1)^2 + |u_2 - u_1|^{p+1} d\Omega + C (\|u_1\|_H)^{p-1} (\|u_2 - u_1\|_H)^2
\end{aligned}$$

de donde se observa que $|R| \rightarrow 0$ si $u_2 \rightarrow u_1$, y por lo tanto

$$I_2[u_2] = I_2[u_1] + (T(f(u_1)), u_2) + o(\|u_2 - u_1\|),$$

por lo que I_2 es diferenciable en u_1 con $DI_2[u_1] = T(f(u_1))$.

Nótese que si $u, w \in H_0^1(U)$ con $\|u\|, \|w\| \leq L$, entonces

$$\begin{aligned} \|I_2'[u] - I_2'[w]\| &= \|Tf(u) - Tf(w)\|_{H^1(U)} \\ &= \|f(u) - f(w)\|_{H^{-1}(U)} \\ &= \sup\{\langle f(u) - f(w), u - w \rangle : u - w \in H_0^1, \|u - w\|_{H_0^1} \leq 1\}, \end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|I_2'[u] - I_2'[w]\| &\leq \|f(u) - f(w)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(U)} \|u - w\|_{L^2} \\ &\leq \|f(u) - f(w)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(U)}. \end{aligned}$$

En consecuencia, utilizando la observación (3.18), para cada $x \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(w)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(U)} &= \left(\int_U |f(u) - f(w)|^{\frac{2n}{n+2}} d\Omega \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &= \left(\int_U (|f'(\xi)| |u - w|)^{\frac{2n}{n+2}} d\Omega \right)^{\frac{n+2}{2n}} \quad (\xi \in [u(x), w(x)]; x \text{ fija}) \\ &\leq \left(\int_U (C(1 + |\xi|^{p-1}) |u - w|)^{\frac{2n}{n+2}} d\Omega \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\leq C \left(\int_U ((1 + |u|^{p-1} + |w|^{p-1}) |u - w|)^{\frac{2n}{n+2}} d\Omega \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\leq C(L) \|u - w\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(U)} \\ &\leq C(L) \|u - w\|_{L^{2^*}(U)} \\ &\leq C(L) \|u - w\|, \end{aligned}$$

es decir, $I_2' : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ es de Lipschitz en conjuntos acotados; por lo tanto $I_2 \in \mathcal{C}$ y finalmente $I \in \mathcal{C}$.

El siguiente paso es verificar que $I[u]$ satisface la condición de Palais-Smale. Para ello, supóngase que $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(U)$ es una sucesión que satisface

$$\{I[u_k]\}_{k=1}^{\infty} \text{ acotada,} \quad (3.24)$$

y

$$I'[u_k] \longrightarrow 0 \text{ en } H_0^1(U).$$

De acuerdo a lo anterior

$$u_k - T(f(u_k)) \longrightarrow 0 \text{ en } H_0^1(U).$$

Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} |(I'[u_k], v)| &\leq \|I'[u_k]\|_{H^{-1}} \|v\|_{H_0^1} \\ &\leq \varepsilon \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

para k suficientemente grande.

Obsérvese que si en la ecuación (3.22) se multiplica por una función $u \in H_0^1$ y se integra sobre todo U se obtiene

$$\int_U u \Delta T v^* d\Omega = - \int_U u v^* d\Omega,$$

integrando por partes (1a. fórmula de Green)

$$\int_U Du \cdot DT v^* d\Omega = \int_U u v^* d\Omega;$$

por lo que

$$\begin{aligned} |(I'[u_k], v)| &= |(I'_1[u_k] - I'_2[u_k], v)| \\ &= |(u_k - T(f(u_k)), v)| \\ &= \left| \int_U (Du_k \cdot Dv - \int_U DT(f(u_k)) \cdot Dv d\Omega \right| \\ &= \left| \int_U (Du_k \cdot Dv - f(u_k)v) d\Omega \right|, \end{aligned}$$

y por lo tanto, para k suficientemente grande

$$\left| \int_U (Du_k \cdot Dv - f(u_k)v) d\Omega \right| \leq \varepsilon \|v\| \quad (v \in H_0^1(U)).$$

Haciendo $v = u_k$

$$\left| \int_U (|Du_k|^2 - f(u_k)u_k) d\Omega \right| \leq \varepsilon \|u_k\|$$

para todo $\varepsilon > 0$ y k suficientemente grande. En particular, si $\varepsilon = 1$

$$\int_U f(u_k)u_k d\Omega \leq \|u_k\| + \|u_k\|^2, \quad (3.25)$$

para k suficientemente grande. Por otro lado, la relación (3.24) implica

$$\frac{1}{2} \|u_k\|^2 - \int_U F(u_k) d\Omega \leq M < \infty,$$

para toda k y alguna constante M , por lo que (utilizando (3.20) y (3.25)), se deduce que

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 &\leq M + 2 \int_U F(u_k) d\Omega = M + 2 \int_U \gamma f(u_k)u_k d\Omega \\ &\leq M + 2\gamma(\|u_k\| + \|u_k\|^2). \end{aligned}$$

Como $2\gamma < 1$, se tiene que $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ está acotado en $H_0^1(U)$. En consecuencia, existen una subsucesión $\{u_k\}_{j=1}^\infty$ y $u \in H_0^1(U)$ con

$$\begin{aligned} u_k &\longrightarrow u \quad \text{débilmente en } H_0^1(U), \\ u_k &\longrightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^{p+1}(U) \quad (\text{véase [1], [6], etc.}), \end{aligned}$$

puesto que $p+1 < 2n/(n-2) = 2^*$. Pero entonces

$$f(u_k) \longrightarrow f(u) \text{ fuertemente en } H^{-1}(U),$$

y por lo tanto

$$T(f(u_k)) \longrightarrow T(f(u)) \text{ fuertemente en } H_0^1(U).$$

En consecuencia, $u_k - T(f(u_k)) \longrightarrow 0$ en $H_0^1(U)$ implica

$$u_k \longrightarrow u \text{ fuertemente en } H_0^1(U).$$

y por lo tanto el funcional (3.17) satisface la definición 8 (condición de Palais-Smale).

Sólo resta comprobar que se cumplen las hipótesis (i), (ii) y (iii) del teorema del paso de montaña. Claramente, (i) se satisface debido a que $I[0] = I_1[0] + I_2[0] = 0$. Para la hipótesis (ii), supóngase que $u \in H_0^1(U)$ y $\|u\| = r$, con $r > 0$. Entonces

$$I[u] = I_1[u] - I_2[u] = \frac{r^2}{2} - I_2[u].$$

Como $p + 1 < 2^*$, la hipótesis (3.21) implica

$$\begin{aligned} |I_2[u]| &= \left| \int_U F(u) d\Omega \right| \\ &\leq A \int_U |u|^{p+1} d\Omega \\ &\leq A \left(\int_U |u|^{2^*} d\Omega \right)^{\frac{p+1}{2^*}} \\ &\leq C \|u\|^{p+1} \\ &\leq Cr^{p+1}. \end{aligned}$$

Entonces

$$I[u] = \frac{r^2}{2} - Cr^{p+1} \geq \frac{r^2}{4}.$$

Para $r > 0$ suficientemente pequeña, puesto que $p + 1 > 2$. Finalmente, haciendo $a \equiv \frac{r^2}{4}$ se satisface (ii) completamente.

Ahora, para la hipótesis (iii), escójase algún elemento $u \in H$ tal que $u \neq 0$. Supóngase $v \equiv tu$, para alguna $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} I[v] &= I_1[tu] - I_2[tu] \\ &= t^2 I_1[u] - \int_U F(tu) d\Omega \\ &\leq t^2 I_1[u] - At^{p+1} \int_U |u|^{p+1} d\Omega; \end{aligned}$$

en el último renglón se ha utilizado la hipótesis (3.21). Por lo tanto, $I[v] < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Queda satisfecha la hipótesis (iii).

