

Soluciones Modulacionales para la Ecuación
Zakharov-Kuznetsov.

Luis Mier y Terán Romero

A mis padres, mis hermanas e Isabel

Agradecimientos

Aprovecho este espacio para agradecer a todas aquellas personas sin cuya ayuda el presente trabajo no hubiera sido posible.

En primer lugar a la doctora María del Carmen Jorge y Jorge, por su gran asesoría, incondicional apoyo, esfuerzo y paciencia, manifestadas claramente en las interminables revisiones que este trabajo requirió durante muchos meses y aun antes. Al doctor A. A. Minzoni, por su enorme conocimiento y paciencia. A todas las personas del *Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS*, por recibirme y apoyarme durante muchos meses. Al doctor N. F. Smyth de la *Universidad de Edimburgo* por su invaluable aportación a este trabajo a través de sus estudios numéricos.

Al resto de los sinodales de este trabajo, los doctores Jorge Fujioka Rojas, Catherine García Reimbert, Ramón Peralta y Fabi y Marcos Rosenbaum Pitluck, por sus atinadas observaciones y comentarios, los cuales sirvieron para mejorar este trabajo de manera significativa.

A todos mis profesores de la *Facultad de Ciencias*, por sus enormes enseñanzas.

A mis padres, mis hermanas e Isabel por su amor, compañía e inspiración durante tanto tiempo, a ellos dedico este trabajo, que no hubiera sido posible sin su presencia.

A toda mi familia: mi abuela, mis tíos y primos por su cariño durante veinticinco años.

A todos mis amigos, por tantos momentos y quienes estoy seguro seguirán conmigo por mucho tiempo más.

Contenido

Prefacio	vi
1 Origen y deducción de la ecuación ZK	1
1.1 Introducción	1
1.1.1 Dispersión, difusión y no linealidad	2
1.1.2 La ecuación KdV	8
1.1.3 Plasmas y solitones	14
1.2 Obtención de las ecuaciones de movimiento	16
1.3 Relación de dispersión de las ondas iónicas acústicas	19
1.3.1 Relación de dispersión en ausencia de campo magnético	21
1.3.2 Relación de dispersión en un campo magnético de gran intensidad . .	22
1.4 Disipación de Landau	23
1.5 Deducción de la Ecuación Zakharov-Kuznetsov	36
1.6 Resultados conocidos sobre la ecuación ZK	45
2 Soluciones Modulacionales en dos dimensiones	53
2.1 Evidencia numérica	53
2.2 Confinamiento de la radiación por la cáustica	57
2.3 Evolución de una onda gobernada por la ecuación ZK	63
2.3.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK	63
2.3.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación .	66
2.4 Evolución de una onda gobernada por la ecuación gZK	104
2.4.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK generalizada	104
2.4.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación .	106
3 Soluciones Modulacionales en tres dimensiones	123
3.1 Evolución de una onda gobernada por la ecuación ZK	123
3.1.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK	123
3.1.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación .	126

3.2	Evolución de una onda gobernada por la ecuación gZK	144
3.2.1	Las leyes de conservación de la ecuación ZK generalizada	144
3.2.2	Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación .	146
Conclusiones		159
Bibliografía		163

Prefacio

Al estudiar un plasma de iones fríos y electrones calientes mediante el punto de vista de fluidos, en 1964 Sagdeev muestra que es posible que un pulso de densidad iónica se propague sin cambiar de forma. Esto no sería una sorpresa en el límite lineal de las ecuaciones, sin embargo Sagdeev obtiene el resultado antes mencionado en el caso en que se incorpora la contribución de los términos no lineales. El argumento fundamental es que la forma permanente del pulso es el producto del balance entre términos no lineales, que tienden a concentrar la onda, con los términos dispersivos, que tienden a esparcirla. Más tarde, en 1966, Washimi y Taniuti consideran ondas de densidad iónica en un plasma bajo las mismas condiciones de antes pero utilizan un método distinto. Partiendo nuevamente de las ecuaciones de dinámica de fluidos y utilizando un desarrollo perturbativo en el que se exige el balance de la no linealidad con la dispersión, obtienen la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), para el caso en que las ondas de densidad iónica dependen solamente de una variable espacial. En el contexto de ondas en tres dimensiones, el tratamiento anterior consiste en considerar ondas planas. El que se haya encontrado a la ecuación KdV en este contexto fue un gran adelanto, esta ecuación se conocía desde setenta años antes y posee el tipo de solución de forma permanente que se había discutido en el caso de plasmas. Esta ecuación es una de las más sencillas que posee términos no lineales y otros de carácter dispersivo, donde el balance de ambos tipos produce ondas de forma permanente.

En 1974, con la pregunta abierta de ondas solitarias en más dimensiones, Zakharov y Kuznetsov estudian la propagación de fluctuaciones de densidad de iones en un plasma, el cual está en presencia de un campo magnético uniforme e intenso. Se pide adicionalmente que sea un plasma diluido y no isotérmico, de manera que los electrones tengan una temperatura mucho mayor a la de los iones. Obtienen una ecuación para las fluctuaciones de densidad iónica con amplitud pequeña que es una generalización a dos o tres dimensiones de la celebrada ecuación de Korteweg-de Vries. A la ecuación que ellos encontraron se le llama hoy la Ecuación Zakharov-Kuznetsov, o Ecuación ZK por brevedad.

El trabajo que se ha realizado en relación a esta ecuación hasta la fecha ha sido extenso, aunque aún permanecen muchas cosas por comprenderse. Entre lo que hoy en día se sabe es que las ondas con simetría esférica son estables y por lo tanto la ocurrencia de solitones con esta simetría es posible. Una onda plana en dos dimensiones que presente una perturbación

periódica y perpendicular a su dirección de propagación es estable para perturbaciones con longitud de onda cortas e inestable para longitudes de onda largas, al analizar el caso en que la perturbación posee una dirección más general, se encuentran resultados semejantes, donde ahora la estabilidad de la onda depende del ángulo que formen la perturbación y la dirección de propagación. Se ha encontrado a la ecuación ZK o una variante de ella en varios contextos, lo que le otorga un carácter de alta importancia. Finalmente, los resultados numéricos son de enorme importancia. Se sabe que una onda plana en dos dimensiones que es perturbada perpendicularmente a la dirección de propagación se parte en un sistema de solitones cilíndricos estables más radiación. Al considerar colisiones de ondas localizadas en dos dimensiones se observa que las ondas retienen su identidad, pero después de la colisión se desprende radiación o las ondas generan inestabilidades. Estos resultados y otros más son mencionados brevemente en la sección 1.6.

El propósito del presente trabajo es utilizar las leyes de conservación de la ecuación Zakharov-Kuznetsov para encontrar un sistema de ecuaciones ordinarias que aproxime la evolución de una onda con perfil inicial Gaussiano, lo cual se hace en dos y tres dimensiones espaciales. Se consideran dos situaciones distintas: la primera ignorando la radiación cedida por la onda con forma de campana y en el segundo caso, tomando en cuenta el efecto de dicha radiación. Trabajos anteriores han llevado a cabo el mismo procedimiento para el caso de otras ecuaciones de onda, tanto en una dimensión como en dos, entre estos trabajos mencionamos a [19], [20], [34] y [24].

En el primer capítulo se comienza con una introducción al tema de las ecuaciones de onda no lineales, donde se presentan conceptos como son la dispersión, disipación, la no linealidad, relaciones de dispersión de las ecuaciones, así como ejemplos de los conceptos antes mencionados. Se presenta la derivación de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov a partir de las ecuaciones de dinámica de fluidos aplicadas a plasmas, así como la relación de dispersión que gobierna el fenómeno. Se hace un breve tratamiento acerca del fenómeno de disipación de Landau ('Landau Damping') y se muestra el efecto que tiene sobre las ondas no lineales bajo estudio. Posteriormente, se mencionan algunos resultados relacionados con la ecuación en estudio, que fueron encontrados posteriormente por diversas personas.

En el segundo capítulo comienza con una presentación de los resultados numéricos obtenidos, con el propósito de lograr una familiarización con el fenómeno. Esto además motiva el tipo de aproximación que se utilizará posteriormente. Inmediatamente sigue una sección referente a la distribución espacial de la radiación cedida por la onda al avanzar; se mostrará que la radiación tiende a acumularse a una cierta región espacial y esto será ventajoso para futuros propósitos. Luego se procede a considerar la aproximación de la evolución de la onda inicialmente Gaussiana mediante las leyes de conservación inherentes a la ecuación. Comenzando con el caso de dos dimensiones; se encuentran dos leyes de conservación de la ecuación, una correspondiente a la conservación de masa y otra correspondiente a la conservación del momento. Para aproximar la evolución de la onda, se introducen tres funciones desconocidas dependientes del tiempo: la amplitud de la onda, una relacionada

con su ancho y la posición del máximo de la onda, el cual avanza sobre una línea recta. Se dice entonces que la evolución de la solución está *modulada* por estas tres funciones del tiempo. De manera más específica, se usan las leyes de conservación de masa y momento de la ecuación tratada, así como una expresión adicional que resulta de considerar el momento del momento de la onda respecto de x para encontrar un total de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que permite aproximar la evolución de las tres funciones desconocidas. Lo anterior se hace primeramente ignorando el efecto de la radiación sobre la onda, de manera que se obtiene un primer sistema de ecuaciones. A continuación, se hacen consideraciones sobre la radiación y se incorpora ésta en el sistema de ecuaciones ordinarias, lo que nos proporciona un segundo sistema que en principio representa una mejor aproximación. Se hace una comparación de las soluciones obtenidas de los distintos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidos con una solución numérica directa de la ecuación ZK proporcionada por el doctor N. F. Smyth.

Después de esto, en el mismo capítulo, se considera una generalización a la ecuación Zakharov-Kuznetsov, en la cual el término no lineal se modifica. Esto es motivado por el hecho de que se han encontrado situaciones en distintas áreas donde la aparición de un término no lineal distinto es posible, ver por ejemplo [33]. Se realiza el tratamiento hecho antes para esta nueva ecuación, ignorando a la radiación y después incorporándola, de modo que se llega nuevamente a un par de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que de hecho se reducen a los obtenidos primero bajo condiciones adecuadas. Esto permite encontrar las condiciones que debe cumplir el término no lineal para tener como resultado ondas de forma permanente y también las condiciones que son necesarias para que la onda decaiga completamente a cero u ocurra una singularidad al diverger la amplitud de la onda, debido a una concentración de la masa.

El tercer capítulo consiste de la extensión del anterior al caso de tres dimensiones espaciales. El tratamiento seguido antes se realiza de nuevo para este nuevo número de dimensiones, siguiendo exactamente la misma metodología y orden. Se obtienen sistemas de ecuaciones que aproximan la evolución de una onda con condición inicial Gaussiana, en el caso con radiación y sin ella. Nuevamente al considerar una generalización del término no lineal se obtienen las condiciones necesarias para que resulten ondas con forma permanente, ondas que decaen y aquéllas cuya amplitud crece más allá de cualquier cota.

Capítulo 1

Origen y deducción de la ecuación Zakharov-Kuznetsov

1.1 Introducción

Actualmente es ampliamente reconocida la riqueza que los fenómenos no lineales brindan a todas las ramas de la física y las matemáticas aplicadas. Sin embargo, esto no siempre ha sido así; la falta de métodos generales para resolver este tipo de problemas así como otras complicaciones adicionales inhibían su estudio o al menos limitaban el avance obtenido. No era poco común linealizar las ecuaciones mediante aproximaciones, como en el caso de la ecuación del péndulo, o el despreciar completamente a los términos incómodos, buscando las condiciones para poder hacer cualquiera de ellas. A pesar de ello, poco a poco a los fenómenos no lineales se les fue considerando más a fondo y se descubrió que dan lugar a comportamientos de gran interés y frecuentemente inesperados. Igualmente, se les encontró involucrados en una creciente variedad de problemas, lo que suscitó un estudio aún mayor. Fue así como se aceptó la riqueza que proporcionaban a las situaciones donde aparecían, así como su carácter universal. En el presente, el estudio de los fenómenos no lineales se lleva a cabo de manera vigorosa y extendida a lo largo muchas áreas.

En conexión al estudio de estos fenómenos, es también fundamental mencionar la gran aportación que las computadoras han brindado. Debido a la falta de técnicas de solución generales, la modelación numérica de las ecuaciones no lineales ha permitido observar y entender un poco los comportamientos resultantes, así como señalar nuevas vías de análisis. Muchas veces esto ocurre de manera anterior a un estudio de otro tipo que no emplee la herramienta numérica.

Uno de los comportamientos no lineales más interesantes ha sido sujeto a un amplio estudio, esto es, la aparición de un tipo especial de solución fundamental en algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Estas soluciones especiales adoptan la forma de

una perturbación, en ocasiones localizada, que retiene su forma e identidad incluso después de interactuar con otras perturbaciones de su misma clase o no, por lo que tienen un comportamiento análogo al de partículas. La característica de retener su identidad a pesar de interactuar es algo conocido de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales lineales; en el caso de ecuaciones no lineales, las no linealidades podrían llevar a las soluciones a generar discontinuidades o destruir la identidad de cada onda individual, algo que no siempre ocurre. Estas estructuras coherentes con identidad duradera han sido llamados *solitones*.

1.1.1 Dispersión, difusión y no linealidad

En el estudio de ecuaciones de onda no lineales es de fundamental importancia el entender el efecto que tienen sobre la solución tres tipos de términos: los no lineales, los dispersivos y los difusivos. El primer tipo de término se reconoce de inmediato y la consecuencia más obvia de su presencia es el invalidar el principio de superposición. El efecto de estos términos sobre la solución no es trivial y se verá más adelante, mediante un ejemplo, uno de los posibles comportamientos que producen.

El segundo tipo de término, el dispersivo, no se reconoce de manera inmediata y de hecho el que un término sea dispersivo o no depende de la presencia o ausencia de otros términos. El efecto de estos términos sobre la solución es, como su nombre lo indica, el de dispersar o esparcir a una onda localizada sobre una región mayor del espacio.

Los términos difusivos tienen una naturaleza similar a los dispersivos, en el sentido de que esta condición depende de la ocurrencia de otros términos. Tienen el efecto de esparcir a la solución sobre regiones mayores del espacio, de manera distinta que en el caso de dispersión: mientras que los términos dispersivos tienden a separar a las componentes que conforman una onda, los difusivos producen una caída en la amplitud. Este tipo de términos gobiernan la conducción del calor en un cuerpo, de manera que el esparcimiento mencionado es análogo al caso en que se tiene un cuerpo con una porción a mayor temperatura que las circundantes y ésta se enfría calentando sus alrededores.

Estos tres efectos pueden combinarse para producir comportamientos muy interesantes. Pueden tenerse ecuaciones que presenten cualquier combinación de los tres tipos de términos y esto tiene gran influencia sobre el tipo de solución que resulta.

Tratamos ahora cada uno de los términos antes mencionados por separado, comenzando con los dispersivos.

Dispersión

Presentamos el concepto de dispersión en el caso de ecuaciones de onda lineales con coeficientes constantes. Como se mencionó antes, estos términos producen un esparcimiento de las soluciones de las ecuaciones que posean dichos términos, de manera que una onda

localizada evoluciona hasta llegar a un punto en que se tiene una región mayor donde la onda no tiene amplitud despreciable. Veamos cómo ocurre esto.