Por lo tanto, al ser satisfechas las hipótesis del paso de montaña, entonces existe una función $u \in H_0^1(U)$, $u \neq 0$ tal que

$$I'[u] = u - T(f(u)) = 0.$$

En particular, para cada $v \in H_0^1(U)$ se tiene

$$\int_U Du \cdot Dv d\Omega = \int_U f(u)v dx,$$

y en consecuencia, u es una solución débil de (3.18) (véase el apéndice).

□

Finalmente, considérese nuevamente el funcional (3.16). Para aplicarle a éste un tratamiento análogo al anterior, es conveniente hacer algunas observaciones. Recuérdese

que para resolver el problema (3.18) se tomaron funciones $u \in H_0^1$ pero los mínimos $u = \pm 1$ no pertenecen a H_0^1 ; sin embargo, para $u \in H^1$ sólo debe considerarse la norma

$$\|u\| \equiv \left(\int_U |Du|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{\alpha=1}^k \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

y el producto interior

$$(u, v) \equiv \int_U Du \cdot Dv dx + \sum_{\alpha=1}^k (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

y seguir los mismos procedimientos de la demostración anterior. Por otro lado, debido a que para (3.16) $F(u) = \frac{1}{\varepsilon} W(u)$ y el potencial W es no negativo, la hipótesis (3.20) es inecesaria pues $I[u] \geq \|u\|_{H_0^1}$. Obsérvese además que (3.20) no se cumple para el ejemplo $W(u) = (1 - u^2)^2$ visto en el capítulo 2. Finalmente, nótese que $u = \pm 1$ son los puntos críticos para los cuales $I[u]$ es mínimo, por lo que estos valores son los que hacen que se cumplan las hipótesis (i) y (ii) del teorema del paso de montaña. El resto de la demostración es totalmente análoga.

Por lo tanto, puede concluirse la existencia de una función $u \in H^1(U)$, $u \neq \pm 1$ tal que

$$I'[u] = u - T(f(u)) = 0.$$

En particular, para cada $v \in H^1(U)$ se tiene

$$\int_U Du \cdot Dv d\Omega = \int_U f(u)v dx,$$

y en consecuencia, u es una solución débil de

$$I[u] = \int_U \left(\frac{\varepsilon}{2} |Du|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) d\Omega, \quad u \in H^1(U).$$

□

Capítulo 4

Algunas soluciones numéricas.

En agosto de 1998, los Doctores Pablo Padilla y Clara Garza propusieron un modelo del movimiento de arena que oscila verticalmente (véase [2]). Para ello utilizaron la ecuación parabólica no lineal

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u + W'(u) = 0 & \text{en } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $u(x)$ es la variable de estado que representa la altura de la superficie de arena sobre algún nivel de referencia y W es una densidad local de energía potencial. Obsérvese que si se toman soluciones estacionarias, entonces las soluciones de equilibrio (independientes del tiempo) de (4.1) corresponden a puntos críticos de

$$E[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx.$$

Al igual que en este trabajo, ellos consideran $W(u)$ como un potencial biestable. Obsérvese nuevamente que para garantizar que $E(u)$ permanezca acotado, es necesario que $u(x)$ esté muy próximo a los ceros de W y en consecuencia las transiciones que separan a estos dos valores aumentan la formación de patrones. La intención es presentar algunos experimentos numéricos que hagan válidos los resultados presentados en los dos capítulos anteriores, basados en los métodos numéricos utilizados por los doctores Pablo Padilla, Clara Garza y Hector D. Cenicerros.

El programa utilizado fué propuesto originalmente por el Dr Héctor D. Cenicerros para resolver el problema con condiciones homogéneas de Dirichlet en la frontera para

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + s(t)W(u),$$

(W una cúbica), en un rectángulo de lado 1; éste está programado en Fortran y resuelve la ecuación parabólica, utilizando Crank-Nicholson, Gradientes Conjugados y se grafica usando Matlab. El programa fué modificado por la Doctora Clara Garza para obtener soluciones a la ecuación de Euler del funcional (3.16). A continuación será presentada la modificación realizada al programa original.

```

program dirichlet
c homogeneous dirchlet problem for Ut -eta*(Uxx + Uyy) + s(t)W(U)
c W is a cubic. The problem is solved in the unit square.
c Crank-Nicholson scheme is used and the linear system
c is solved with CG.
c
c written by Hector D. Ceniceros
c 10/24/96.
c con modificaciones de Clara Garza jul 99.
c
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z), INTEGER(i-n)
PARAMETER(NMAX=256, MMAX = NMAX*NMAX, CGTOL = 1.d-6)

DOUBLE PRECISION u(MMAX)
DOUBLE PRECISION u0(MMAX), u1(MMAX)

DOUBLE PRECISION b(MMAX), wp(MMAX)

open(unit=50,file='u.in')
open(unit=60,file='u.out')

w = 1.d0
aw = 1.d0
c aw = 10.d0
c bw = 10.d0
bw = -1.d0
eta = 0.01d0
apb = aw + bw

```

```

atb = aw*bw
c   give numerical parameters
    write(*,*)'N,dt,Tf'
    read(*,*)N,dt,Tf
    jsteps = int(Tf/dt + 0.000001d0)
    nodes = N*N
    M = N-1
    inodes = M*M
    h = 1.d0/N
    h2 = h*h
    flambda = h2/(eta*dt)
    c1 = flambda -4.d0
    c2 = 2.d0*h2/eta
    write(*,*)'M,inodes',M,inodes
    write(*,*)
c   get initial data u0
    call initial(inodes,u0)
c   interior points
    do i=1,M
        xi = dble(i)*h
        write(50,*)
        do j=1,M
            index = i + (j-1)*M
            yj = dble(j)*h
            write(50,*)xi,yj,u0(index)
        end do
    end do

c
c   one step of forward Euler
c
    fac = eta*dt/h2
    dt2 = 2.d0*dt
    t0 = 0.d0
    call nonlinear(inodes,w,t0,apb,atb,u0,wp)
c   first row
c   write(*,*)'u0(M+1)',u0(M+1)
    u(1) = u0(1)+fac*(-4.d0*u0(1)+u0(2)+u0(M+1))-dt2*wp(1)
    do i=2,M-1
        u(i) = u0(i)+fac*(u0(i-1)-4.d0*u0(i)+u0(i+1)+u0(i+M))-dt2*wp(i)
    end do

```

```

u(M) =u0(M)+fac*(u0(M-1)-4.d0*u0(M)+u0(2*M))-dt2*wp(M)
c  rows two to one before last one
do i=M+1,inodes-M
  iflag = mod(i,M)
  iflag2 = mod(i-1,M)
  if(iflag .NE. 0 .AND. iflag2 .NE. 0) then
    u(i) = u0(i)+fac*(u0(i-1)-4.d0*u0(i)+u0(i+1)+u0(i-M)+u0(i+M))
&      -dt2*wp(i)
  else if(iflag .EQ. 0) then
    u(i) = u0(i)+fac*(u0(i-1)-4.d0*u0(i)+u0(i-M)+u0(i+M))
&      -dt2*wp(i)
  else if(iflag2 .EQ. 0) then
    u(i) = u0(i)+fac*(u0(i+1)-4.d0*u0(i)+u0(i-M)+u0(i+M))
&      -dt2*wp(i)
  endif
end do
c  last row
ileft = inodes -M + 1
u(ileft)=u0(ileft)+fac*(-4.d0*u0(ileft)+u0(ileft+1)+u0(ileft-M))
&      -dt2*wp(ileft)
do i=ileft+1,inodes-1
  u(i) =u0(i)+fac*(u0(i-1)-4.d0*u0(i)+u0(i+1)+u0(i-M))-dt2*wp(i)
end do
ir = inodes
u(ir)=u0(ir)+fac*(u0(ir-1)-4.d0*u0(ir)+u0(ir-M))-dt2*wp(ir)
c  end of first time step
c
c  At each time step we solve Au = b to update u
c
do i=1,inodes
  u1(i) = u(i)
end do
do j=1,jsteps
  t0 = dble(j-1)*dt
  call nonlinear(inodes,w,t0,apb,atb,u1,wp)
  call getb(M,inodes,c1,c2,u0,wp,b)
  do i=1,inodes
    u(i) = 2.d0*u1(i)-u0(i)
  end do
  call cg(M,inodes,flambda,b,u,CGTOL,iter)
  do i=1,inodes