En el caso de ecuaciones de onda lineales con coeficientes constantes en una dimensión espacial, siempre es posible obtener una solución del tipo

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}, \quad (1.1)$$

donde A , δ y k son constantes reales y ω en general depende de k . Por el momento, consideraremos el caso en el que ω es real, aunque en general esto no es necesariamente cierto. La linealidad de la ecuación nos permite tomar a $\text{Re } \varphi$ ó $\text{Im } \varphi$ como la solución física del problema.

Al proponer una solución del tipo (1.1) en una ecuación lineal, siempre será posible dividir entre A y $e^{i\delta}$, por lo que en este tipo de problemas la amplitud A y la fase δ son arbitrarias. La expresión resultante de proponer a (1.1) como solución, una vez eliminadas la amplitud y la fase, tendrá la forma $G(\omega, k) = 0$ y se llama *relación de dispersión*. Esta expresión es quien nos indica cómo debe ser $\omega(k)$ para que (1.1) sea efectivamente una solución. De ella se extrae una función $\omega = \omega(k)$ por cada raíz de $G(\omega, k) = 0$ y la solución se compone de una superposición de términos del estilo (1.1) con las distintas posibilidades para $\omega(k)$.

Como ejemplo, tenemos la ecuación de una barra vibrante

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0.$$

En este caso la relación de dispersión es

$$G(\omega, k) = \gamma^2 k^4 - \omega^2 = 0,$$

que nos da dos posibilidades $\omega = \pm \gamma k^2$. La solución es

$$\varphi(x, t) = A_1 e^{i(kx - \gamma k^2 t + \delta_1)} + A_2 e^{i(kx + \gamma k^2 t + \delta_2)},$$

y como lo anterior será solución para cualquier k , podríamos superponer sobre todas las k 's integrando en esa variable sobre todo \mathbb{R} , aunque en ese caso se debe tener $A_i = A_i(k)$.

Del ejemplo anterior vemos que cada operación $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación produce un factor $-i\omega$ y análogamente cada derivación $\frac{\partial}{\partial x}$ produce un factor ik , de manera que la relación de dispersión más general en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes es un polinomio de potencias de ω y de k . Si escribimos a la ecuación lineal de coeficientes constantes como

$$\mathcal{L}(\partial_t, \partial_t^2, \dots, \partial_t^p; \partial_x, \partial_x^2, \dots, \partial_x^q) \varphi(x, t) = 0,$$

donde \mathcal{L} es un operador lineal, la relación de dispersión será simplemente

$$G(\omega, k) = \mathcal{L}(-i\omega, (-i\omega)^2, \dots, (-i\omega)^p; ik, (ik)^2, \dots, (ik)^q) = 0.$$

Por lo que la relación de dispersión determina a la ecuación de manera única y viceversa, lo que las hace equivalentes.

Como se mencionó antes, una solución de una ecuación diferencial del tipo $Ae^{i(kx-\omega(k)t+\delta)}$ lo será para cualquier valor de k , por lo que podemos superponer sobre todas las k 's para tener una solución más general

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)} dk, \quad (1.2)$$

donde la fase queda absorbida en $A(k)$ y ésta debe decaer a cero en los extremos para que la integral converja. Una solución del tipo (1.2) se interpreta como una superposición de ondas armónicas con todas las longitudes de onda posibles (viajando tanto a la derecha como a la izquierda) y de frecuencias correspondientes $\omega = \omega(k)$. De (1.1) vemos que una solución de frecuencia pura $e^{i(kx-\omega(k)t)}$ es una onda que avanza a una velocidad $\omega(k)/k$, la cual es llamada la velocidad de fase. Se concluye entonces que a menos que $\omega(k)/k$ sea constante, las ondas de cada frecuencia pura avanzarán a una velocidad distinta, dependiendo de los valores de k y $\omega(k)$. Por ello, cuando $\omega'' \neq 0$ se dice que la onda es *dispersiva*. El término se origina al notar que si tenemos una onda localizada expresada como (1.2), sus componentes de frecuencias puras avanzarán a distintas velocidades y la onda perderá su carácter localizado.

En el caso de la ecuación de onda clásica, $\varphi_{tt} - c^2\varphi_{xx} = 0$, se obtiene la relación de dispersión $\omega^2 - c^2k^2 = 0$; por lo que las ondas son no dispersivas ($\omega'' = 0$). Las componentes de frecuencia pura viajan con velocidades $\omega/k = \pm c$, por lo que la solución se trasladará sin deformarse. La situación es distinta para la ecuación de la barra, donde habrá dispersión y la velocidad de fase es $\omega/k = \pm\gamma k$, por lo que las ondas con longitudes de onda cortas viajan con mayor celeridad.

Desarrollamos ahora un ejemplo donde podamos apreciar la dispersión de manera gráfica. Considérese la ecuación

$$u_t - u_{xxx} = 0,$$

la cual tiene soluciones del estilo $e^{i(kx-\omega(k)t)}$ si

$$\omega(k) = k^3.$$

Superponiendo podemos escribir la solución general

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k)e^{i(kx-k^3t)} dk,$$

donde pedimos $\hat{u}_0(k) \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \pm\infty$ para que la integral converja. Además el factor constante se añade por conveniencia. Si escogemos una condición inicial Gaussiana

$$u(x, 0) = u_0(x) = e^{-\alpha x^2},$$

usamos el Teorema de Inversión de Fourier para obtener $\hat{u}_0(k)$

$$\hat{u}_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/(4\alpha)}.$$

Usando lo anterior, escribimos la solución como

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/(4\alpha)} e^{i(kx - k^3 t)} dk.$$

Usando *Mathematica* se muestran gráficas de $u(x, t)$ dada por la última expresión, para distintos tiempos (ver Fig. 1.1). En ellas, se aprecia claramente cómo el pulso inicial se dispersa y ésta es una verificación gráfica del efecto tratado.

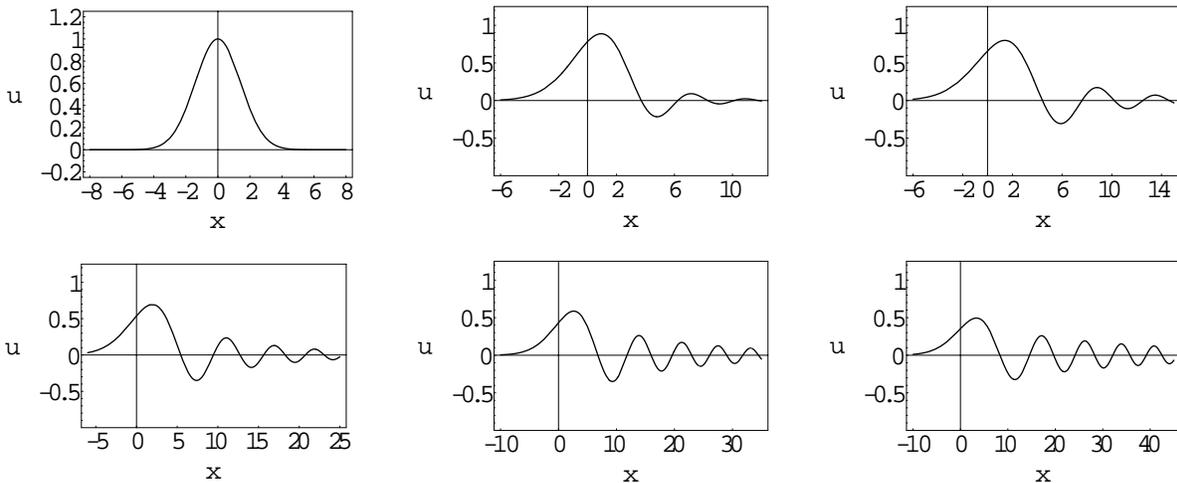


Fig. 1.1: Solución de $u_t - u_{xxx} = 0$ con condición inicial $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 1/4$ y para $t = 0, 1, 2, 4, 8$ y 15 .

Difusión

Una vez entendida la dispersión, es más sencillo entender la difusión. Los términos difusivos son aquéllos que aporten una contribución imaginaria con signo negativo a la relación de dispersión; de manera que las soluciones fundamentales $e^{i(kx - \omega t)}$ tomen la forma $e^{i(kx - \text{Re } \omega t)} e^{\text{Im } \omega t}$. Vemos de inmediato que esto produce una caída en la amplitud de la solución, conforme avanza el tiempo. Usando los conceptos de la sección anterior, la solución completa, después de superponer los modos fundamentales, es

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \text{Re } \omega(k)t)} e^{\text{Im } \omega(k)t} dk,$$

y vemos que al igual que en el caso de una sólo solución fundamental; tendremos un decaimiento en amplitud conforme el tiempo transcurre.

Mientras que los términos dispersivos esparcen a la solución mediante una separación de los modos fundamentales, los difusivos lo hacen con un decaimiento de amplitud en el tiempo, tal como se ve en la última expresión.

Presentamos ahora un ejemplo de una ecuación puramente difusiva, de manera que se aprecie el efecto de mejor manera. La ecuación de difusión o de calor, es la ecuación más sencilla que presenta este efecto, ésta es

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

Resolvemos ahora dicha ecuación con condición inicial $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$. La relación de dispersión es

$$\omega = -ik^2,$$

de manera que la solución fundamental toma la forma $e^{i(kx-\omega t)} = e^{ikx}e^{-k^2t}$. La solución general ahora es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{ikx} e^{-k^2t} dk.$$

Nuevamente usando el Teorema de Inversión de Fourier tenemos que

$$\hat{u}_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

y esta forma para $\hat{u}(k)$ permite encontrar a $u(x, t)$ de forma explícita. Ella es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha t}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha t}}$$

de donde se verifica que $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$. De lo anterior vemos que la solución es simplemente una Gaussiana que se esparce conforme pasa el tiempo.

Nuevamente, usando *Mathematica* se presentan gráficas de la solución, tomando $\alpha = 1/4$. Ver Figs. 1.2 y 1.3.

En términos de la interpretación de transporte de calor mencionada antes, el problema resuelto representa la conducción de calor en una barra unidimensional e infinita en ambas direcciones, cuando el perfil inicial de temperaturas es Gaussiano. En las figuras antes citadas, podemos ver el esparcimiento antes mencionado, que se interpreta como el enfriamiento de la parte central de la barra y el consecuente calentamiento del resto de ella.

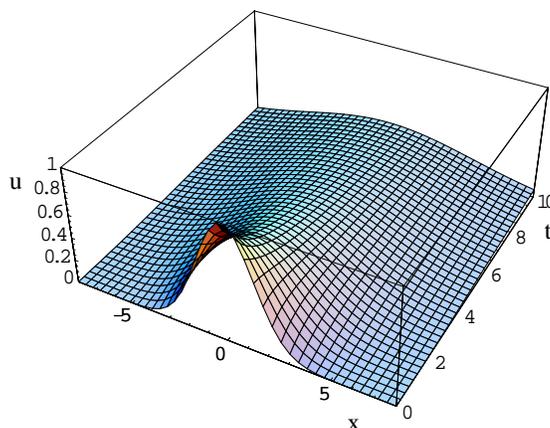


Fig. 1.2: Solución de $u_t - u_{xx} = 0$ vista como superficie sobre el plano x y t . La condición inicial es $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 1/4$.

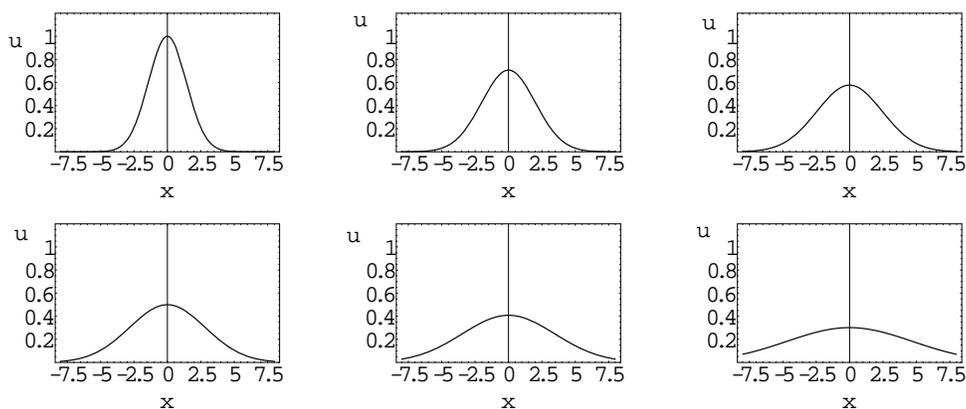


Fig. 1.3: Soluciones de $u_t - u_{xx} = 0$, la condición inicial es $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 1/4$ y para $t = 0, 1, 2, 3, 5$ y 10 .

No linealidad

Trataremos el último tipo de términos, los no lineales, de manera breve pero lo suficiente para apreciar su contribución a las ondas solitarias. Veremos que bajo ciertas condiciones estos términos tienen un efecto contrario sobre las soluciones que los dispersivos: producen una concentración en la condición inicial que puede llevar a una discontinuidad, a la generación de ésta se le llama choque o rompimiento, mientras que a ondas de este tipo se les llama ondas de choque.

Considérese la ecuación no lineal de primer orden $u_t + uu_x = 0$, con una condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Usando el método de características se encuentra a la solución en forma implícita:

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t),$$

por lo que en general no será posible obtener una expresión para u como función de x y de t . En [8], Dodd et al. consideran una condición inicial formada de rectas por tramos, por lo que se tiene una función continua pero con derivadas discontinuas. En ese caso es posible obtener una expresión para $u(x, t)$. Afortunadamente, no es necesario obtener a $u(x, t)$ de forma explícita para entender el colapso o choque. Si estudiamos la ecuación $u_t + cu_x = 0$, con $u(x, 0) = u_0(x)$; tendremos como solución $u(x, t) = u_0(x - ct)$. Esto no es más que la condición inicial trasladada rígidamente hacia la derecha (si $c > 0$) a una velocidad c , por lo que la forma de la onda es siempre la misma. En el caso de la ecuación no lineal que estamos considerando, podemos interpretar a la solución $u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t)$ como una onda cuyas distintas porciones se desplazan con velocidades diferentes, de hecho la velocidad en cada punto y en cada momento es precisamente $u(x, t)$. Por ello, tramos donde $u(x, t) > 0$ se desplazarán a la derecha y aquéllos donde $u(x, t) < 0$ lo harán en sentido opuesto. Además, las porciones donde $u(x, t)$ tenga una mayor amplitud y sea positiva alcanzarán a las porciones de menor amplitud que estén a la derecha, lo cual puede llevar a una discontinuidad.

Mostramos gráficas de la solución de $u_t - uu_x = 0$ a distintos tiempos con una condición inicial Gaussiana $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 4$, obtenidas de la solución numérica que proporciona *Mathematica*, ver Figs. 1.4 y 1.5. Es posible apreciar cómo la onda se colapsa sobre sí misma en la parte frontal de la campana hasta llegar a una pendiente vertical; al tiempo en que esto ocurre se le llama el tiempo de choque. En la teoría de características es posible ver que este tiempo es aquél en el que ocurre el primer cruce de las curvas características y en este caso es posible mostrar que corresponde a $t_{\text{choque}} = \sqrt{2e} \approx 2.3316$. Por supuesto que no es posible mostrar gráficas de la solución numérica después del tiempo de choque, debido a que el método falla; a pesar de ello puede apreciarse claramente que la deformación de la onda llevará a una discontinuidad en el momento en que se desarrolle una pendiente vertical en $t_{\text{choque}} \approx 2.3316$.

1.1.2 La ecuación KdV

La primera observación de la existencia de solitones no es reciente, hoy se atribuye de manera generalizada a John Scott Russell en 1834. Russell, ingeniero y hombre de ciencia de origen escocés, observó por primera vez una onda solitaria en la superficie del canal de Edimburgo a Glasgow, mientras realizaba estudios para el diseño de barcas que serían utilizadas en ese canal. Sus palabras textuales y figuras pueden verse en muchos libros como son [8], [9] y [27],

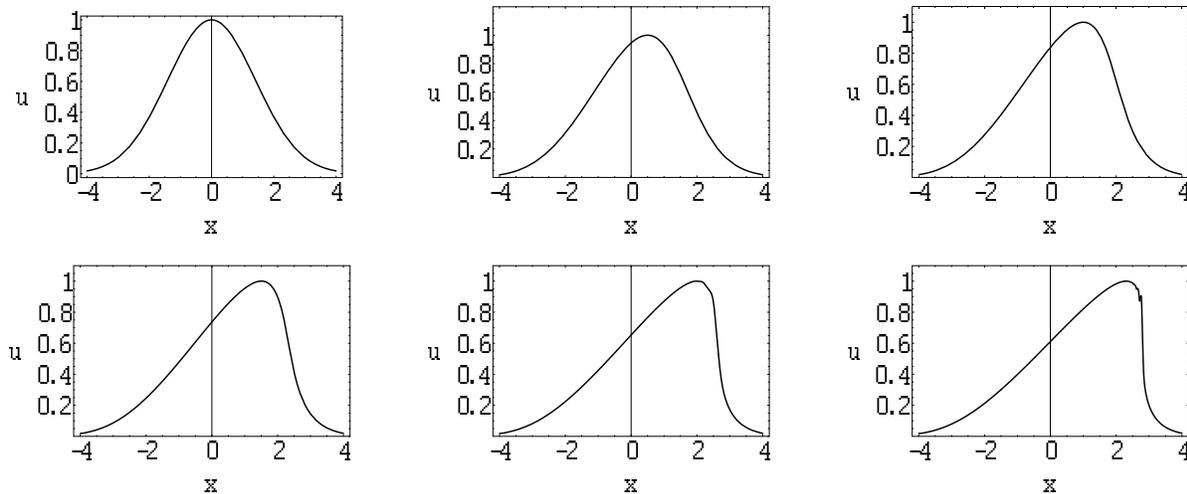


Fig. 1.4: Solución de $u_t - uu_x = 0$ con condición inicial $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 1/4$ y para $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2.0$ y 2.3 .

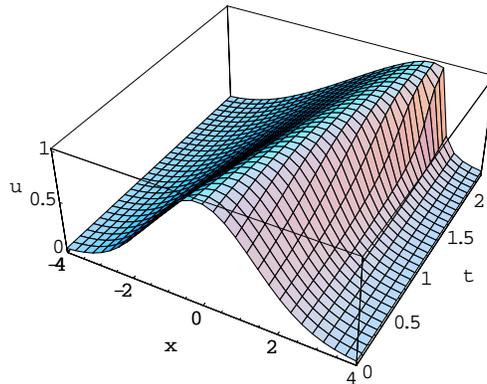


Fig. 1.5: Solución de $u_t - uu_x = 0$ con condición inicial $u(x, 0) = e^{-\alpha x^2}$ con $\alpha = 1/4$, vista como superficie en el plano (x, t) .

además de sus trabajos originales. De manera breve, Russell observó cómo un abultamiento con forma de campana se creaba por arriba de la superficie del agua al detenerse la barca de manera repentina. Notó que el abultamiento tenía una forma bien definida, que viajaba sin deformarse y sin modificar su velocidad a lo largo de una gran distancia. Una vez que la onda pasaba por cierta parte de la superficie del agua, ésta recuperaba el reposo sin que se formaran oscilaciones duraderas. De ello es posible concluir que el abultamiento de la superficie no transfiere momento al resto de ella, sino que lo conserva íntegro.

A lo largo de numerosos experimentos, aprendió que un perfil que fuera una depresión de

la superficie se descomponía en un tren ondulatorio sin forma permanente y con decaimiento, al que se llama radiación, mientras que un perfil arbitrario por arriba de la superficie se descomponía en una onda acampanada de forma permanente y otra parte compuesta de radiación. De esta manera la onda con forma de campana, a la que llamó *Gran Onda de Traslación*, representa un modo fundamental de propagación. Experimentalmente encontró que la velocidad de la onda era $\sqrt{g(h+a)}$, donde g es la aceleración de la gravedad, h es la profundidad del canal con la superficie en equilibrio y a es la altura de la cúspide de la onda acampanada a partir de la superficie en equilibrio; esto es, su amplitud.

En su época, la comunidad científica recibió los resultados de Russell con escepticismo. Stokes y Airy dudaban de la existencia de una onda que viaje sin deformación y que a la vez tuviera un perfil completamente por arriba de la superficie. Fue hasta la década de 1870 en que el trabajo de Russell se tomó de manera más seria y de hecho adquirió una base más firme. De manera independiente, Boussinesq en 1872 y Rayleigh en 1876 dedujeron que el perfil de la onda solitaria de Russell era del estilo de sech^2 y que la velocidad obtenida empíricamente por Russell era deducible teóricamente. Todo esto lo hicieron suponiendo que la amplitud de la onda es pequeña en comparación con la profundidad del agua y que su anchura cumple una relación inversa a la anterior, tal como Russell había notado en sus experimentos.

Fue hasta 1895 cuando un par de matemáticos holandeses trabajando en colaboración, Korteweg y de Vries, dedujeron la ecuación gobernante del fenómeno¹. Ellos obtuvieron la ecuación

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \eta_{xx} \right)_x, \quad (1.3)$$

que es equivalente a la hoy conocida ecuación Korteweg-de Vries (KdV). En dicha ecuación, h es la profundidad del fluido, T es la tensión superficial, ρ es la densidad, η es la elevación de la superficie y $\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{\rho g}$. Para la deducción se hace la suposición de que $\eta \ll h$. En forma adimensional y cambiando de sistema de referencia, se llega a la versión estándar de KdV:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

La ecuación anterior tiene la solución de onda viajera

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right),$$

por lo que tiene la particularidad, común entre ondas no lineales, de que la velocidad, la amplitud y el ancho están relacionadas; de cierta manera que a mayor velocidad se tiene una

¹De acuerdo a Alexander, Pego y Sachs en [1], Boussinesq fue el primero en obtener una ecuación equivalente a (1.3) en sus trabajos de 1871, 1872 y especialmente 1877.

onda más elevada y angosta. Esta es la onda acampanada que observó Russell, la cual puede verse que se desplaza sin deformación y a velocidad constante c hacia la derecha. Usando *Mathematica*, se muestran gráficas de la solución de un solitón de KdV en la Fig. 1.6.

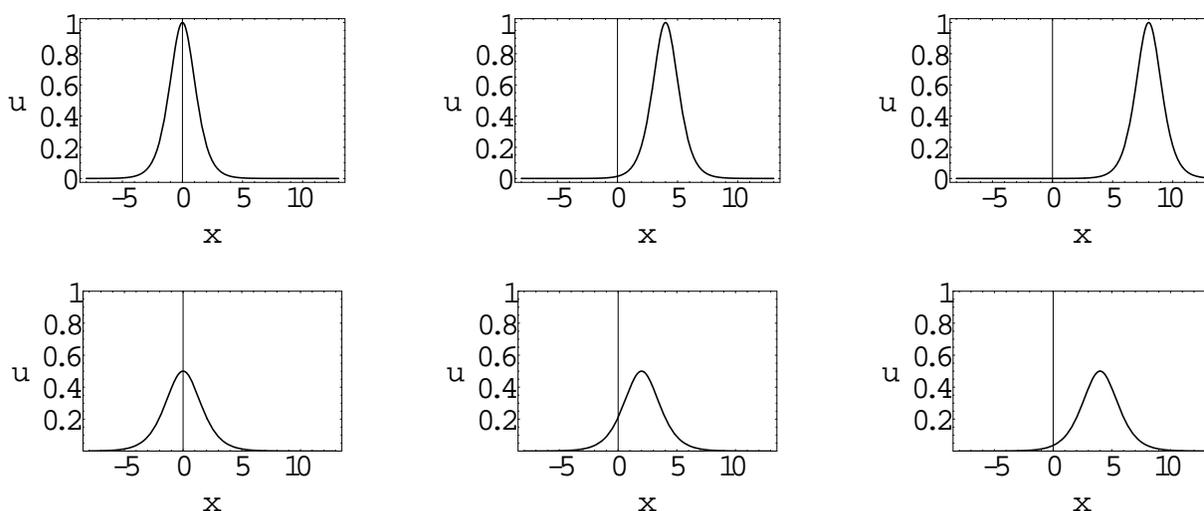


Fig. 1.6: Solución de un solitón de KdV. La gráfica de arriba muestra un solitón de amplitud 1 y la de abajo uno con amplitud $1/2$. Ambas series se muestran a $t = 0, 2$ y 4 .

Después de los trabajos de Kortweg y de Vries, la situación de las nuevas ondas permaneció en relativa calma hasta 1955, fecha en que se descubrió un comportamiento inesperado que más tarde sería relacionado con la ecuación KdV. Se trata de un estudio de la conductividad térmica de los sólidos, llevado a cabo por Fermi, Pasta y Ulam en el laboratorio de Los Alamos. El trabajo se realizó para el caso de un sólido unidimensional modelado como un conjunto de masas unidas por resortes con una fuerza que se compone de dos términos: uno de tipo armónico y uno de menor magnitud de tipo no lineal. En el caso de un sistema de masas unidas con resortes puramente armónicos, la energía proporcionada al inicio se reparte entre los modos vibracionales excitados y la energía de cada modo permanece constante en el tiempo. Debye había propuesto en 1914 que una no linealidad en los resortes provocaría un intercambio de energía entre modos hasta que se tuviera una repartición equitativa. Trabajando con la computadora Maniac I, los autores hicieron un experimento numérico con 64 masas y observaron algo inesperado: no ocurría la equipartición de energía. Si se daba energía sólo al primer modo de vibración, la energía se transfería entre los modos más bajos y eventualmente regresaba casi totalmente al primer modo, a partir de donde el proceso se repetía con ligeras diferencias, haciendo de éste un fenómeno cuasiperiódico.

Este comportamiento permaneció sin entenderse y fue ignorado por muchos, hasta que diez años después, en 1965 el problema fue abordado por Kruskal y Zabusky. Ellos con-

sideraron el problema de Fermi, Pasta y Ulam aproximando las posiciones discretas de los osciladores por una función continua. Haciendo después un desarrollo perturbativo de la solución, mostraron que a primer orden el desplazamiento de los osciladores a partir de los puntos de equilibrio cumple la ecuación KdV. El estudio de Kruskal y Zabusky marcó una etapa, ya que combinaron un estudio analítico con uno numérico. En este último, usaron una computadora para resolver numéricamente a la ecuación KdV con condiciones de frontera periódicas. Obtienen una onda que llega casi al rompimiento pero finalmente éste no ocurre debido a la dispersión. Después de ello, la solución desarrolla todo un sistema de ondas individuales con la forma de sech^2 , con las más altas moviéndose más rápido al igual que en la solución de onda solitaria de KdV. Al alcanzar una onda a otra más lenta, Zabusky y Kruskal observaron que ocurre una interacción pero que después emergen las dos ondas del inicio y se mueven a la misma velocidad que antes de la interacción. Esta conducta que preserva la identidad de cada onda llevó a los autores a acuñar el nombre *solitón*; el cual se origina del término *onda solitaria* usado por Russell pero que además incorpora el comportamiento de tipo partícula al añadir la terminación *-on*.

El que las ondas interactúen sin cambiar de forma es justo lo que se espera si la situación fuera lineal; sin embargo, este no es el caso y por ello fue totalmente inesperado, por lo que lo convierte en un proceso no lineal muy particular e interesante. Existen dos evidencias de que la interacción es no lineal: (i) al alcanzar la onda rápida a la otra, la amplitud de las ondas superpuestas es distinta a la suma de las amplitudes individuales y (ii) después de la interacción ocurre un cambio de fase, por lo que las ondas ocupan una posición diferente de la que tendrían en ausencia de interacción.

La solución de dos solitones de KdV es

$$u(x, t) = 12 \frac{4 \cosh(x - 8t) + \cosh(4x - 64t) + 3}{(3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}$$

y la deducción de la misma puede verse en [9] ó [23]. Nuevamente usando *Mathematica*, mostramos gráficas de esta solución mostrando el par de solitones y su interacción, ver Figs. 1.7 y 1.8. En dichas figuras, se muestran también gráficas de la superposición lineal de dos solitones con las mismas amplitudes que los de la solución exacta de dos solitones. Mediante una comparación entre ellas, es posible observar el cambio de fase (la onda grande se adelanta y la pequeña se atrasa) y también vemos que en $t = 0$ la superposición lineal es distinta a la de la solución exacta.

De lo anterior se obtiene una condición necesaria para la ocurrencia de un solitón, la cual se usa en ocasiones como definición abreviada de los mismos. Un solitón debe ser una solución a una ecuación no lineal que cumpla: (i) tenga forma permanente, ya sea localizada (es decir que decaiga a cero en infinito) o que tienda a valores constantes en los extremos y (ii) interactúe con otros solitones pero retenga su identidad². Definiciones más

²Se habla de onda solitaria cuando se tiene un solitón aislado, i.e. un solitón se convierte en onda solitaria al alejarse infinitamente de cualquier otra perturbación.

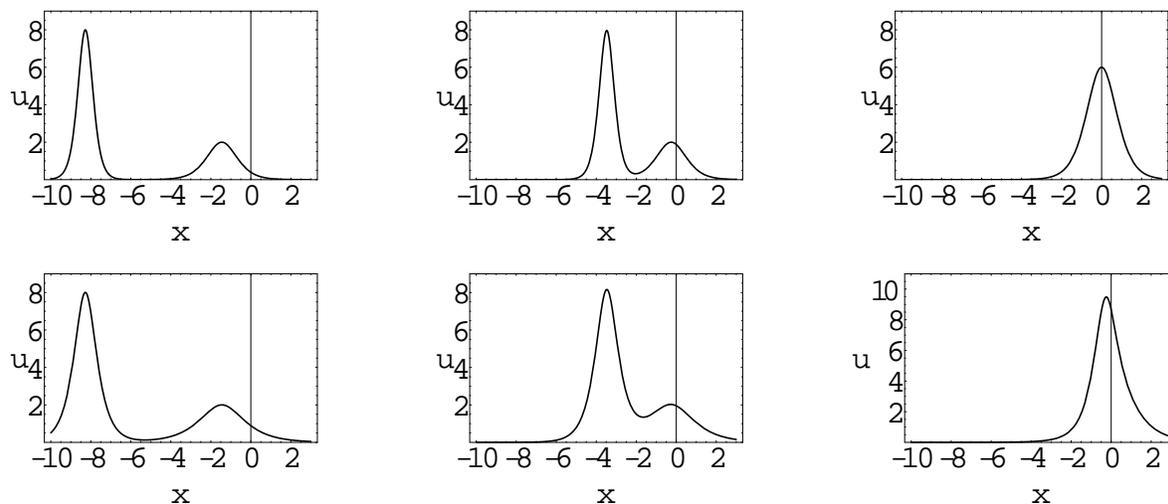


Fig. 1.7: Solución de dos solitones de KdV antes de la interacción, para $t = -0.5, 0.2$ y 0 . Las gráficas de arriba presentan la solución auténtica, mientras que las de abajo muestran la interacción suponiendo que fuera lineal.