```

```

        u0(i) = u1(i)
        u1(i) = u(i)
    end do
    write(*,*)'time=',dble(j)*dt,'  iterations=',iter

end do

c
c write sln at t=jstep*dt ~ TF
c interior points
do i=1,M
    xi = dble(i)*h
    write(60,*)
    do j=1,M
        index = i + (j-1)*M
        yj = dble(j)*h
        write(60,*)xi,yj,u(index)
    end do
end do

STOP
END

c *****
SUBROUTINE getb(M,inodes,c1,c2,u,wp,b)
c *****
c PURPOSE:
c     Computes right hand side of Au=b.
c     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z), INTEGER(i-n)
c     DOUBLE PRECISION u(1),wp(1),b(1)

b(1) = c1*u(1) + u(2) + u(M+1)-c2*wp(1)
do i=2,M-1
    b(i) = u(i-1)+c1*u(i) + u(i+1) + u(i+M) -c2*wp(i)
end do
b(M) = u(M-1)+c1*u(M) + u(2*M) -c2*wp(M)
do i=M+1,inodes-M
    iflag = mod(i,M)
    iflag2 = mod(i-1,M)
    if(iflag .NE. 0 .AND. iflag2 .NE. 0) then
        b(i) = u(i-1)+c1*u(i) + u(i+1) + u(i-M)+ u(i+M) -c2*wp(i)
    else if(iflag .EQ. 0) then
        b(i) = u(i-1)+c1*u(i) + u(i-M)+ u(i+M) -c2*wp(i)
    end if
end do

```

```

    else if(iflag2 .EQ. 0) then
      b(i) = c1*u(i) + u(i+1) + u(i-M)+ u(i+M) -c2*wp(i)
    endif
  end do
  ileft = inodes -M + 1
  b(ileft) = c1*u(ileft) + u(ileft+1) + u(ileft-M)-c2*wp(ileft)
  do i=ileft+1,inodes-1
    b(i) = u(i-1)+c1*u(i) + u(i+1) + u(i-M) -c2*wp(i)
  end do
  ir = inodes
  b(ir)= u(ir-1)+c1*u(ir) + u(ir-M) -c2*wp(ir)
  return
END
C *****
SUBROUTINE nonlinear(inodes,w,t,apb,atb,u,wp)
C *****
C PURPOSE:
C     Compute Au for the elliptic part.
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z), INTEGER(i-n)
  DOUBLE PRECISION u(1), wp(1)

  pi2 = 8.d0*atan(1.d0)
  st = sin(pi2*t/w)
  do i=1,inodes
C     wp(i) = st*(u(i)**3 -apb*u(i)*u(i) + atb*u(i))
C     Creo que con + se hacen interfases y con - picos
    wp(i) = (u(i)**3 -apb*u(i)*u(i) + atb*u(i))
  end do
  return
END
C *****
SUBROUTINE initial(inodes,u)
C *****
C PURPOSE:
C     Give the initial condition
C
C     Para probar cambio cond. ini. a 0.
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z), INTEGER(i-n)
  DOUBLE PRECISION u(1)

```

```

do i=1,inodes/2
  u(i) = 1.2d0
end do
do i=inodes/2+1,inodes
  u(i) = -1.2d0
end do
RETURN
END
c *****
SUBROUTINE cg(M,inodes,flambda,b,u,TOL,iter)
c *****
c Conjugate gradient routine
c implicit double precision (a-h,o-z), integer(i-n)
c double precision u(1),b(1)

parameter(MMAX=256,NM=MMAX*MMAX,JMAX=1000)
double precision r(NM),p(NM),q(NM),Ar(NM)

c initialize
call matrix_vector(M,inodes,flambda,u,q)
do i=1,inodes
  r(i) = b(i) - q(i)
  p(i) = r(i)
end do
call matrix_vector(M,inodes,flambda,r,q)
call inner(inodes,r,r,rs1)
write(*,*)'rs1',rs1
call inner(inodes,p,q,pq)
write(*,*)'pq',pq
if (pq .EQ. 0.d0)pause 'CG:trouble'
alpha = rs1/pq
c Begin main computation loop
do j=1,JMAX
  do i=1,inodes
    u(i) = u(i) + alpha*p(i)
    r(i) = r(i) - alpha*q(i)
  end do
  call inner(inodes,p,p,p2)
  test = alpha*sqrt(p2)
  if (test .LT. 0.d0)pause 'CG:possible trouble'
  if(test .LT. TOL)GOTO 60

```

```

        call inner(inodes,r,r,rs2)
        beta = rs2/rs1
        call matrix_vector(M,inodes,flambda,r,Ar)
        do i=1,inodes
            p(i) = r(i) + beta*p(i)
            q(i) = Ar(i) + beta*q(i)
        end do
        call inner(inodes,p,q,pq)
        alpha = rs2/pq
        rs1 = rs2
    end do
60  continue
    iter =j-1
    return
    END
C *****
subroutine inner(N,p,q,pq)
C *****
implicit double precision (a-h,o-z), integer(i-n)
double precision p(1),q(1)

pq = 0.d0
do i=1,N
    pq = pq + p(i)*q(i)
end do
return
END
C *****
SUBROUTINE matrix_vector(M,inodes,flambda,u,Au)
C *****
C PURPOSE:
C     Compute Au for the elliptic part.
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,o-z), INTEGER(i-n)
DOUBLE PRECISION u(1), Au(1)

c1 = flambda + 4.d0
Au(1) = c1*u(1) - u(2) - u(M+1)
do i=2,M-1
    Au(i) = -u(i-1)+c1*u(i) - u(i+1) - u(i+M)
end do

```

```

Au(M) = -u(M-1) + c1*u(M) - u(2*M)
do i=M+1,inodes-M
  iflag = mod(i,M)
  iflag2 = mod(i-1,M)
  if(iflag .NE. 0 .AND. iflag2 .NE. 0) then
    Au(i) = -u(i-1) + c1*u(i) - u(i+1) - u(i-M)- u(i+M)
  else if(iflag .EQ. 0) then

    Au(i) = -u(i-1) + c1*u(i) - u(i-M)- u(i+M)
  else if(iflag2 .EQ. 0) then
    Au(i) = c1*u(i) - u(i+1) - u(i-M)- u(i+M)
  endif
end do
ileft = inodes -M + 1
Au(ileft) = c1*u(ileft) - u(ileft+1) - u(ileft-M)
do i=ileft+1,inodes-1
  Au(i) = -u(i-1) + c1*u(i) - u(i+1) - u(i-M)
end do
ir = inodes
Au(ir)= -u(ir-1) + c1*u(ir) - u(ir-M)
RETURN
END
C *****
subroutine output(M,U)
C *****
implicit double precision (a-h,o-z), integer (i-n)
double precision U(1)
do j=1,M
  j1 = j-1
  write(15,4000)j
  write(15,3000)(U(j1*M+i),i=1,M)
  write(15,*)']];'
end do
3000 format(2x,e24.17)
4000 format('U(:,',i4, ') = [ ' )
return
END

```

Nuevamente, se están usando las condiciones de frontera de Dirichlet. Obsérvese que si en la ecuación parabólica (4.1) se toman soluciones estacionarias, entonces para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $u = 0$ es una solución que resuelve la ecuación elíptica $-\varepsilon^2 \Delta u + W'(u) = 0$;

por lo tanto, debido a que el interés es aproximar la transición al rededor de $u = 0$, no es tan importante si se toman condiciones de Dirichlet o de Neuman en la frontera para tiempos pequeños, razón por la cual se utilizó este programa para tal modelación (además por razones prácticas fué mucho más sencillo utilizar la codificación presentada observando que cualitativamente no es tan importante cuales condiciones de frontera sean utilizadas).

Si el Potencial $W(u)$ tiene forma de “W”, el programa permite visualizar la formación de patrones (figuras 31, 32 y 33), mientras que si $W(u)$ tiene forma de “M” se observa la formación de “picos” (figuras 29 y 30).

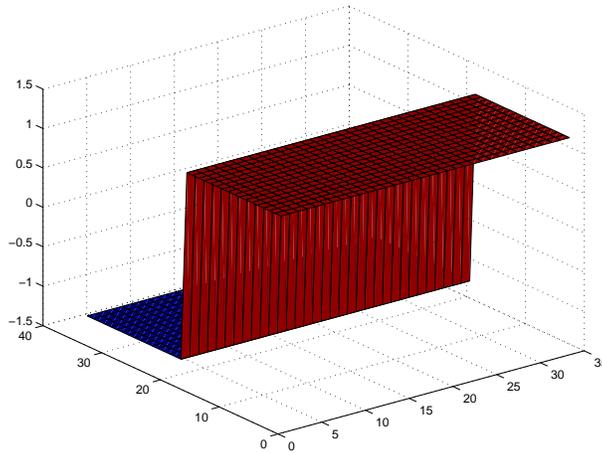


Figura 28. Condiciones iniciales para el potencial en forma de “W” y en forma de “M”.

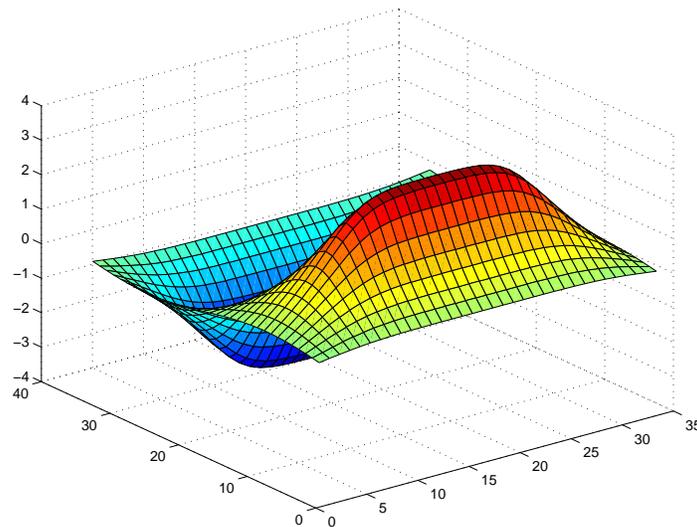


Figura 29. Tiempo final 0.6 para el potencial en forma de “M”.

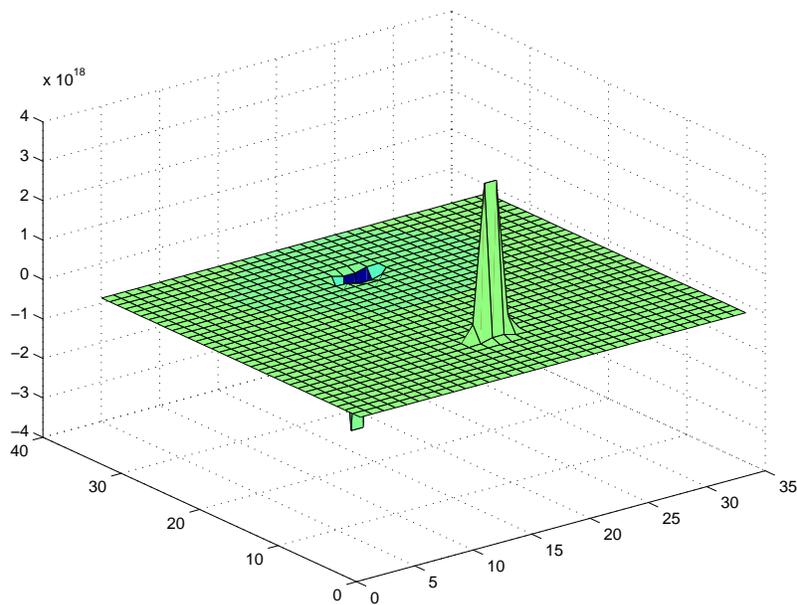


Figura 30. Tiempo final 0.66 para el potencial en forma de "M".

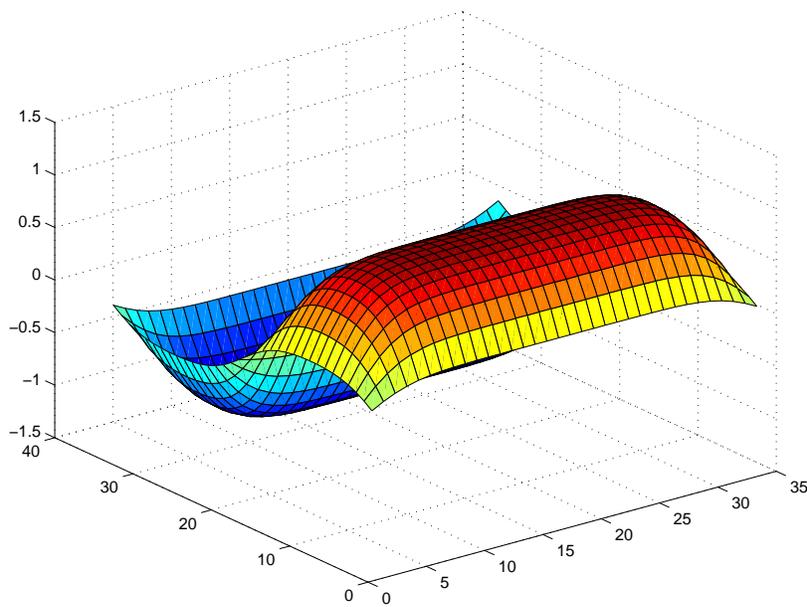


Figura 31. Tiempo final 0.6 para el potencial en forma de "W".

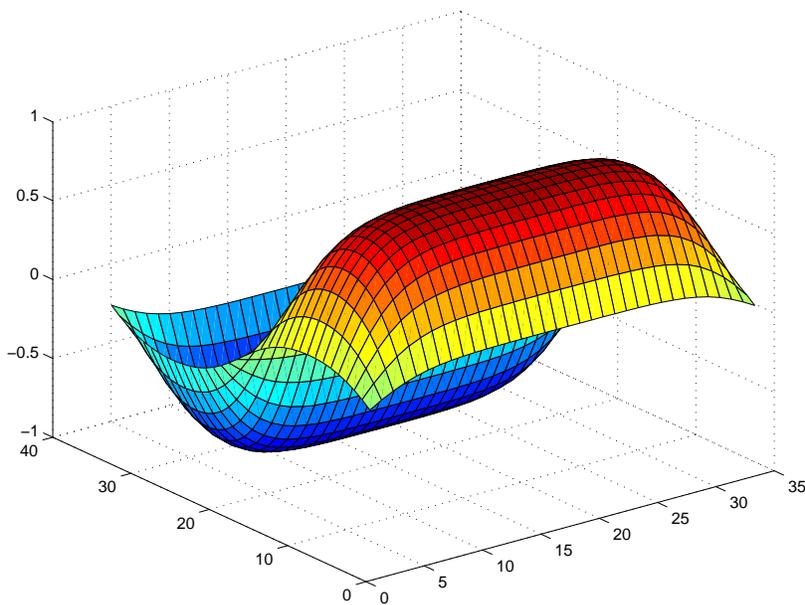


Figura 32. Tiempo final 1 para el potencial en forma de "W".