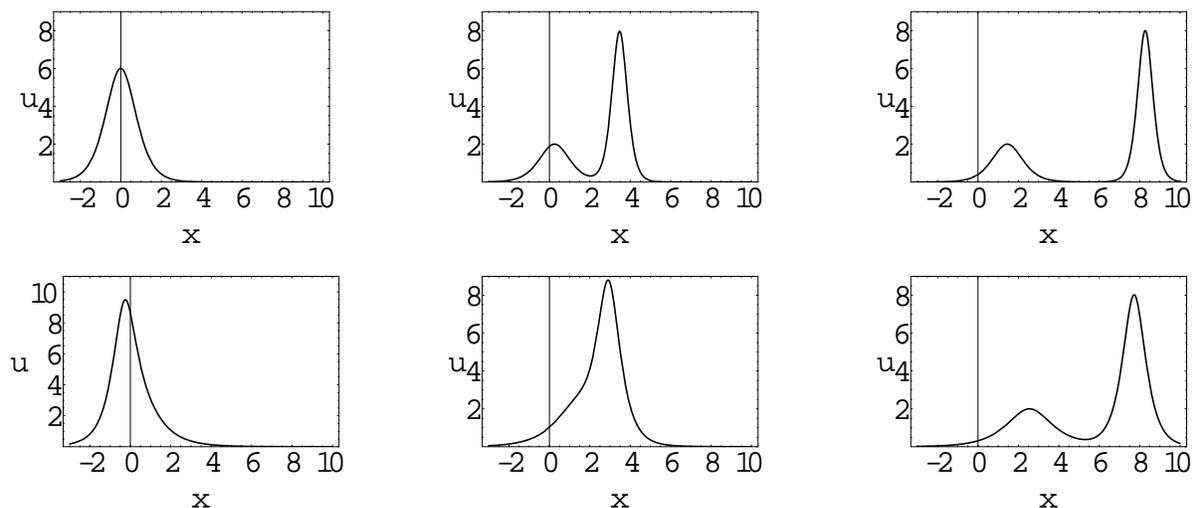


Fig. 1.8: Solución de dos solitones de KdV después de la interacción, para $t = 0, 0.2$ y 0.5 . Las gráficas de arriba presentan la solución auténtica, mientras que las de abajo muestran la interacción suponiendo que fuera lineal.

rigurosas de un solitón y una onda solitaria involucran el problema de *Dispersión Inversa* o *Inverse Scattering* en inglés, y puede verse en [27], [9], [8] ó [23]. Es importante notar que la definición de los solitones es independiente de su perfil, por lo que el perfil de sech^2 de KdV no es el único posible. Con el tiempo se han descubierto otras ecuaciones que poseen soluciones solitónicas, las cuales poseen otros perfiles como son el de sech para la ecuación modificada de Korteweg y de Vries (mKdV) y $\arctan(e^{\alpha x})$ para la ecuación de Sine-Gordon. Existen ecuaciones que poseen soluciones de ondas solitarias, pero que no generan solitones: al obligar a dos de ellos a interactuar, cada onda involucrada no necesariamente retiene su identidad o se generan ondas adicionales. Como ejemplo de ello, en [8] se menciona el caso de dos ecuaciones en donde ocurre justo lo anterior: presentan ondas solitarias pero no solitones. Al colisionar numéricamente dos ondas solitarias de estas ecuaciones, emergen dejando una estela de radiación. En esa misma referencia se presentan gráficas donde se aprecia el comportamiento mencionado.

1.1.3 Plasmas y solitones

Al incrementar la temperatura de un gas de manera indefinida, se llega a un punto en el que la energía térmica de las partículas que lo constituyen es comparable a la energía electrostática de amarre entre ellas. En lugar de un gas caliente compuesto de moléculas eléctricamente neutras, tendremos una mezcla formada de partículas con cargas opuestas: electrones y núcleos ionizados. A esta mezcla se le conoce como plasma.

Debido a que posee propiedades muy distintas a los exhibidos por otros estados de la materia, se le considera un estado fundamentalmente nuevo. Una de estas propiedades es su alta conductividad eléctrica, la cual provoca que los campo eléctricos aplicados externamente sean cancelados en su interior por el desplazamiento de cargas generado. El desplazamiento de cargas en un plasma puede resultar interesante en varios contextos; en particular en el caso del estudio de ondas, es posible tener fluctuaciones en la densidad de los iones y de los electrones del plasma y bajo ciertas condiciones estas variaciones tienen una propagación ondulatoria.

En la tierra, los plasmas aparecen de manera natural sólo en las descargas eléctricas atmosféricas y en las auroras. Sin embargo, más allá de la atmósfera se encuentra la magnetósfera; ésta es un plasma formado por la interacción del campo magnético terrestre con el viento solar. Para trabajar plasmas en el laboratorio, se toma una cantidad pequeña de gas, se calienta e ioniza mediante una corriente eléctrica que lo atraviese o dirigiendo ondas de radio hacia él. Por estos procedimientos se da energía a los electrones libres del gas, los cuales a su vez liberan más electrones mediante colisiones con átomos. De esta manera se llega hasta el grado de ionización deseado. En ocasiones, los electrones terminan teniendo una mayor temperatura que los iones, debido a que ellos son los que transportan la corriente eléctrica o por una mayor absorción de ondas de radio.

En el estudio de plasmas se han desarrollado técnicas que se originaron de otras áreas

de la física. En un primer punto de vista, cada partícula se considera individualmente y su movimiento está determinado por la fuerza de Lorentz. De aquí se obtiene cierta intuición sobre el comportamiento del plasma y se encuentra que las partículas se mueven en complicadas trayectorias dependiendo de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , que en esta perspectiva se piensan como dados. Por ello, este punto de vista no explica el origen de dichos campos y de hecho es importante notar que éstos surgen de manera auto-consistente; i.e. los campos determinan las trayectorias de las partículas, pero las posiciones y velocidades de ellas determinan a su vez a los campos. Una segunda limitación de este tipo de estudio se vuelve evidente al recordar que las incógnitas de este estudio son las trayectorias de todas las partículas, cantidades que no pueden determinarse en la práctica para un plasma con una cantidad grande de ellas.

Si por otro lado se piensa en el plasma como un gas de partículas cargadas, se vuelve natural el extender la teoría cinética de gases para describirlos y se modifica hasta obtenerse una teoría cinética de plasmas, aprovechando el tratamiento de la física estadística para sistemas de muchas partículas. Esta es distinta a la teoría análoga de los gases ya que incorpora la interacción electromagnética y frecuentemente las colisiones son relegadas a un segundo plano. Este punto de vista es de gran valor y sirve de fundamento para otras perspectivas de estudio.

Un tercer punto de partida se obtiene al analizar el plasma desde la dinámica de fluidos. Este acercamiento es motivado por el hecho de que macroscópicamente el plasma simplemente parece un fluido con alta conductividad eléctrica, similar a un metal fundido. Este fluido tendrá una fuerte interacción con campos electromagnéticos y se describe en términos de las llamadas ecuaciones de la magnetohidrodinámica, que son simplemente las ecuaciones de la dinámica de fluidos³ después de incorporar fuerzas electromagnéticas y las ecuaciones que describen el comportamiento de los campos electromagnéticos mismos, i.e. las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica. Desde esta perspectiva los plasmas heredan la riqueza de los fenómenos no lineales, debido a que las ecuaciones de la dinámica de fluidos son inherentemente no lineales.

Solitones en Plasmas

Como se ha mencionado antes, en el presente son muy diversos los contextos en los que aparecen ondas solitarias, y el de los plasmas se ha convertido en uno más. Desde cierta perspectiva esto se debe a que los plasmas heredan la no linealidad característica de la dinámica de fluidos. Cabe aquí mencionar que Lamb en [23] expone varios ejemplos en los cuales la no linealidad hidrodinámica, $u \frac{\partial u}{\partial x}$, conduce a varias ecuaciones que permiten soluciones del tipo de ondas solitarias. En el caso de plasmas, los solitones representan ondas de densidad de iones, de manera que se tiene una región de diferente densidad iónica

³Es importante notar que las ecuaciones de la dinámica de fluidos aplicadas a plasmas pueden obtenerse desde el punto de vista de la teoría cinética de plasmas, algo que demuestra la trascendencia de este último punto de vista, ver [7] ó [6].

que se propaga como onda solitaria.

La relación entre plasmas y solitones no es reciente. En 1964, Sagdeev muestra (se publica en inglés en 1966 en [30]) que al aplicar las ecuaciones de la dinámica de fluidos a un plasma de iones fríos y electrones calientes es posible obtener un pulso que se propague un poco más rápido que la velocidad acústica de los iones (más adelante se mostrará qué velocidad es ésta) sin cambiar de forma. El autor considera el desarrollo de ondas de choque en el plasma empleando la analogía con la dinámica de gases. Explica cómo los términos no lineales producen un aumento en la pendiente de la condición inicial ('steepening', en inglés) hasta llegar a una discontinuidad o una función multivaluada. Sin embargo, se muestra también que para cierta amplitud pequeña de la onda este rompimiento no se alcanza ya que los términos dispersivos se tornan importantes antes de llegar a una pendiente vertical. El argumento principal utilizado en el trabajo es que el desarrollo de ondas no lineales que se propaguen sin deformación sólo es posible si ocurre un balance entre no linealidad y dispersión.

Para amplitudes mayores, Sagdeev menciona que la dispersión podría no ser suficiente para balancear la no linealidad y esto resultaría en la formación de una auténtica onda de choque, de la cual resulte una discontinuidad o una función multivaluada.

Poco después, Washimi y Taniuti en [36] consideran ondas de densidad iónica en un plasma, bajo las mismas condiciones anteriores de iones fríos y electrones calientes. Usando nuevamente las ecuaciones de dinámica de fluidos⁴ y aplicando un proceso perturbativo que considere el equilibrio entre no linealidad y dispersión, obtienen la ecuación KdV. Este resultado muestra entonces que la onda viajera sin deformación que Sagdeev encontró es la onda solitaria de esta célebre ecuación.

En 1967, Montgomery publica sus estudios de ondas de choque en un plasma del mismo tipo que los considerados antes en [25]. Se parte del modelo de dinámica de fluidos para plasmas y se comenta la similitud entre este caso y el de una onda de choque acústica no lineal en un gas. Se llega a la conclusión de que la no linealidad tendrá el efecto de que las pendientes de la solución se hagan más bruscas y se llegue a una discontinuidad. No se considera el caso en que la dispersión balancee a la no linealidad, impidiendo la ocurrencia del fenómeno antes descrito.

1.2 Obtención de las ecuaciones de movimiento

En la presente sección se estudia el comportamiento de ondas de densidad iónica en un plasma, esto es, variaciones ondulatorias en la densidad de los iones del plasma⁵.

⁴Se desprecia la disipación de Landau o 'Landau damping', como se le llama en inglés. Hablaremos de esto más adelante.

⁵Por analogía con el caso de variaciones de densidad en el aire, a estas fluctuaciones se les llama 'ondas acústicas en el plasma'. En inglés son las llamadas 'ion acoustic waves'.

Consideramos un plasma diluido de dos componentes, i.e. iones con carga e y electrones con carga $-e$, inmerso en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$ de gran intensidad⁶. Se trata el caso en que los iones realizan oscilaciones de baja frecuencia, cerca de la llamada frecuencia iónica del plasma

$$\omega_i \equiv \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i} \right)^{1/2},$$

donde n_0 es la densidad numérica de iones en el estado no perturbado y m_i su masa.

Debido al carácter diluido y a las altas temperaturas a las que se encuentra el plasma, es posible modelarlo como si se tratara de dos gases ideales mezclados: uno de ellos formado de electrones y el segundo de iones. Utilizando a n como densidad numérica de partículas, a p como la presión y T como la temperatura, son válidas el par de ecuaciones de estado

$$p_i = n_i k_B T_i, \quad p_e = n_e k_B T_e,$$

donde los subíndices hacen referencia a cada tipo de gas y k_B es la constante de Boltzmann. Por tratarse además de gases ideales se sabe que obedecen una distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Para simplificar aún más el problema, se supondrá que es posible despreciar los efectos de la presión en el gas de iones, debido a que las fuerzas electromagnéticas son dominantes. Esto se escribe de manera precisa como⁷

$$\beta \equiv \frac{p_i}{B^2/8\pi} = \frac{8\pi n_i k_B T_i}{B^2} \ll 1,$$

lo cual se garantiza introduciendo un campo magnético intenso y suponiendo que la temperatura de los iones no es demasiado grande.

Debido a la baja frecuencia de las oscilaciones de la densidad iónica, no se generarán corrientes significativas que alteren al campo magnético, de manera que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \simeq \mathbf{0}$, por lo que de las ecuaciones del electromagnetismo sabemos que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

Modelando entonces al movimiento de los iones del plasma como a un fluido, la conservación de los mismos se expresa como

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{v} = 0, \tag{1.4}$$

donde se ha omitido el subíndice i de la densidad de iones n , por simplicidad. La velocidad de los iones se expresa por \mathbf{v} y recordamos que ésta y la densidad de iones son funciones de x, y, z y el tiempo t .

⁶Utilizaremos a $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ como los vectores unitarios en dirección x , y y z respectivamente. Además \mathbf{x} denota vector de posición.

⁷Recuérdese que un campo magnético ejerce una presión de magnitud $B^2/8\pi$, en unidades CGS.

El efecto de las fuerzas que actúan sobre los iones se introduce en la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{m_i n} \nabla p - \frac{e}{m_i} \nabla \phi + \frac{e}{m_i c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \simeq -\frac{e}{m_i} \nabla \phi + \frac{e}{m_i c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

donde se desprecia la presión de los iones, por lo expuesto antes.

El campo magnético es constante y por lo tanto no hay nada más que decir sobre él. Sin embargo, sabemos que el potencial eléctrico obedece la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e(n - n_e),$$

la cual parece complicar el problema ya que involucra a la densidad numérica de electrones n_e . Se verá ahora que si se supone que $T_e \gg T_i$ se llega a una forma para n_e que permite formular el problema en términos de cantidades relacionadas con los iones y el potencial eléctrico exclusivamente.