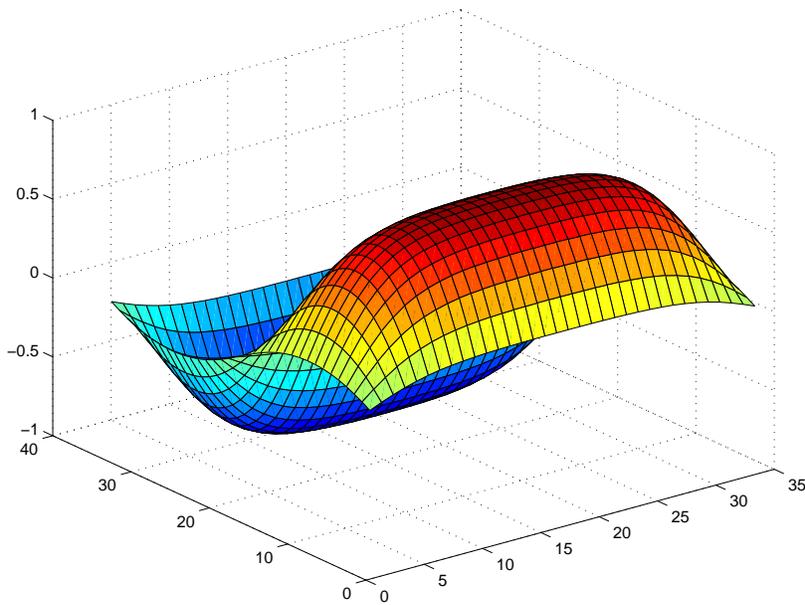


Figura 33. Tiempo final 2 para el potencial en forma de "W".

Apéndice A

Espacios de Sobolev.

A.1 Motivación.

Considérese el siguiente problema. Dada una función $f \in C([a, b])$ hállese $u(x)$ tal que

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } [a, b]; \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Una solución *clásica* del problema es una función de clase C^2 en $[a, b]$ que cumple (A.1) en el sentido usual. Aunque (A.1) puede ser resuelto integrando directamente, la intención es ilustrar un método a partir de este ejemplo elemental.

Multiplíquese (A.1) por alguna función $\phi \in C^1([a, b])$ e intégrese por partes sobre el intervalo $[a, b]$; entonces

$$\int_a^b u' \phi' dx + \int_a^b u \phi dx = \int_a^b f \phi dx \quad \forall \phi \in C^1([a, b]), \quad \phi(a) = \phi(b) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Obsérvese que (A.2) tiene sentido si $u \in C^1([a, b])$ (En (A.1) se supone u dos veces continuamente diferenciable); por lo tanto, si se resuelve la ecuación integral (A.2), la pregunta natural sería bajo que condiciones esta solución resuelve (A.1). Por el momento, llámese a una solución a (A.2) simplemente una solución *débil*.

La intención es introducir un enfoque variacional a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales que permita cumplir varios propósitos. Primero, es necesario precisar la noción

de solución débil, para lo cual, los *espacios de Sobolev* serán la herramienta básica; en segundo lugar, es necesario saber bajo qué condiciones es posible garantizar la existencia y unicidad de una solución débil, para posteriormente, poder demostrar si ésta es de clase C^2 (esto se garantiza a través de un resultado de *regularidad*). Finalmente, se desearía recuperar la solución clásica. Para responder a estos requerimientos, es necesario estudiar la teoría de los espacios de Sobolev.

A.2 Definiciones previas y notación.

Antes de continuar, serán introducidas algunas definiciones y la notación que se usará a largo de este apéndice.

A partir de ahora, Ω designará un abierto de \mathbb{R}^n , con la medida de *Lebesgue*. Para consultar los conceptos de *función integrable*, *función medible* y *conjunto de medida cero* se recomienda ver por ejemplo [16], [11], etc. Sea $L^1(\Omega)$ (o simplemente L^1), el conjunto de funciones integrables sobre Ω con valores en \mathbb{R} . Sea

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Habitualmente, se identifican dos funciones de L^1 que coinciden en c.t.p. (casi todo punto), excepto en un conjunto de medida cero. Es necesario conocer algunos resultados clásicos de integración. A continuación serán mencionados. Para consultar las demostraciones de éstos, véase [1], [11], [16], etc.

Teorema 1. (*De convergencia monótona*). Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones de L^1 tal que $\sup_n \int_{\Omega} f_n < \infty$. Entonces $f_n(x)$ converge a $f(x)$ c.t.p. en Ω ; además $f \in \Omega$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Teorema 2. (*De la convergencia dominada de Lebesgue*). Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^1 . Supóngase que

$$\text{i). } f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \text{c.t.p. en } \Omega;$$

ii). Existe una función $g \in L^1$ tal que para cada n , $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ c.t.p. de Ω .
Entonces $f \in L^1$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Lema 1. (*De Fatou*). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de L^1 tal que

i). Para toda n , $f_n(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω ;

ii). $\sup_n \int_{\Omega} f_n < \infty$;

Para todo punto $x \in \Omega$, escríbase $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Entonces $f \in L^1$ y

$$\int_{\Omega} f \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, dx.$$

Notación. Sea $C_c(\Omega)$ el espacio de las *funciones continuas* en Ω y con *soporte compacto*, es decir, $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K, K \subset \Omega \text{ compacto}\}$.

Definición 1. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; defínase

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

y escríbase

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Puede probarse que L^p es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_{L^p}$ así definida es una norma (véase [1]).

Definición 2. Sea

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible, } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega, C \text{ constante}\};$$

escríbase

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

También puede probarse que $\|\cdot\|_{L^\infty}$ es una norma y que si $f \in L^\infty$, entonces se cumple $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ c.t.p. en Ω (véase [1]).

Definición 3. Un espacio de *Banach* es un espacio normado que es completo en la métrica definida por su norma, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Otro resultado clásico es que L^p es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ (véanse [1], [16], etc.).

Definición 4. Sea H un espacio vectorial. Un *producto escalar* (u, v) es una forma bilineal de $H \times H$ en \mathbb{R} , simétrica definida positiva (es decir, $(u, v) \geq 0 \forall u \in H$ y $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$).

Definición 5. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar (u, v) y que es completo para la norma $(u, u)^{1/2}$.

A partir de ahora H designará un espacio de Hilbert. Un ejemplo clásico de estos espacios, es L^2 dotado del producto escalar

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Para cualquier discusión futura sobre funciones de n variables, el *multi-índice* será una n -ada ordenada

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

de enteros no negativos α_i . A cada multi-índice α se le asocia un operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n},$$

cuyo *orden* es

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Claramente, si $|\alpha| = 0$, entonces $D^\alpha f = f$. D^α representa cualquiera de las derivadas parciales

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Por ejemplo, si $\alpha = 6$ y se toma $D^6 u(x, y, z) = \frac{\partial^6 u(x)}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z}$, entonces el número de veces en que se deriva parcialmente es 6 y $|6| = 2+3+1$; lo mismo pasa con $D^6 u(x, y, z) = \frac{\partial^6 u(x)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$ y $|6| = 2+2+2$. A partir de ahora, llámese a α simplemente *multi-índice*.

El *soporte de una función continua* es el complemento del abierto más grande en el que f (definida sobre \mathbb{R}^n), se anula. Alternativamente, éste puede definirse como la cerradura del conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$. Sin embargo, cuando se trabaja con funciones medibles, esta definición ya no es tan adecuada. Por ejemplo, si se piensa en la *función característica* $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional;} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional;} \end{cases}$$

no existe ningún abierto en $[0, 1]$ (con la topología heredada por \mathbb{R}), en el que f se anule, por lo tanto el abierto más grande en el que $f = 0$ es el conjunto vacío; en consecuencia, el soporte de f así definida es $[a, b]$. Por lo tanto, es necesaria una definición más general.