De la distribución de velocidades de un gas ideal, sabemos que los electrones tendrán velocidades del orden de $(2k_B T_e / m_e)^{1/2}$ y los iones del orden de $(2k_B T_i / m_i)^{1/2}$. Recordando que la proporción entre masas de iones y electrones es muy grande y suponiendo que $T_e \gg T_i$ entonces los electrones se moverán mucho más rápido que los iones. Siendo esto así, durante el transcurso de las oscilaciones (de baja frecuencia) de la densidad iónica, los electrones se limitarán a seguir a los iones y mantener una aproximada neutralidad de carga. Esto además garantiza que el tiempo que tardan los electrones en volver al equilibrio entre sí después de una fluctuación en la densidad local de iones es mínimo y es posible modelar al gas de electrones como si estuviera en equilibrio. El gas de electrones sigue entonces una distribución de Boltzmann

$$n_e = n_0 e^{-(e\phi/k_B T_e)} = n_0 e^{e\phi/k_B T_e},$$

por lo que los electrones tienden a acumularse en los lugares donde la densidad iónica es alta y seguir de esta manera el movimiento de los iones. El que la densidad electrónica se comporte de esta manera ha sido confirmado en los experimentos de Taylor, Baker e Ikezi en [13] y [35], para el caso sin campo magnético.

Usando esto, el potencial eléctrico obedece

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e(n - n_0 e^{e\phi/k_B T_e}). \quad (1.6)$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones de movimiento es

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \mathbf{v} = 0, \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{e}{m_i} \nabla \phi + \frac{e}{m_i c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.7b)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e(n - n_0 e^{e\phi/k_B T_e}). \quad (1.7c)$$

1.3 Relación de dispersión de las ondas iónicas acústicas en un campo magnético uniforme

Se obtiene ahora la relación de dispersión para las variaciones de densidad iónica dadas por (1.7). Pensemos en un plasma que se encuentra en equilibrio, su densidad será $n = n_0$ en toda su extensión, su velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y el potencial será una constante que podemos escoger como $\phi = 0$ ⁸. Si pensamos en la introducción de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$ y en el desarrollo de una perturbación de muy pequeña amplitud, es válido linealizar a (1.7) con los valores promedio, se obtiene de ello

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_i} \nabla \phi + \frac{e}{cm_i} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.8b)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \left(n - n_0 - n_0 \frac{e\phi}{k_B T_e} \right), \quad (1.8c)$$

donde se utilizó $e^{e\phi/k_B T_e} \approx 1 + e\phi/k_B T_e$. Introducimos ahora perturbaciones periódicas del tipo $n = n_0 + \tilde{n}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ y $\phi = \tilde{\phi}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$. Pedimos que las perturbaciones sean pequeñas $\tilde{n}/n_0 \ll 1$, $|\tilde{\mathbf{v}}|/\sqrt{k_B T_e/m_i} \ll 1$ y $\tilde{\phi}/(k_B T_e/e) \ll 1$ de manera que de (1.8) se obtiene

$$-i\tilde{n}\omega + in_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.9a)$$

$$-i\omega \tilde{\mathbf{v}} = -i\frac{e}{m_i} \tilde{\phi} \mathbf{k} + \frac{e}{m_i c} \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}, \quad (1.9b)$$

$$-k^2 \tilde{\phi} = -4\pi e \left(\tilde{n} - \frac{n_0 e}{k_B T_e} \tilde{\phi} \right). \quad (1.9c)$$

Lo anterior lo podemos escribir como

$$\omega = \frac{n_0}{\tilde{n}} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (1.10a)$$

$$\omega \tilde{\mathbf{v}} = \frac{e}{m_i} \tilde{\phi} \mathbf{k} + i\Omega_i \tilde{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (1.10b)$$

$$\tilde{\phi} = \frac{4\pi e \tilde{n}}{k^2 + \lambda_D^{-2}}, \quad (1.10c)$$

⁸No significa esto que los iones y electrones individuales estén en reposo, muy por el contrario. Esto simplemente significa que en promedio no hay desplazamiento neto de ninguno de ellos. La situación es análoga con el caso de un contenedor de agua en reposo, el que se observe que el agua está quieta no significa que cada molécula lo esté.

si hacemos las definiciones $\Omega_i \equiv \frac{eB}{cm_i}$ (girofreqüencia de los iones) y $\lambda_D^2 \equiv \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2}$ (λ_D es la longitud de Debye).

Se elimina $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ entre (1.10a) y (1.10b), obteniéndose

$$\omega^2 = \frac{n_0 e}{\tilde{n} m_i} k^2 \tilde{\phi} + i \frac{n_0 \Omega_i}{\tilde{n}} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{x}}.$$

Eliminando a su vez $\tilde{\phi}$ usando (1.10c), se obtiene para ω^2

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{\lambda_D^2 k^2 + 1} + i \frac{n_0 \Omega_i}{\tilde{n}} (k_y \tilde{v}_z - k_z \tilde{v}_y), \quad (1.11)$$

donde $c_s^2 \equiv \frac{k_B T_e}{m_i}$ es la llamada velocidad de las ondas iónicas acústicas, nombre que se entenderá un poco más adelante. El único paso restante para obtener la relación de dispersión, es eliminar a \tilde{v}_y y \tilde{v}_z de (1.11). Esto lo podemos hacer si escribimos las componentes y y z de (1.10b), que son

$$\begin{aligned} \omega \tilde{v}_y &= \frac{e}{m_i} \tilde{\phi} k_y + i \Omega_i \tilde{v}_z, \\ \omega \tilde{v}_z &= \frac{e}{m_i} \tilde{\phi} k_z - i \Omega_i \tilde{v}_y. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos un sistema lineal para las cantidades deseadas. De este sistema se obtiene para \tilde{v}_y y \tilde{v}_z

$$\tilde{v}_y = \frac{e \tilde{\phi}}{m_i} \cdot \frac{\omega k_y + i \Omega_i k_z}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \quad (1.12a)$$

$$\tilde{v}_z = \frac{e \tilde{\phi}}{m_i} \cdot \frac{\omega k_z - i \Omega_i k_y}{\omega^2 - \Omega_i^2}. \quad (1.12b)$$

Usando (1.12) en la ecuación (1.11) y simplificando un poco se obtiene

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{\lambda_D^2 k^2 + 1} + \frac{\Omega_i^2 c_s^2}{\lambda_D^2 k^2 + 1} \cdot \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}.$$

Mediante las manipulaciones siguientes podremos simplificar un poco más la expresión anterior

$$\begin{aligned} \lambda_D^2 k^2 + 1 &= \frac{c_s^2 k^2}{\omega^2} + \frac{c_s^2 \Omega_i^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \\ &= \frac{c_s^2 k_x^2}{\omega^2} + \frac{c_s^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\omega^2} \left[1 + \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{c_s^2 k_x^2}{\omega^2} + \frac{c_s^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\omega^2 - \Omega_i^2}.$$

De esta manera se obtiene la relación de dispersión para ondas iónicas acústicas en un plasma diluido, no isotérmico ($T_e \gg T_i$) en presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$

$$\lambda_D^2 k^2 + 1 = \frac{c_s^2 k_x^2}{\omega^2} + \frac{c_s^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\omega^2 - \Omega_i^2}. \quad (1.13)$$

El caso en que $\omega \simeq \Omega_i$ aparentemente traería dificultades, debido a la aparición de la cantidad $\omega^2 - \Omega_i^2$ en un denominador. Sin embargo, debemos mencionar que en este caso el efecto de la Disipación de Landau hace que la anterior relación de dispersión sea incompleta ya que en realidad aparecen términos imaginarios adicionales. Esto tiene el efecto de que la frecuencia ω sea compleja (lo cual involucra un amortiguamiento de las ondas) y por lo tanto el tener a $\omega^2 - \Omega_i^2$ en un denominador no acarrea problemas, ya que Ω_i es puramente real y no es posible entonces que el denominador se aproxime a cero.

Es sencillo obtener una versión adimensional de la relación de dispersión que será de utilidad más adelante. Hacemos los cambios $\mathbf{k} \rightarrow \lambda_D^{-1} \mathbf{k}$ y $\omega \rightarrow \omega_i \omega$, donde $\omega_i \equiv \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i} \right)^{1/2}$ es la frecuencia iónica del plasma y satisface que $c_s = \lambda_D \omega_i$. De estos cambios se obtiene

$$k^2 + 1 = \frac{k_x^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (1.14)$$

llamando Ω al cociente Ω_i/ω_i .

Notamos que la relación de dispersión para fluctuaciones de densidad de los iones del plasma en un campo magnético (1.13), y su correspondiente adimensional (1.14) son asimétricas entre las direcciones de propagación de la onda. En particular, las direcciones y y z son simétricas entre sí, pero la x no lo es. Esto se debe a que el campo magnético uniforme a lo largo de la coordenada x hace de ella una dirección anisotrópica y rompe la simetría del problema, algo que tendrá un efecto fundamental en la ecuación de onda no lineal que se deriva del problema, ZK.

Consideramos ahora un par de casos límite a partir de la relación de dispersión encontrada, el de campo magnético nulo y uno de gran intensidad. Para eventualmente obtener la ecuación ZK estaremos trabajando en el segundo de estos regímenes.

1.3.1 Relación de dispersión en ausencia de campo magnético

Es posible obtener una relación de dispersión para el caso de ondas iónicas acústicas en ausencia de campo magnético seguimos un procedimiento análogo al anterior partiendo desde (1.7) con $B = 0$. Sin embargo, se llega a la misma expresión si tomamos $\Omega_i = \frac{eB}{cm_i} = 0$ en

(1.13), obteniéndose

$$\omega = \frac{kc_s}{\sqrt{\lambda_D^2 k^2 + 1}}. \quad (1.15)$$

De manera que la anisotropía desaparece, justo como se esperaba ya que el campo magnético es enteramente responsable de su aparición.

Para valores típicos de temperatura del gas de electrones y densidad de iones usados por Taylor, Baker e Ikezi en [35], [13] y [14], $T_e \approx 15,000K^\circ$ y $n_0 \approx 10^9 cm^{-3}$, tenemos que $\lambda_D \approx 2.7^{-4}m$ y $c_s \approx 1760m/s$. Esto sugiere que hagamos una aproximación para $\omega(k)$ cuando $\lambda_D k \ll 1$ y entonces entenderemos el porqué del nombre de c_s . Tenemos

$$\omega = \frac{kc_s}{\sqrt{\lambda_D^2 k^2 + 1}} \approx kc_s \left(1 - \frac{1}{2}\lambda_D^2 k^2\right) \approx kc_s,$$

por lo que en el límite de longitudes de onda grandes con una longitud de Debye pequeña, las ondas iónicas acústicas en ausencia de campo magnético son no dispersivas y viajan con una velocidad de fase (que precisamente por ser no dispersivas es igual a la velocidad de grupo) c_s . Es posible llevar la analogía entre ondas acústicas en el aire y en un plasma un poco más lejos. En el caso de ondas en el aire, se muestra que en el límite lineal las ondas son no dispersivas y viajan con una velocidad $\left(\frac{d\rho}{dp}(p_0)\right)^{-1/2}$, donde ρ es la densidad del aire y p_0 es la presión en el estado no perturbado. Si se asume que el aire es un gas ideal y que en el proceso ocurre de manera isotérmica⁹ se tiene que $\left(\frac{d\rho}{dp}(p_0)\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, donde m es la masa de las moléculas. Nótese que esta velocidad tiene la misma forma que c_s en el caso de ondas iónicas acústicas.

1.3.2 Relación de dispersión en un campo magnético de gran intensidad

Si ahora consideramos el límite en que el campo magnético es muy intenso y las oscilaciones iónicas son de baja frecuencia, cumpliendo $\omega \simeq \omega_i$; podemos resumir todo esto en la forma $\Omega_i \gg \omega \simeq \omega_i$, o bien $\Omega \gg 1$. La relación de dispersión será en este caso

$$\lambda_D^2 k^2 + 1 \simeq \frac{c_s^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{c_s^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\Omega_i^2},$$

por lo que al despejar ω^2 tendremos

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k_x^2}{1 + \lambda_D^2 k_x^2 + (\lambda_D^2 + c_s^2 \Omega_i^{-2})(k_y^2 + k_z^2)}$$

⁹En realidad en el caso de ondas de sonido en el aire es más apropiado asumir que la propagación ocurre adiabáticamente, por lo que la expresión para la velocidad es distinta.

$$= \frac{c_s^2 k_x^2}{1 + \lambda_D^2 k_x^2 + \lambda_D^2 (1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2)}. \quad (1.16)$$

Al igual que en el apartado anterior, consideramos el caso en el que las perturbaciones tienen longitudes de onda largas y entonces $\lambda_D k_j \ll 1$, con $j = x, y, z$. Se obtiene en ese caso para ω^2

$$\omega^2 \approx c_s^2 k_x^2 \left(1 - \lambda_D^2 k_x^2 - \lambda_D^2 (1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right),$$

y de lo anterior obtenemos para ω

$$\omega \approx c_s k_x \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_D^2 k_x^2 - \frac{1}{2} \lambda_D^2 (1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right). \quad (1.17)$$

Más adelante será útil trabajar con expresiones adimensionales, por lo que es conveniente añadir que la expresión anterior tiene su análogo adimensional

$$\omega \approx k_x \left(1 - \frac{1}{2} k_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right), \quad (1.18)$$

que será aprovechada después para determinar la forma de la expansión perturbativa mediante la cual se llegará a la ecuación ZK.

1.4 Disipación de Landau

La disipación de Landau¹⁰ es un proceso extremadamente interesante, mediante el cual una onda en un plasma (ya sea electrónica o iónica) puede ceder energía a las partículas del medio que no forman parte de la onda y de esta manera amortiguarse. Se dice entonces que la energía de la onda se disipa, aunque debe enfatizarse que esto ocurre en ausencia de colisiones; es en realidad un proceso completamente electromagnético y por lo tanto no un proceso convencional de disipación de energía. Por esta razón, la energía se disipa de forma distinta a la manera en que ocurre en otros medios absorbentes, como queda de manifiesto al notar que este proceso no involucra un aumento de entropía y por ello es un proceso termodinámicamente reversible. Veremos que esta reversibilidad de hecho ocurre, ya que bajo ciertas condiciones las partículas del plasma pueden ceder energía a la onda, de manera que ésta resulte excitada.

Un aspecto importante de este fenómeno es que fue descubierto de manera teórica en 1946 por Lev D. Landau y verificado experimentalmente en un plasma por J. H. Malmberg y C. B. Wharton¹¹ en 1966. Adicionalmente, este fenómeno no está restringido a plasmas.

¹⁰En inglés se le conoce como 'Landau Damping'.

¹¹*Phys. Rev. Lett.*, **17**, p. 175 (1966).

En el caso de una galaxia, que puede pensarse como un gas donde la interacción eléctrica se sustituye por gravitacional, la disipación de Landau puede jugar un papel importante en el entendimiento de la estructura que se adopta.

Una manera de mostrar este efecto es partiendo de la teoría cinética de plasmas. Consideramos un espacio de seis dimensiones, con tres espaciales y tres más correspondientes a un espacio de velocidades. Definimos la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ como la densidad de partículas de una misma especie en este espacio de seis dimensiones, de manera que

$$\int_{V_{\mathbf{x}}} \int_{V_{\mathbf{v}}} f dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3 = \int_{V_{\mathbf{x}}} \int_{V_{\mathbf{v}}} f d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v},$$

es el número de partículas en el volumen espacial $V_{\mathbf{x}}$ y a su vez en el volumen del espacio de velocidades $V_{\mathbf{v}}$. De ello, se sigue que la cantidad

$$n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v},$$

es la densidad espacial de partículas en el punto \mathbf{x} y al tiempo t . En condiciones de equilibrio y a una elevada temperatura, el plasma tiene una distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{x}, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Considerando además la conservación de partículas en el espacio de seis dimensiones se llega a la importante ecuación de Boltzmann sin colisiones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0,$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}} f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})$, $\nabla_{\mathbf{v}} f = (f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_3})$ y \mathbf{a} es la aceleración. Nótese que se tendrá una ecuación de Boltzmann para cada especie de partículas.