Definición 6. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea f una función definida en Ω con valores en \mathbb{R} . Considérese la familia de todos los abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, (I un conjunto de índices), $U_i \subset \Omega$ tales que para cada $i \in I$, $f = 0$ c.t.p. (casi en todo punto) de U_i . Si se define

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

entonces $f = 0$ c.t.p. de U . Defínase el *soporte* de u como

$$\mathbf{Supp} f = \Omega \setminus U,$$

Donde $\Omega \setminus U$ designa la diferencia usual de conjuntos.

La terminología “c.t.p.”, se refiere a que $f = 0$ en todo el conjunto en cuestión, salvo en un subconjunto de éste con medida (de Lebesgue) cero. Retomando el ejemplo de la función característica f y usando la definición (1), se tiene que U es todo el intervalo $[0, 1]$, por lo que $\mathbf{Supp} f = \emptyset$.

A.3 Espacios de Sobolev.

Los espacios de Sobolev permiten utilizar las ideas del análisis funcional en el estudio la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Esto último es de gran utilidad, debido a que a través del análisis es posible obtener mayor información del problema en cuestión. Antes de dar la definición formal de éstos, primero es necesario entender algunos conceptos previos.

A.3.1 Derivadas débiles.

Notación. Sea $C_c^\infty(U)$ el espacio de las funciones $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables, con soporte compacto en U . La función ϕ será llamada *función de prueba*.

Motivación para la definición de derivadas débiles.

Tómese una función $u \in C^1(U)$. Entonces, si $\phi \in C_c^\infty$, de la integración por partes se observa que

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = (u\phi) \Big|_{\partial\Omega} - \int_U u_{x_i} \phi dx = - \int_U u_{x_i} \phi dx, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (\text{A.3})$$

obsérvese que no hay términos de frontera debido a que ϕ es de soporte compacto. Más generalmente, si k es un entero positivo, y $u \in C_c^k(U)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, entonces, de la integración por partes

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^{|\alpha|} u \phi dx. \quad (\text{A.4})$$

Esta última igualdad se cumple debido a que $D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$ y puede aplicarse la fórmula (A.5) $|\alpha|$ -veces.

Claramente, la fórmula (A.6) es válida sólo si $u \in C^k(U)$; en consecuencia, surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿cómo pueden variarse las condiciones sobre u para que (A.6) siga cumpliéndose aún si u no es k veces diferenciable?. Obsérvese que el lado izquierdo de (A.6) tiene sentido sólo si u es localmente integrable; pero para el lado derecho, si u no es C^k , la expresión “ $D^\alpha u$ ” no tiene significado obvio. Esta dificultad puede ser resuelta si se pide la existencia de una función v localmente integrable para la cual la fórmula (A.6) es válida, escribiendo $v = D^\alpha u$.

Definición 9. Sea L^1_{loc} el espacio L^1 de las funciones localmente integrables. Supóngase que $u, v \in L^1_{loc}$, y que α es un multi-índice. Se dice que v es la α -ésima derivada parcial débil de u , se escribe

$$D^\alpha u = v,$$

con tal que

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx, \quad (\text{A.5})$$

para todas las funciones de prueba $\phi \in C_c^\infty(U)$.

En otras palabras, si se tiene una función u y existe v que satisface la condición (A.7) para toda ϕ , y actúa como $D^\alpha u$ lo hace en la expresión (A.6), entonces se dice que $D^\alpha u = v$ en el sentido débil.

Lema 2. Una α -ésima derivada parcial débil de u , si existe, es única excepto en un conjunto de medida cero.

Demostración. Sean $v, w \in L^1_{loc}$ tales que

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx,$$

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U w \phi \, dx;$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Entonces

$$\int_U (v - w) \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U);$$

y por lo tanto, debido al lema fundamental del cálculo de variaciones $v - w = 0$. Queda demostrado el lema.

□

A continuación serán dados algunos ejemplos que ilustran claramente la definición (9).

Ejemplo 1. Sea $n = 1$, $U = (0, 2)$ y tómesese

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2; \end{cases}$$

Sea

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2; \end{cases}$$

La afirmación es que $u' = v$ en el sentido débil. Para probar esto último, tómesese $\phi \in C_c^\infty((0, 2))$. Queda por demostrar que

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \int_0^2 v\phi dx.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= (\phi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) \\ &= - \int_0^1 \phi dx + \phi(1) - \phi(1) \\ &= - \int_0^1 (1)\phi dx - \int_1^2 (0)\phi dx \\ &= - \int_0^2 v\phi dx. \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la afirmación.

Por otro lado, uno se preguntaría si una función u continua por pedazos, tiene derivada en el “sentido débil”. Para responder examinemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Sean $n = 1$, $U = (0, 2)$ y tómese

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2; \end{cases}$$

Se afirma ahora que u' no existe en el “sentido débil”, es decir, no existe $u \in L^1_{loc}((0, 2))$ tal que

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \int_0^2 v\phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty((0, 2)). \quad (\text{A.6})$$

Para demostrar la afirmación, razónese por contradicción. Supóngase que existe alguna función $v \in L^1_{loc}((0, 2))$ tal que (A.8) se cumple para toda ϕ . Entonces

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v\phi dx &= \int_0^2 u\phi' dx \\ &= \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx \\ &= - \int_0^1 \phi dx + \phi(1) - 2\phi(1) \\ &= - \int_0^1 \phi dx - \phi(1). \end{aligned}$$

Ahora escójase una sucesión $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ de funciones de prueba tal que

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ \phi_m(1) = 1, \phi_m(x) \longrightarrow 0 \quad \forall x \neq 1; \end{cases}$$

Remplazando ϕ por ϕ_m y tomando $m \longrightarrow \infty$, se tiene

$$1 = \lim_{m \longrightarrow \infty} \phi_m = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left[\int_0^2 v\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx \right] = 0;$$

lo cual es una contradicción.

Otra pregunta que surge naturalmente es la siguiente: dada $u \in L^1_{loc}(I)$ con $u' = 0$ en el “sentido débil”, ¿necesariamente se tiene que $u = \text{constante}$ en el intervalo I ?; de hecho, la respuesta a ésta es un resultado conocido, que será dado a continuación como lema.

Lema 3. Sea $u \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\int_I u \phi' dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1_c(I). \quad (\text{A.7})$$

Entonces existe una constante k tal que $u = k$ c.t.p.

Demostración. Tómesese $\psi \in C_c(I)$ tal que

$$\int_I \psi dx = -1$$

Se asegura que para toda función $\omega \in C_c(I)$, existe $\phi \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\phi' = \omega - \left(\int_I \omega dx \right) \psi.$$

Para ver esto último, obsérvese que la función

$$h = \omega - \left(\int_I \omega dx \right) \psi$$

es continua y con soporte compacto en I , debido a que las funciones ω y ψ lo son. Por otro lado

$$\int_I h dx = \int_I \left[\omega - \left(\int_I \omega dx \right) \psi \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_I \omega \, dx - \int_I \left(\int_I \omega \, dx \right) \psi \, dx \\
&= \int_I \omega \, dx - \left(\int_I \omega \, dx \int_I \psi \, dx \right) \Big|_{\partial I} + \int_I \omega \left(\int_I \psi \, dx \right) \, dx \\
&= \int_I \omega \, dx - \int_I \omega \, dx = 0;
\end{aligned}$$

por lo que h tiene primitiva única con soporte compacto.