Usando la segunda ley de Newton, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0.$$

Aplicando lo anterior al caso de partículas cargadas tenemos $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ y la ecuación de Boltzmann queda

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0,$$

que toma el nombre de ecuación de Vlasov. En esta ecuación, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} dependen de la configuración del plasma, dado por la función f . De esta manera, la ecuación de Vlasov es en realidad de tipo no lineal.

Veamos cómo se obtiene la disipación de Landau a partir de todo esto. Supóngase que tenemos un plasma de dos especies, iones con carga e y electrones con carga $-e$, que inicialmente obedecen una distribución de Maxwell. Dado que nuestro interés radica en ondas de densidad de iones nos fijamos en la variación de la distribución inicial de éstos:

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}},$$

y suponemos que los campos son nulos al inicio. Escribimos $f_0 = f_0(\mathbf{v})$, aunque en realidad no depende de las componentes individuales sino solamente de su norma $v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. La densidad de partículas al inicio está dado por:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = n_0.$$

Si se desarrolla una perturbación que produce una pequeña variación en la densidad de los iones, entonces $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, donde \tilde{f} es la perturbación sobre la configuración inicial y tiene una amplitud mucho menor que f_0 . Esta perturbación produce un pequeño campo eléctrico, $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}$. En ausencia de campo magnético, la ecuación de Vlasov linealizada es

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f} + \frac{e}{m} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0.$$

Asumimos ahora que $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ tiene la forma de un modo normal en la dirección x_1 y algo análogo para el campo eléctrico:

$$\tilde{f} = \hat{f}(v_1, t) e^{ikx_1}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \hat{E}(t) e^{ikx_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1.19)$$

Es posible ver que la densidad de iones tendrá la misma forma que las cantidades anteriores:

$$n = \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} (f_0 + \tilde{f}) d^3 \mathbf{v} = n_0 + \tilde{n},$$

es decir

$$\tilde{n} = n - n_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v} = \int_{\Omega_{23}} \hat{f}(v_1, t) e^{ikx_1} d^3 \mathbf{v} = \hat{n}(t) e^{ikx_1}, \quad (1.20)$$

donde se restringe la región de integración del espacio de velocidades de manera que las integrales sobre v_2 y v_3 abarquen una región finita, mientras que la integral sobre v_1 permanece

sobre todos los reales. A la nueva región la designamos Ω_{23} ; lo anterior tiene el propósito de garantizar la existencia de la integral de arriba; basta por lo tanto suponer que la forma de modo normal en x_1 se cumple en una región del espacio de velocidades y que fuera de ella \tilde{f} es cero.

La ecuación linealizada de Vlasov resulta ahora

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + ikv_1 \hat{f} + \frac{e}{m_i} \hat{E} \frac{\partial f_0}{\partial v_1} = 0. \quad (1.21)$$

Resolvemos ahora la ecuación anterior mediante la Transformada de Laplace. Utilizamos la notación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \hat{f}(v_1, t) \right\} &= \int_0^\infty \hat{f}(v_1, t) e^{-st} dt = \bar{f}(v_1, s), \\ \mathcal{L} \left\{ \hat{E}(t) \right\} &= \int_0^\infty \hat{E}(t) e^{-st} dt = \bar{E}(s), \end{aligned}$$

donde $\text{Re}(s) > 0$ y con un valor lo suficientemente grande para que las integrales de arriba converjan. Suponiendo que el campo eléctrico al tiempo cero es nulo, después de transformar (1.21) se tiene

$$s\bar{f} - \hat{f}(v_1, 0) + ikv_1 \bar{f} + \frac{e}{m_i} \bar{E} \frac{\partial f_0}{\partial v_1} = 0,$$

o bien, se encuentra para $\bar{f}(v_1, s)$

$$\bar{f}(v_1, s) = \frac{1}{s + ikv_1} \left[\hat{f}(v_1, 0) - \frac{e}{m_i} \bar{E}(s) \frac{\partial f_0}{\partial v_1} \right]. \quad (1.22)$$

Requerimos una segunda ecuación que involucre al campo eléctrico. Esta es proporcionada por la teoría electromagnética

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho = 4\pi e(n - n_e) = 4\pi e \left(n - n_0 e^{\frac{e\phi}{k_B T_e}} \right) \approx 4\pi e \left(n - n_0 - \frac{en_0}{k_B T_e} \phi \right) \\ &= 4\pi e \left(\tilde{n} - \frac{en_0}{k_B T_e} \phi \right), \end{aligned}$$

donde ϕ es el potencial eléctrico. Usando la forma del campo eléctrico dada en (1.19) y también (1.20) tenemos

$$ik\hat{E}e^{ikx_1} = 4\pi e \left(\hat{n}(t)e^{ikx_1} - \frac{en_0}{k_B T_e} \phi \right);$$

si derivamos en x_1 la ecuación, tendremos

$$-k^2 \hat{E} e^{ikx_1} = 4\pi e \left(ik \hat{n}(t) e^{ikx_1} + \frac{en_0}{k_B T_e} \hat{E} e^{ikx_1} \right),$$

usando $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. De esta manera obtenemos el campo eléctrico

$$\hat{E}(t) = -i \frac{4\pi e \lambda_D^2 k}{1 + \lambda_D^2 k^2} \hat{n}(t) = -i \frac{4\pi e \lambda_D^2 k}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{\Omega_{23}} \hat{f}(v_1, t) d^3 \mathbf{v}$$

donde $\lambda_D^2 \equiv \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2}$ es la llamada longitud de Debye. Aplicando la Transformada de Laplace a la expresión de arriba, tenemos

$$\bar{E}(s) = -i \frac{4\pi e \lambda_D^2 k}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{\Omega_{23}} \bar{f}(v_1, s) d^3 \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Si consideramos $\hat{f}(v_1, 0) = 0$, y sustituimos (1.23) en (1.22), se encuentra

$$\bar{f}(v_1, s) = i \frac{4\pi e^2 \lambda_D^2 k}{m_i (s + iv_1 k) (1 + \lambda_D^2 k^2)} \frac{\partial f_0}{\partial v_1}(v) \int_{\Omega_{23}} \bar{f}(v_1, s) d^3 \mathbf{v}.$$

Integrando en la región Ω_{23} del espacio de velocidades se tiene

$$\int_{\Omega_{23}} \bar{f} d^3 \mathbf{v} = i \frac{4\pi e^2 \lambda_D^2 k}{m_i (1 + \lambda_D^2 k^2)} \int_{\Omega_{23}} \frac{1}{s + iv_1 k} \frac{\partial f_0}{\partial v_1} d^3 \mathbf{v} \int_{\Omega_{23}} \bar{f} d^3 \mathbf{v};$$

podemos ahora tomar el límite $\Omega_{23} \rightarrow \mathbb{R}^3$, quedando

$$1 = i \frac{4\pi e^2 \lambda_D^2 k}{m_i (1 + \lambda_D^2 k^2)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{s + iv_1 k} \frac{\partial f_0}{\partial v_1} d^3 \mathbf{v}.$$

Recordamos ahora que $f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$, por lo que podemos realizar las integrales en v_2 y v_3 de la expresión de arriba:

$$1 = i \frac{4\pi e^2 n_0 \lambda_D^2 k}{m_i (1 + \lambda_D^2 k^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s + iv_1 k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1,$$

donde \hat{f}_0 es una distribución de Maxwell-Boltzmann en una dimensión con densidad de partículas igual a uno

$$\hat{f}_0(v_1) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} v_1^2} = \frac{1}{\pi^{1/2} v_i} e^{-v_1^2/v_i^2}, \quad (1.24)$$

donde $v_i = \sqrt{\frac{2k_B T_i}{m_i}}$ es la llamada velocidad térmica de los iones y es la más frecuente de la distribución. Mediante la definición $\omega_i^2 \equiv \frac{4\pi e^2 n_0}{m_i}$, a la que se llama la frecuencia iónica del plasma, podemos hacer una simplificación

$$1 = \frac{\omega_i^2 \lambda_D^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - is/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1.$$

De hecho, es aún mejor el introducir la velocidad de ondas acústicas en los iones, $c_s = \omega_i \lambda_D$, quedando así

$$1 = \frac{c_s^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - is/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1.$$

Recordamos ahora que $\text{Re}(s) > 0$, de manera que las integrales de la Transformada de Laplace tengan una convergencia garantizada. Hacemos el cambio de variable $s = -i\omega$, con $\text{Re}(s) = \text{Im}(\omega) > 0$. Con este cambio, la dependencia temporal de \tilde{f} y de $\tilde{\mathbf{E}}$ queda representada como $e^{-i\omega T}$, lo que es útil para el manejo de ondas. Notamos que la restricción sobre la parte imaginaria de ω conduce a tener perturbaciones inestables que crecen en el tiempo $e^{-i\omega t} = e^{-i \text{Re}(\omega)t} e^{\text{Im}(\omega)t}$, que es justamente el efecto contrario al que se obtiene de la disipación de Landau. Con el cambio de variable se obtiene

$$1 = \frac{c_s^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1. \quad (1.25)$$

La expresión de arriba es de hecho la *relación de dispersión* para ondas del tipo $\tilde{f} = \hat{f}(t)e^{ikx_1}$, gobernadas por la ecuación de Vlasov bajo las condiciones descritas antes; esto es, ondas y campo eléctrico de pequeña amplitud, además de campo magnético nulo.

En el plano complejo de v_1 , la integral que aparece en la relación de dispersión y el polo en ω/k se ven como en la Fig. 1.9, con $\text{Im} \omega > 0$. Como se mencionó antes, esto corresponde a perturbaciones que crecen con el tiempo, mientras que el fenómeno en estudio debe producir lo opuesto.

Consideramos el caso de amortiguamiento ligero, de manera que $\text{Im} \omega < 0$ pero $|\text{Im} \omega| \ll \omega_i$. Además, consideramos el caso de ondas largas con velocidad de fase grande; por lo que $\omega \approx c_s k$ como se ve de la relación de dispersión para ondas de densidad iónica en ausencia de campo magnético¹². Tenemos entonces que $c_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}$ es una velocidad mucho mayor que la velocidad térmica de los iones $(2k_B T_i / m_i)^{1/2}$. Lo anterior queda garantizado si la temperatura de los electrones es mucho mayor que la de los iones: $T_i \ll T_e$. En ese caso, las transformadas de Laplace de $\hat{f}(v_1, t)$ y de $\hat{E}(t)$ pueden presentar problemas, pero la

¹²Sólo hace falta recordar que en el caso de longitudes de onda grandes en ausencia de campo magnético, las ondas son no dispersivas y poseen una velocidad c_s .

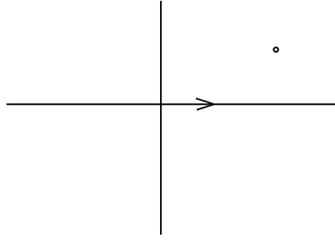


Fig. 1.9: Contorno de integración en el plano complejo v_1 . El punto en el plano representa el polo ω/k .

relación de dispersión no; la expresión (1.25) está perfectamente bien definida si $\text{Im } \omega < 0$, por lo que se puede extender de forma analítica al semiplano inferior.

Resumiendo, consideramos el caso en que ω/k tiene una parte real grande y positiva, mientras que posee una pequeña parte imaginaria con signo negativo. El contorno se deforma entonces a uno como en la Fig. 1.10.

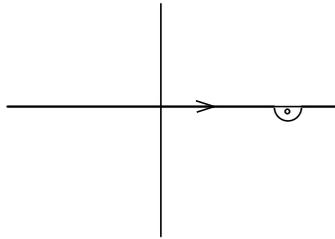


Fig. 1.10: Contorno de integración en el plano complejo v_1 . El punto en el plano representa el polo ω/k .

Calculamos la integral que aparece en (1.25) aproximando a ω/k como si fuera puramente real. Tenemos en ese caso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega/k - \epsilon} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\omega/k + \epsilon}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\omega/k + \epsilon e^{i\theta} - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} \bigg|_{v_1 = \omega/k + \epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} \bigg|_{v_1 = \omega/k}, \end{aligned}$$

donde VP indica el valor principal de la integral, el cual proseguimos a evaluar ahora.

Gracias al rápido decaimiento de $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(v_1) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i}\right)^{1/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} v_1^2}$, podemos escribir esta integral como la suma de dos contribuciones: la integral sobre un intervalo L centrado en

el origen donde $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}$ contribuye significativamente y una segunda integral en la vecindad del punto singular ω/k . Esto es

$$\begin{aligned} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 &\simeq \int_L \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 + \int_{\omega/k-\epsilon}^{\omega/k+\epsilon} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(v_1) dv_1 \\ &\simeq \int_L \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega/k) \int_{\omega/k-\epsilon}^{\omega/k+\epsilon} \frac{1}{v_1 - \omega/k} dv_1 \\ &= \int_L \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1, \end{aligned}$$

la integral alrededor de la singularidad se cancela debido a la simetría del integrando. Como ω/k tiene una parte real grande y el intervalo L no se extiende muy lejos del origen, dentro de ese intervalo es válido tomar $v_1 \ll \omega/k$ y entonces

$$\frac{1}{v_1 - \omega/k} \approx -\frac{k}{\omega} \left(1 + \frac{k}{\omega} v_1 + \frac{k^2}{\omega^2} v_1^2 + \frac{k^3}{\omega^3} v_1^3 \right).$$

Por otro lado, el rápido decaimiento de $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}$ tiene el efecto de que las integrales en los intervalos que resultan de tomar todos los reales y excluir L , i.e. en los dos intervalos disconexos denotados por $\mathbb{R}^2 - L$, sean muy pequeñas. Esto nos permite tomar al intervalo L como todos los reales, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 &\simeq -\frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{\omega} v_1 + \frac{k^2}{\omega^2} v_1^2 + \frac{k^3}{\omega^3} v_1^3 \right) \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 \\ &= -\frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{\omega} v_1 + \frac{k^3}{\omega^3} v_1^3 \right) \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1, \end{aligned}$$

donde un par de integrales son cero debido a la imparidad del integrando. La integral de arriba se calcula fácilmente recordando la expresión (1.24) para \hat{f}_0 y utilizando la función Gamma por lo que se obtiene

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_1 - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1} dv_1 \simeq \frac{k^2}{\omega^2} + 3 \frac{k^4}{\omega^4} \frac{k_B T_i}{m_i}.$$

Con esto, la relación dispersión (1.25) es aproximadamente

$$1 = \frac{c_s^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \left[\frac{k^2}{\omega^2} + 3 \frac{k^4}{\omega^4} \frac{k_B T_i}{m_i} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega/k) \right]. \quad (1.26)$$

Recordamos que se ha considerado el caso de iones fríos en comparación de los electrones y que además nos interesa $\lambda_D k \ll 1$. Si despreciamos el término que contiene a la temperatura de los iones en la relación de dispersión, tendremos

$$1 = \frac{c_s^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \left[\frac{k^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega/k) \right]. \quad (1.27)$$

De lo anterior aparentemente resultará una frecuencia que tenga tanto parte real como imaginaria; esto modela el efecto de transmisión de ondas que a la vez son amortiguadas o excitadas, dependiendo del signo de la parte imaginaria. Más adelante veremos de forma explícita que si los iones están a una temperatura mucho menor que los electrones, entonces ocurrirá un amortiguamiento prácticamente despreciable y el responsable de este efecto es el término de arriba que es proporcional a $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega/k)$. Una manera rápida de notar la magnitud de este término es ver que se trata de la pendiente de una función Gaussiana, $\hat{f}_0(v_1)$ dada por (1.24) en un punto ω/k que es del orden de c_s y por lo tanto es mucho mayor que v_i , la velocidad térmica de los iones. De ello se sigue que dicha pendiente es muy pequeña y bajo estas condiciones es razonable despreciar la contribución de dicho término. Si se hace esto se recupera la relación de dispersión para el caso de ondas de densidad iónica en ausencia de campo magnético, con iones fríos y electrones calientes

$$\omega_0^2 \approx \frac{c_s^2 k^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \quad (1.28)$$

y que habíamos encontrado antes de forma directa a partir de las ecuaciones de movimiento en la Sección 1.3.

Hemos visto que el término imaginario adicional en (1.27) es el causante de la disipación de Landau. Deseamos encontrar una expresión que nos cuantifique este efecto. Como el término responsable es de magnitud pequeña, trataremos a (1.28) como una primera aproximación a la frecuencia de las ondas (que hasta este orden de aproximación no presentan amortiguamiento) y obtendremos una corrección sobre este primer término que incorpore el efecto deseado. Tomamos $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ en (1.27), donde ω_0 es la primera aproximación dada por (1.28) y $\delta\omega$ es la corrección deseada, tenemos

$$\begin{aligned} 1 &\approx \frac{\omega_0^2}{k^2} \left[\frac{k^2}{(\omega_0 + \delta\omega)^2} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) \right] \approx \frac{\omega_0^2}{k^2} \left[\frac{k^2}{\omega_0^2 + 2\omega_0\delta\omega} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) \right] \\ &\approx \frac{\omega_0^2}{k^2} \left[\frac{k^2}{\omega_0^2} \left(1 - 2\frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) \right] = 1 - 2\frac{\delta\omega}{\omega_0} + i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) \end{aligned}$$

despejando se tiene

$$\delta\omega \approx i\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k)$$

y entonces,

$$\omega \simeq \omega_0 + i \frac{\pi \omega_0^3}{2 k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) \quad (1.29)$$

Notamos que la parte imaginaria de ω es negativa (ya que $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) < 0$) por lo que efectivamente representa un amortiguamiento de las ondas de densidad iónica. Usando la expresión $\hat{f}_0(v_1) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i}\right)^{1/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} v_1^2}$ y aproximando a ω_0 como $c_s k$ excepto en el exponente encontramos

$$\begin{aligned} \delta\omega &\approx -i \frac{\pi \omega_0^4}{2 k^3} \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i}\right)^{1/2} \frac{m_i}{k_B T_i} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} \frac{\omega_0^2}{k^2}} \\ &\approx -\frac{i}{2} k \left(\frac{\pi k_B}{2m_i}\right)^{1/2} \frac{T_e^2}{T_i^{3/2}} e^{-\frac{T_e}{2T_i} \frac{1}{1+\lambda_D^2 k^2}} \xrightarrow{T_e/T_i \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

por lo que la disipación es mínima cuando $T_i \ll T_e$.

De las ecuaciones (1.21) y (1.24) es claro que la disipación de Landau está relacionada con las partículas (iones en este caso) de la distribución que tienen una velocidad cercana a la velocidad de fase de la onda, ya que aparece el factor $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k)$. A estas partículas se les llama *resonantes* y por moverse a una velocidad cercana a la onda pueden intercambiar energía de manera muy efectiva con ella. Esto ocurre de la siguiente manera: las partículas ligeramente más rápidas que la onda pueden cederle energía, mientras que aquellas que se mueven un poco más lento la extraen. Como en una distribución Gaussiana hay más partículas lentas que veloces, más iones serán acelerados por la onda que aquellos que le proporcionen energía y por ello la onda se amortigua.

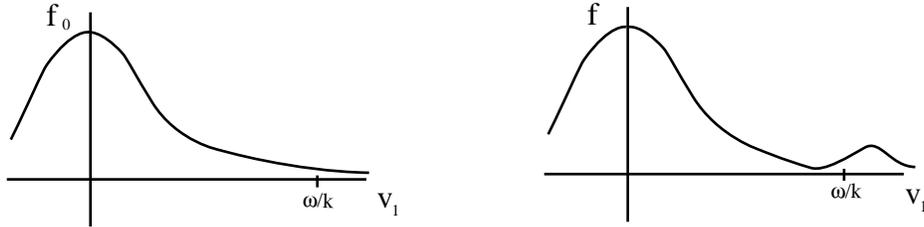


Fig. 1.11: Modificación de la condición inicial $f_0(v_1)$ en $t = 0$, mostrando la transferencia de partículas de un lado al otro del punto $v_1 = \omega/k$.

Como resultado de esto, al ver a la distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ como función de v_1 evolucionar en el tiempo, tendrá el valor $f_0(v_1)$ en $t = 0$ y después estará dada por $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) +$

$\tilde{f}(x_1, v_1, t)$. Si nos fijamos en la pendiente en el punto $v_1 = \omega/k$, inicialmente tendrá un valor negativo, como se ve en la Fig. 1.11; sin embargo, poco a poco tenderá a aplanarse e incluso posteriormente a cambiar de signo, ya que se transfieren partículas de la zona inmediatamente antes de ω/k a la región inmediatamente mayor que la velocidad de fase, todo ello a expensas de la onda. Una condición inicial Gaussiana podría modificarse hasta verse algo como en la Fig. 1.11.

De aquí se observa que la disipación de Landau no constituye un proceso irreversible, ya que en la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ queda registrado el intercambio de energía entre la onda y el resto de los iones; se obtendrá algo como en la Fig. 1.11. Esto queda más claro al considerar la generación de una disipación de Landau negativa; es decir, que la amplitud de la onda crezca en lugar de amortiguarse. Para que esto ocurra, se requiere $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(\omega_0/k) > 0$, por lo que se tiene una distribución inicial fuera de equilibrio. Esto es posible de realizarse en el laboratorio al inyectar partículas veloces en el plasma, se observará entonces que se generan oscilaciones en la densidad que se propagan ondulatoriamente.

Escribimos ahora a la relación de dispersión (1.25) en términos de la llamada *Función de Dispersión del Plasma*, como se acostumbra en trabajos de este tema. Usamos la velocidad térmica de los iones del plasma, $v_i \equiv \sqrt{2k_B T_i/m_i}$ para adimensionalizar la velocidad en dirección x_1 , v_1 , por lo que en la relación de dispersión (1.25) se hace el cambio $v_1 = v_i s$, quedando

$$1 = \frac{c_s^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_i s - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_1}(v_i s) v_i ds.$$

Como además $\hat{f}_0(v_1) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_i}\right)^{1/2} e^{-\frac{m_i}{2k_B T_i} v_1^2} = \frac{1}{\pi^{1/2} v_i} e^{-v_1^2/v_i^2} = \frac{1}{\pi^{1/2} v_i} e^{-s^2}$, entonces

$$1 = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - \frac{\omega}{kv_i}} \frac{d}{ds} e^{-s^2} ds.$$

Finalmente, se integra por partes con la finalidad de eliminar la derivada dentro de la integral

$$1 = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(s - \frac{\omega}{kv_i}\right)^2} e^{-s^2} ds = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s - \zeta)^2} e^{-s^2} ds,$$

con la nueva variable $\zeta = \frac{\omega}{kv_i}$. En textos de Física de Plasmas es usual escribir lo anterior como

$$1 = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - \zeta} e^{-s^2} ds = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} Z'(\zeta).$$

Donde se ha introducido la nueva función

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - \zeta} e^{-s^2} ds$$

a la que se llama la *Función de Dispersión del Plasma*. Con estas definiciones, la relación de dispersión (1.25) toma la sencilla forma

$$1 = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} Z'(\zeta). \quad (1.30)$$

El cálculo realizado anteriormente a partir de la relación de dispersión para hallar una expresión que cuantifique la Disipación de Landau, se puede obtener de esta nueva forma al considerar simplemente $\zeta \gg 1$, ya que se tienen iones fríos y por lo tanto v_i es pequeña.

En ese límite es conveniente usar

$$Z(\zeta) \approx i\pi^{1/2} e^{-\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \left\{ 1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4} + \dots \right\}, \quad \zeta \gg 1$$

que se encuentra en cualquier libro de Física de Plasmas, por ejemplo [5]. De ello se obtiene el mismo resultado que antes, ecuación (1.26), por un procedimiento considerablemente abreviado.

Se ha mencionado en repetidas ocasiones que la existencia de ondas de densidad iónica sólo es posible cuando la temperatura de los iones es mucho menor a la de los electrones. La expresión encontrada antes para la Disipación de Landau en ese caso muestra que existe un amortiguamiento que se hace pequeño si $T_e/T_i \gg 1$. Sin embargo, con la introducción de la función $Z(\zeta)$ se hace muy sencillo considerar el caso complementario: ¿qué ocurre si las temperaturas de iones y electrones son comparables? Veremos que en ese caso no existen soluciones del tipo de ondas viajeras y cualquier perturbación es atenuada rápidamente y por completo.

Supondremos que $T_e \sim T_i$ y que ambas de ellas son altas, de manera que al igual que antes podamos suponer que los electrones obedecen una distribución de Boltzmann y esto simplifica el desarrollo. Una manera de cuantificar esto es tomar $e\phi/(k_B T_e) \sim e\phi/(k_B T_i) \ll 1$, como se había hecho antes para los electrones. Partimos de la relación de dispersión en la forma (1.30) y usamos la expansión para $Z(\zeta)$ en el caso $\zeta \ll 1$. Esta es

$$Z(\zeta) \approx i\pi^{1/2} e^{-\zeta^2} - 2\zeta \left\{ 1 - \frac{2\zeta^2}{3} + \frac{4\zeta^4}{15} + \dots \right\}, \quad \zeta \ll 1.$$

la cual se puede encontrar nuevamente en [5]. Con lo anterior, $Z'(\zeta)$ al orden lineal en ζ es

$$Z'(\zeta) \approx -2i\pi^{1/2}\zeta - 2 \quad (1.31)$$

y la primera aproximación de la relación de dispersión es

$$1 = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} Z'(\zeta) \approx \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} (-2i\pi^{1/2}\zeta - 2) = \frac{c_s^2/v_i^2}{1 + \lambda_D^2 k^2} \left(-2i\pi^{1/2} \frac{\omega}{kv_i} - 2 \right),$$

recordando que $\zeta = \omega/(kv_i)$. De lo anterior se obtiene una aproximación a la frecuencia ω

$$\omega \approx i \frac{kv_i}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{v_i^2}{c_s^2} (1 + \lambda_D^2 k^2) + 2 \right) \quad (1.32)$$

y se corrobora lo antes mencionado: dado que la cantidad de arriba es puramente imaginaria, a primer orden no habrá ondas viajeras. La Disipación de Landau en este límite es demasiado intensa y atenúa la onda por completo.

Como en el primer caso calculado, el de iones fríos y electrones calientes, encontramos ahora una corrección a la primera aproximación obtenida. A la aproximación de primer orden (1.32) la llamamos $\omega \approx i\omega_0$ y ahora encontramos una corrección de la forma $\omega \approx i\omega_0 + \delta\omega$.

Para ello, consideramos ahora una aproximación a $Z'(\zeta)$ hasta segundo orden. Esta es:

$$Z'(\zeta) \approx -2i\pi^{1/2}\zeta - 2 + 4\zeta^2.$$

Usando el valor (1.32) de ω_0 y la aproximación anterior, la relación de dispersión es ahora

$$\begin{aligned} 2\pi^{1/2} \frac{\omega_0}{kv_i} - 2 = Z'(\zeta) &\approx -2i\pi^{1/2}\zeta - 2 + 4\zeta^2 = -2i\pi^{1/2} \frac{i\omega_0 + \delta\omega}{kv_i} - 2 + 4 \left(\frac{i\omega_0 + \delta\omega}{kv_i} \right)^2 \\ &\approx -2i\pi^{1/2} \frac{i\omega_0 + \delta\omega}{kv_i} - 2 + 4 \frac{(-\omega_0^2 + 2i\omega_0\delta\omega)}{k^2 v_i^2}. \end{aligned}$$

Despejando a $\delta\omega$ encontramos

$$\delta\omega \approx \frac{i}{\frac{2\pi^{1/2}}{kv_i} - \frac{8\omega_0}{k^2 v_i^2}} \frac{4\omega_0^2}{k^2 v_i^2} = \frac{i}{1 - \frac{4\omega_0}{\pi^{1/2} kv_i}} \frac{2\omega_0^2}{\pi^{1/2} kv_i} \approx i \left(1 + \frac{4\omega_0}{\pi^{1/2} kv_i} \right) \frac{2\omega_0^2}{\pi^{1/2} kv_i}.$$

La primera aproximación a la frecuencia ω después de la corrección es

$$\omega \approx i\omega_0 + \delta\omega = i\omega_0 + i \left(1 + \frac{4\omega_0}{\pi^{1/2} kv_i} \right) \frac{2\omega_0^2}{\pi^{1/2} kv_i}$$

con $\omega_0 = \frac{kv_i}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{v_i^2}{c_s^2} (1 + \lambda_D^2 k^2) + 2 \right)$.

Vemos que tanto la primera aproximación como la corrección a ésta son puramente imaginarias. Esto establece que no hay posibilidad de ondas viajeras, cualquier perturbación es atenuada hasta su aniquilación total. La generación de ondas de densidad iónica sólo es posible en el caso en que los iones tengan una baja temperatura y los electrones tengan una alta; específicamente, se requiere $e\phi/(k_B T_e) \ll 1$ y $T_i \ll T_e$.

Mencionamos finalmente que el tratamiento de esta sección constituye la llamada disipación de Landau lineal, ya que existe una contraparte no lineal cuando se tienen amplitudes mayores en las perturbaciones. En este caso la amplitud de la onda no decae de manera monótona sino que lo hace oscilatoriamente; un tratamiento más extenso puede verse en [6], [7] y [12].

1.5 Deducción de la Ecuación Zakharov-Kuznetsov

En esta sección veremos que las ondas de densidad que se producen en un plasma en la presencia de un campo magnético uniforme e intenso obedecen a la ecuación Zakharov-Kuznetsov (ZK). Esto lo haremos siguiendo el procedimiento perturbativo dado por Infeld en [15] y [17].