Sustituyendo el valor de ϕ' en la hipótesis (A.9)

$$\int_I u \left[\omega - \left(\int_I \omega \, dx \right) \psi \right] \, dx = 0, \quad \forall \omega \in C_c(I);$$

o también

$$\begin{aligned}
0 &= \int_I u \omega \, dx - \int_I u \psi \left(\int_I \omega \, dx \right) \, dx \\
&= \int_I u \omega \, dx - \left[\left(\int_I u \psi \, dx \int_I \omega \, dx \right) \Big|_{\partial I} + \int_I \omega \left(\int_I u \psi \, dx \right) \, dx \right] \\
&= \int_I \left[u - \left(\int_I u \psi \, dx \right) \right] \omega \, dx, \quad \forall \omega \in C_c(I);
\end{aligned}$$

por lo tanto (lema fundamental del cálculo de las variaciones), $u - \left(\int_I u \psi \, dx \right) = 0$ c.t.p.; es decir $u = C$ con $C = \left(\int_I u \psi \, dx \right)$. Queda demostrado el lema (3).

□

A.3.2 Definición de espacios de Sobolev.

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero positivo. El propósito es definir ciertos espacios de funciones cuyos miembros tengan derivadas débiles de todos los ordenes pertenecientes a espacios L^p .

Antes de dar una definición general de este tipo de espacios, es conveniente detenerse en el caso más sencillo.

Definición 10. *El espacio de Sobolev*

$$W^{1,p}(I),$$

se define por

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I); \exists v \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u \phi' dx = - \int_I v \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Si $p = 2$, normalmente se escribe

$$H^1(I) \equiv W^{1,2}(I).$$

Obsérvese que si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ y además $u' \in L^p(I)$ (aquí u' es la derivada usual), entonces $u \in W^{1,p}(I)$. Además la derivada en el sentido débil de u coincide con la usual.

El espacio $W^{1,p}$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

El espacio de H^1 está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

con norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2};$$

esta última, es equivalente a la norma en $W^{1,p}$.

Ejemplos.

- (i) La función $u(x)$ del ejemplo (1) pertenece a $W^{1,p}((0, 2))$.
- (ii) La función $u(x)$ del ejemplo (2) no pertenece a $W^{1,p}((0, 2))$.

Un resultado importante es el siguiente

Teorema 4. El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach.

La demostración puede ser vista en [1]. Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(I)$, pueden ser definidos por recurrencia

$$W^{k,p}(I) = \{u \in W^{k-1,p}(I); u' \in W^{k-1,p}(I)\}.$$

e igualmente escribir

$$H^k(I) \equiv W^{k,2}(I), \quad (k = 1, \dots);$$

No es difícil comprobar que u pertenece a $W^{k,p}(I)$ si y solamente si existen k funciones $v_1, \dots, v_k \in L^p(I)$ tales que

$$\int_I u D^j \phi \, dx = - \int_I v_j \phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Cuando u pertenece a $W^{k,p}(I)$, pueden tomarse $u' = v_1$, $u'' = v_2, \dots$, $u^{(k)} = v_k$ y simplemente designarlas por D^1u , $D^2u, \dots, D^k u$ respectivamente.

No es difícil probar que las propiedades descritas para los $W^{1,p}(I)$ pueden ser extendidas a $W^{k,p}(I)$. La norma en el espacio $W^{k,p}(I)$ está dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^k \|D^\alpha u\|_{L^p};$$

y el espacio H^k está dotado por el producto escalar

$$(u, v)_{H^k} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^k (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

De manera similar a como se ha procedido hasta ahora, pueden ser definidos los espacios $W^{1,p}(\Omega)$.

Definición 11. Sean $v_1, v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$. Tales que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} v_i \phi dx, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p; \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} v_i \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

Análogamente, se escribe

$$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega).$$

Puede probarse que si $u \in W^{1,2}(\Omega)$, entonces v_i es única y $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$.

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^k \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p};$$

el espacio $H^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

y la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2};$$

es equivalente a la norma de $W^{1,2}$

Un resultado importante es el siguiente

Teorema 5. El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Para ver la demostración a este último teorema, véase [1]. A continuación será dada la definición más general de espacios de Sobolev.

Definición 12. *El espacio de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega),$$

es el espacio consistente de todas las funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualquier multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$.

Análogamente, si $p = 2$, se escribe

$$H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega), \quad (k = 1, \dots).$$

De aquí en adelante, dos funciones en $W^{k,p}(U)$ serán identificadas si conciden c.t.p.

Definición 13. La norma de la función $u \in W^{k,p}(\Omega)$ está definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right]^{1/p} & \text{si } 0 < p \leq \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & \text{si } p = \infty; \end{cases}$$

donde ess sup_{Ω} es el *supremo esencial* sobre el conjunto Ω con la siguiente significación.

Supóngase que $k_i \in \mathbb{R}^n$ ($i \in G$ conjunto de índices), es una cota superior para Ω c.t.p., es decir, salvo en un subconjunto de Ω con medida cero. El supremo esencial se define como el infimo de tales cotas superiores.

Definición 14. Sean $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $W^{k,p}(\Omega)$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se dice que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a u en $W^{k,p}$ y se escribe

$$u_m \rightarrow u \quad \text{en } W^{k,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Definición 15. Denótese por $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Así, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W^{k,p}(\Omega),$$

Notación. Análogamente, se acostumbra escribir $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.

Obsérvese que $W_0^{k,p}(\Omega)$ debe ser interpretado como el conjunto que comprende a todas aquellas funciones $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tales que

$$“D^\alpha u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega” \quad \forall \alpha \quad \text{tal que} \quad |\alpha| \leq k - 1.$$

Si $n = 1$ y Ω es un intervalo abierto en \mathbb{R} , entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si u es una función absolutamente continua cuya derivada ordinaria (que existe c.t.p), pertenece a $L^p(\Omega)$; sin embargo, este hecho sólo ocurre para $n = 1$. En general, una función puede pertenecer a algún espacio de Sobolev sin ser continua ni acotada.

Ejemplo 3. Tómesese Ω como la bola abierta unitaria en \mathbb{R}^n (denótese esta última por $B_1(0)$), y

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad x \in \Omega.$$

¿Para qué valores de α , n y p se tiene que u pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$? Para responder a esta pregunta, nótese que u es diferenciable para valores distintos de 0, con

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}, \quad x \neq 0,$$

en consecuencia

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}, \quad x \neq 0,$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\int_{\Omega - B_\varepsilon(0)} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega - B_\varepsilon(0)} u_{x_i} \phi dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \phi N_i dS,$$

Con N la normal interior a $\partial B_\varepsilon(0)$. Si $\alpha + 1 < n$, entonces $|Du(x)| \in L^1(\Omega)$; y en este caso

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \phi N_i dS \right| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} dS \leq C \varepsilon^{n-1-\alpha} \longrightarrow 0,$$

Por lo que

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{con} \quad \alpha < n - 1.$$

Además, $|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(\Omega)$ si y sólo si $(\alpha + 1)p < n$. Así

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha < \frac{n-p}{p}.$$

En particular, si $\alpha > 0$, entonces $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ para cualquier $p \geq n$.

Finalmente, hay que mencionar que las derivadas débiles cumplen con varias de las propiedades usuales. Nótese que mientras que éstas son obvias para funciones diferenciables, para funciones pertenecientes a espacios de Sobolev sólo puede utilizarse la definición de derivadas débiles, por lo que para este caso no lo son. Para encontrar una demostración cuidadosa de tales propiedades, ver por ejemplo [6], [1], etc. Aquí sólo serán mencionadas.

Propiedades de las derivadas débiles.

Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $|\alpha| \neq k$. Entonces

$$(i) \quad D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega) \text{ y } D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u, \quad \forall \alpha, \beta \text{ multi-índices.}$$

- (ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, con $|\alpha| \leq k$.
- (iii) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
- (iv) si $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\xi u \in W^{k,p}(\Omega)$ y

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \xi D^{\alpha-\beta} u.$$

- (v) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

A.4 Espacios Duales.

A.4.1 Dual de L^p .

A continuación serán citados algunos resultados de gran importancia en el estudio de los espacios de Sobolev. Las demostraciones a tales resultados pueden ser vistas en [1], [16], etc.

Recuérdese que una *forma lineal* es un mapeo lineal definido sobre un espacio vectorial E con valores en \mathbb{R} . Normalmente, se define el *espacio dual topológico* E' (o también E^*) de un espacio vectorial E , como aquel cuyos elementos son los funcionales lineales continuos de E en \mathbb{R} . La norma en E' está dada por

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x).$$

Si $f \in E'$ y $x \in E$, generalmente se escribe $\langle f, x \rangle$ en lugar de $f(x)$, y se dice que \langle, \rangle es el producto escalar en la dualidad E', E .

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se designa por p' al exponente conjugado de p , es decir, al número tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 6. (Desigualdad de Hölder). Sean $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1$ y

$$\int fg \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

La desigualdad de Hölder, junto con el *Teorema de representación de Reisz*, son sumamente importantes en el estudio de los espacios L^p . Mediante ambos resultados es posible proporcionar la dualidad de los espacios L^p . El teorema de representación de Reisz permite representar a toda forma lineal mediante una función de $L^{p'}$. Por conveniencia, éste será presentado en tres casos distintos; para $1 < p < \infty$, $p = 1$ y para $p = \infty$.

I. Caso $1 < p < \infty$.

Teorema 7. (De representación de Riesz). Sean $1 < p < \infty$ y $\phi \in (L^p)'$. Entonces existe un único $u \in L^{p'}$ tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f dx, \quad \forall f \in L^p.$$

Además

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$$

La importancia de este último estriba en que toda forma lineal continua sobre L^p con $1 < p < \infty$, se representa mediante una función de $L^{p'}$. La aplicación $\phi \rightarrow u$ es un operador lineal isométrico y sobre, que permite identificar el dual de L^p con $L^{p'}$. Por lo tanto, es posible hacer la identificación $(L^p)' = L^{p'}$.

II. Caso $p = 1$.

Teorema 8. Sea $\phi \in (L^1)'$. Entonces existe $u \in L^\infty$ única tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f dx, \quad \forall f \in L^1.$$

Además

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$$

Análogamente, este último teorema indica que toda forma lineal continua sobre L^1 se representa mediante una función de L^∞ . La aplicación $\phi \rightarrow u$ es isometría que permite identificar el dual de L^1 con L^∞ . Por consiguiente, es posible identificar $(L^1)' = L^\infty$.

III Caso $p = \infty$.

El teorema (7) afirma que $L^\infty = (L^1)'$. En consecuencia, el dual de L^∞ contiene a L^1 , pero es estrictamente mayor que L^1 ; pueden construirse ejemplos concretos en los que las formas lineales continuas ϕ sobre L^∞ no son del tipo $\langle \phi, f \rangle = \int u f dx$, $\forall f \in L^\infty$, para $u \in L^1$ (véase [1], [16], etc.).

A.4.2 Dual de un espacio de Sobolev.

Recuérdese que en la definición (5), se mencionó el ejemplo clásico del espacio de Hilbert L^2 con el producto escalar $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$; esto sugiere la equivalencia del teorema de representación de Riesz para este tipo de espacios.

Teorema 9. (De representación de Riesz-Fréchet). Para cada $\phi \in H'$, existe una única $f \in H$ tal que

$$\langle \phi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Además,

$$|f| = \|\phi\|_{H'}.$$

Obsérvese que el teorema (8) afirma que toda forma lineal continua sobre H puede ser representada a través del producto escalar. La función $\phi \rightarrow f$ es un isomorfismo isométrico que identifica a H con H' ; sin embargo, esta identificación no siempre es posible. Pueden ser contruidos ejemplos que comprueben esta última afirmación (véanse [1], [16], etc.).

Para definir el espacio dual de los espacios de Sobolev, nuevamente, es conveniente comenzar con el caso $\Omega = I$. Normalmente se denota por $W^{-1,p'}(I)$ al espacio dual de $W_0^{1,p}$ ($1 \leq p \leq \infty$) y por $H^{-1}(I)$ al dual de H_0^1 .

Según la última observación, no es posible identificar H_0^1 con su dual. Por otro lado, el teorema (7) afirma que es posible identificar L^2 y su dual. Por lo tanto

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}.$$

Además, si I es acotado se tiene

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty; \quad (\text{A.8})$$

Pero si I no es acotado, solamente se tiene

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'}, \quad \text{para } 1 \leq p \leq 2. \quad (\text{A.9})$$

El teorema de representación para este caso, afirma que los elementos del espacio $W^{-1,p'}$ pueden ser representados a través de funciones de $L^{p'}$; tal resultado es

Teorema 10. Sea $F \in W^{-1,p'}$. Entonces existen $f_0, f_1 \in L^{p'}$ tales que

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v \, dx + \int f_1 v' \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p};$$

además

$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}.$$

Si I es acotado, puede tomarse $F_0 = 0$.

Como nota adicional, el teorema (10) sigue siendo válido para formas lineales y continuos sobre $W^{1,p}$.

La generalización de los espacios duales para $W^{1,p}(\Omega)$ es totalmente análoga y se cumplen las mismas contenciones, exepctuando que (A.10) se cumple para $\frac{2n}{n+2} \leq p < \infty$ y (A.11) para $\frac{2n}{n+2} \leq p \leq 2$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. El teorema de representación para este caso es de la siguiente forma

Teorema 11. Sea $F \in W^{-1,p'}$. Entonces existen $f_0, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$ tales que

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v \, dx + \sum_{i=1}^n \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Además

$$\max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^{p'}} = \|F\|.$$

Si Ω está acotado, puede tomarse $f_0 = 0$.

Bibliografía

- [1] Brézis, H., *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Masson, París, 1983.
- [2] Ceniceros, H., Garza, C., Padilla, P., *A continuous model for the jumping sandbox*. Physics Letters A, 249, 191-198 (1998).
- [3] Coleman, T. F., Van Loan, C., *Handbook for Matrix Computations*. Colecc. Frontiers in applied mathematics, Vol. 4, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [4] Courant, R., John, F., *Introduction to calculus and analysis . Vol 2*. Interscience Publishers, New York, 1974.
- [5] Do Carmo, M. P., *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [6] Evans, L. C., *Partial differential equations*. Berkeley Mathematics Lecture Notes, Vol. 3B, Caps. 6-11, University of Berkeley Press, California, 1993.
- [7] Garza, C., Padilla P., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Serie Monografías, Vol. 5, IIMAS, UNAM, México, 1996.
- [8] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential topology*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [9] Ize, J., *Cálculo de variaciones*. V Coloquio del Depto. de Matemáticas del CINVESTAV, IPN, México, 1987.
- [10] John, F., *Partial differential equations*. Springer-Verlag Publications, New York, 1991.
- [11] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., *Introductory real analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1970.
- [12] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid mechanics*. Addison-Wesley Publishers, London, 1959.

- [13] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications Inc., New York, 1986.
- [14] Padilla, P., Tonegawa, Y., *On the convergence of stable phase transitions*. Comm. Pure Appl. Math., Vol. LI, 551-579 (1998).
- [15] Rowlinson, J. S., Widom, B., *Molecular theory of capillarity*. Clarendon Press, Oxford, 1982.
- [16] Rudin, W., *Functional Analysis*. Tata McGraw-Hill Publishing Company LTD., New Delhi, 1982.
- [17] Struwe, M., *Plateau's problem and the calculus of variations*. Princeton University Press, New Jersey, 1988.
- [18] Struwe, M., *Variational methods: applications to non linear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Springer-Verlag Publications, New York, 1990.