Si se desea obtener una ecuación de ondas no lineales que posea solitones como soluciones, es fundamental comprender que la comparación de órdenes de magnitud entre las diversas cantidades, como son la velocidad en cada dirección cartesiana, el campo magnético, la amplitud (es decir la magnitud de la densidad) son desconocidas a priori. En pocas palabras, las magnitudes que deben tener las cantidades antes mencionadas para obtener ondas de forma permanente son desconocidas. Es por ello que en un método perturbativo como el que se desarrollará, las potencias de la expansión no pueden escogerse arbitrariamente, sino que deben dejarse libres para su futura determinación. Esto se hace utilizando un sólo argumento de no linealidad y dispersión, el cual es común para este tipo de estudios: *se exige que los términos no lineales sean del mismo orden que los términos dispersivos*. Se tiene además una guía proporcionada por trabajos anteriores: es razonable buscar términos que reproduzcan aquéllos de KdV ya que es sabido que esa ecuación tiene como soluciones el tipo de ondas en las cuales estamos interesados. Es decir, se busca que aparezcan términos como u_{xxx} y uu_x . El primero tendrá un efecto dispersivo, mientras que el segundo es no lineal y tiende a producir un colapso o rompimiento de la solución. Nuestro interés radica en una ecuación que tenga soluciones con forma permanente por el balance entre no linealidad y dispersión, por lo que es natural exigir que estos términos se balanceen al tener el mismo orden.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{v} = 0, \quad (1.33a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{e}{m_i} \nabla \phi - \frac{e}{cm_i} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (1.33b)$$

$$\nabla^2 \phi + 4\pi e(n - n_0 e^{e\phi/k_B T_e}) = 0, \quad (1.33c)$$

donde n y \mathbf{v} son respectivamente el número de iones por unidad de volumen y su velocidad, las cuales son funciones de tres variables espaciales (x, y, z) y del tiempo t . Adicionalmente, e es el valor absoluto de la carga del electrón, m_i es la masa de los iones, c la velocidad de la luz, ϕ es el potencial eléctrico, k_B la constante de Boltzmann, T_e la temperatura de los electrones, n_0 es el valor en equilibrio de la densidad iónica y $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$ el campo magnético, usamos $\hat{\mathbf{x}}$ para el vector unitario en dirección x y B es constante. Como en la mayoría de las deducciones de este estilo, pasaremos del conjunto de ecuaciones (1.33) a uno que sea completamente adimensional, algo que facilitará mucho las manipulaciones. Siguiendo la

costumbre en física de plasmas, definimos las constantes

$$\begin{aligned}\Omega_i &\equiv \frac{eB}{cm_i}, && \text{frecuencia de ciclotrón o girofrecuencia de los iones,} \\ \omega_i &\equiv \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i} \right)^{1/2}, && \text{frecuencia iónica del plasma,} \\ \lambda_D &\equiv \left(\frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}, && \text{longitud de Debye,} \\ c_s &\equiv \left(\frac{k_B T_e}{m_i} \right)^{1/2}, && \text{velocidad del sonido para variaciones de densidad de los iones,}\end{aligned}$$

tal como se había hecho desde la sección anterior.

Tomando entonces un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$ y haciendo los cambios $\mathbf{x} \rightarrow \lambda_D \mathbf{x}$, $t \rightarrow \omega^{-1}t$, $\mathbf{v} \rightarrow c_s \mathbf{v}$, $\phi \rightarrow k_B T_e \phi / e$ y $n \rightarrow n_0 n$, nos queda el conjunto de ecuaciones adimensionales

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{v} = 0, \quad (1.34a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \phi + \Omega \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.34b)$$

$$\nabla^2 \phi - e^\phi + n = 0, \quad (1.34c)$$

donde la constante adimensional Ω es la razón de la girofrecuencia a la frecuencia de los iones del plasma, i.e. $\Omega \equiv \Omega_i / \omega_i$. Mediante unos segundos cambios, es posible eliminar dicha constante. Hacemos ahora $t \rightarrow \Omega^{-1}t$, $\mathbf{x} \rightarrow \Omega^{-1}\mathbf{x}$, $n \rightarrow \Omega^2 n$ y $\phi \rightarrow \phi + 2 \ln \Omega$ en (1.34), quedando así

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{v} = 0, \quad (1.35a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \phi + \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.35b)$$

$$\nabla^2 \phi - e^\phi + n = 0. \quad (1.35c)$$

La relación de dispersión del conjunto de ecuaciones (1.33) se ha encontrado antes y es:

$$k^2 + 1 = \frac{k_x^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Estamos interesados en el tipo de ondas de densidad iónica con longitudes de onda largas que surgen en presencia de un campo magnético intenso. Hemos visto antes que esta situación corresponde a tomar $\Omega \gg \omega$ y $k \ll 1$ de manera que la relación de dispersión se vuelve

$$k^2 + 1 \simeq \frac{k_x^2}{\omega^2} - \frac{k_y^2 + k_z^2}{\Omega^2},$$

o bien

$$\omega^2 \simeq \frac{k_x^2}{1 + k^2 + \Omega^{-2}(k_y^2 + k_z^2)} \simeq k_x^2 (1 - k^2 - \Omega^{-2}(k_y^2 + k_z^2)).$$

Finalmente, la frecuencia de oscilación ω es aproximadamente

$$\omega \simeq k_x \left(1 - \frac{1}{2}k_x^2 - \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right)$$

como se obtuvo en la sección 1.3.

Con estos resultados, en el caso de campo magnético intenso y longitudes de onda largas, los modos normales $e^{i\varphi(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}, \omega)}$ tienen una fase

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}, \omega) &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - k_x \left(1 - \frac{1}{2}k_x^2 - \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right) t \\ &= k_x(x - t) + k_y y + k_z z + k_x \left(\frac{1}{2}k_x^2 + \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right) t, \end{aligned}$$

de manera que en un sistema de referencia que se mueve con velocidad unitaria en la dirección positiva del eje x , la frecuencia de oscilación es $\tilde{\omega} = -k_x \left(\frac{1}{2}k_x^2 + \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(k_y^2 + k_z^2) \right)$.

Se hace ahora un cambio de escala que deje de manifiesto que estamos interesados en longitudes de onda largas, i.e. $k \ll 1$. Escalamos los números de onda de acuerdo a $k_x = \epsilon^{1/2}k'_x$, $k_y = \epsilon^{\lambda_y}k'_y$ y $k_z = \epsilon^{\lambda_z}k'_z$. Donde la potencia de $1/2$ en el cambio de escala de k_x se toma sólo por simplicidad. Determinaremos a λ_y y λ_z requiriendo que la nueva frecuencia ω' sea un escalamiento de la original, de manera que esta nueva frecuencia sólo dependa de \mathbf{k}' y no de ϵ . Haciendo los escalamientos se obtiene

$$\varphi = \epsilon^{1/2}k'_x(x - t) + \epsilon^{\lambda_y}k'_y y + \epsilon^{\lambda_z}k'_z z + \epsilon^{3/2}k'_x \left(\frac{1}{2}k'^2_x + \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(\epsilon^{2\lambda_y-1}k'^2_y + \epsilon^{2\lambda_z-1}k'^2_z) \right) t$$

y esto nos sugiere tomar $\lambda_y = \lambda_z = 1/2$, de manera que en un sistema de referencia que se mueva a velocidad uno en dirección de x positiva (para eliminar el término combinado $x - t$) la frecuencia se escala de acuerdo a $\omega'(\mathbf{k}') = \epsilon^{3/2}\tilde{\omega}$. La fase es ahora

$$\varphi = \epsilon^{1/2}k'_x(x - t) + \epsilon^{1/2}k'_y y + \epsilon^{1/2}k'_z z + \epsilon^{3/2}k'_x \left(\frac{1}{2}k'^2_x + \frac{1}{2}(1 + \Omega^{-2})(k'^2_y + k'^2_z) \right) t;$$

cambiándonos al sistema de referencia mencionado antes, hacemos los cambios de variables:

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon^{1/2}(x - t), \\ \eta &= \epsilon^{1/2}y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= \epsilon^{1/2}z, \\ \tau &= \epsilon^{3/2}t\end{aligned}$$

y podemos escribir las reglas condensadas

$$\partial_x = \epsilon^{1/2}\partial_\xi, \quad \partial_y = \epsilon^{1/2}\partial_\eta, \quad \partial_z = \epsilon^{1/2}\partial_\zeta, \quad \partial_t = \epsilon^{3/2}\partial_\tau - \epsilon^{1/2}\partial_\xi.$$

Con estos cambios de variable, el conjunto de ecuaciones (1.35) queda

$$\epsilon^{3/2}\frac{\partial n}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2}\frac{\partial n}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2}\nabla \cdot n\mathbf{v} = 0, \quad (1.36a)$$

$$\epsilon^{3/2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \epsilon^{1/2}\nabla \phi + \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.36b)$$

$$\epsilon \nabla^2 \phi - e^\phi + n = 0. \quad (1.36c)$$

Donde el operador ∇ denota derivadas con respecto a las nuevas variables espaciales (ξ, η, ζ) . Además, la dirección x y la ξ son la misma, la diferencia radica en que un eje coordenado se mueve con respecto al otro, ocurriendo lo mismo para las parejas y y η , así como z y ζ . De ello se sigue que $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\xi}$ y apuntan en la dirección positiva de x o de ξ , que es lo mismo. Tendremos también por la antes mencionado $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\eta}$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\zeta}$. El conjunto de ecuaciones (1.36) tiene la solución trivial $n = 1$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\phi = 0$. Perturbamos alrededor de la solución de equilibrio, de acuerdo a

$$\begin{aligned}n &= 1 + \epsilon^{\rho_n} n^{(1)} + \dots, \\ \phi &= \epsilon^{\rho_\phi} \phi^{(1)} + \dots, \\ v_\xi &= \epsilon^{\rho_\xi} v_\xi^{(1)} + \dots, \\ v_\eta &= \epsilon^{\rho_\perp} v_\eta^{(1)} + \dots, \\ v_\zeta &= \epsilon^{\rho_\perp} v_\zeta^{(1)} + \dots,\end{aligned}$$

que son los términos de orden menor. Anticipamos que el desarrollo de las velocidades en η y ζ tendrán las mismas potencias de ϵ ya que existe simetría con respecto a ese intercambio. Es necesario determinar las potencias de la expansión, así como las potencias de los términos sucesivos.

A partir de (1.36c) y usando $e^\phi \simeq 1 + \epsilon^{\rho_\phi} \phi^{(1)}$ obtenemos al orden menor

$$\epsilon^{1+\rho_\phi} \nabla^2 \phi^{(1)} + \epsilon^{\rho_n} n^{(1)} - \epsilon^{\rho_\phi} \phi^{(1)} + \dots = 0$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor. Claramente el término $\epsilon^{1+\rho_\phi} \nabla^2 \phi^{(1)}$ es también de orden mayor que los otros dos y entonces es necesario pedir que $\rho_n = \rho_\phi$ para que no se obtenga una solución trivial. De este análisis se sigue que

$$n^{(1)} = \phi^{(1)}.$$

De la ecuación vectorial (1.36b) se obtienen en realidad tres ecuaciones, correspondientes a las direcciones ξ , η y ζ . En dirección ξ se obtiene la ecuación

$$\epsilon^{3/2} \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2} \left(v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + v_\zeta \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} \right) + \epsilon^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0.$$

Al introducir la expansión en potencias de ϵ se obtiene que el primer término de arriba comienza en la potencia $\epsilon^{3/2+\rho_\xi}$, el término entre paréntesis tendrá términos proporcionales a $\epsilon^{1/2+2\rho_\xi}$ y $\epsilon^{1/2+\rho_\xi+\rho_\perp}$. En cambio el segundo término comienza en la potencia $\epsilon^{1/2+\rho_\xi}$, mientras que el último comienza siendo proporcional a $\epsilon^{1/2+\rho_\phi}$, para no obtener una solución trivial pedimos que estos términos sean los de menor orden, entonces $\rho_\xi = \rho_\phi$ y también

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\xi^{(1)}}{\partial \xi} = 0.$$

Si integramos lo anterior y notamos que en el infinito las funciones poseen su valor de equilibrio se obtiene

$$\phi^{(1)} - v_\xi^{(1)} = 0.$$

Información adicional resulta de considerar las ecuaciones resultantes en la dirección η y ζ . En dirección η , (1.36b) tiene el aspecto

$$\epsilon^{3/2} \frac{\partial v_\eta}{\partial \tau} - \epsilon^{1/2} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \epsilon^{1/2} \left(v_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + v_\zeta \frac{\partial v_\eta}{\partial \zeta} \right) + \epsilon^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - v_\zeta = 0.$$

Una vez más, al considerar cuidadosamente la expansión en potencias de ϵ de las funciones de la ecuación de arriba y evitar soluciones triviales, se llega a que los dos últimos términos son del mismo orden, $1/2 + \rho_\phi = \rho_\perp$, entonces

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} - v_\zeta^{(1)} = 0.$$

El análisis en dirección ζ es completamente análogo. De ello se obtiene nuevamente $1/2 + \rho_\phi = \rho_\perp$ y también

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \zeta} + v_\eta^{(1)} = 0.$$

Esto nos ha dado ya varias ecuaciones y relaciones entre las potencias de ϵ de las distintas funciones. Usando estas relaciones y considerando los términos subsecuentes escribimos las expansiones como

$$n = 1 + \epsilon^\rho n^{(1)} + \epsilon^{\sigma n} n^{(2)} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \epsilon^\rho \phi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\phi} \phi^{(2)} + \dots, \\
v_\xi &= \epsilon^\rho v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} + \dots, \\
v_\eta &= \epsilon^{\rho+1/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} + \dots, \\
v_\zeta &= \epsilon^{\rho+1/2} v_\zeta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} + \dots,
\end{aligned}$$

pidiendo naturalmente que la potencia de ϵ aumente de un término al siguiente.

Consideramos a la ecuación (1.36c) con la nueva expansión. Esto es

$$\begin{aligned}
\epsilon \nabla^2 (\epsilon^\rho \phi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\phi} \phi^{(2)}) - 1 - \epsilon^\rho \phi^{(1)} - \epsilon^{\sigma_\phi} \phi^{(2)} - \frac{1}{2} (\epsilon^{2\rho} \phi^{(1)2} + 2\epsilon^{\rho+\sigma_\phi} \phi^{(1)} \phi^{(2)} + \epsilon^{2\sigma_\phi} \phi^{(2)2}) \\
+ 1 + \epsilon^\rho n^{(1)} + \epsilon^{\sigma_n} n^{(2)} + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Mediante unas cancelaciones y derivando en ξ se obtiene

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\rho+1} \nabla^2 \phi_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\phi+1} \nabla^2 \phi_\xi^{(2)} - \epsilon^{\sigma_\phi} \phi_\xi^{(2)} - \epsilon^{2\rho} \phi^{(1)} \phi_\xi^{(1)} \\
- \epsilon^{\rho+\sigma_\phi} (\phi_\xi^{(1)} \phi^{(2)} + \phi^{(1)} \phi_\xi^{(2)}) + \epsilon^{2\sigma_\phi} \phi^{(2)} \phi_\xi^{(2)} + \epsilon^{\sigma_n} n_\xi^{(2)} = 0,
\end{aligned}$$

olvidándonos de términos de orden mayor. Notamos entonces que aparecen un par de términos que son familiares, ya que aparecen en la ecuación KdV, estos son¹³ $\nabla^2 \phi_\xi^{(1)}$ y $\phi^{(1)} \phi_\xi^{(1)}$. El primero tendrá un efecto dispersivo, mientras que el segundo es no lineal y tiende a producir un colapso o rompimiento de la solución. Dado que estamos buscando una generalización de KdV a más dimensiones y por ello estamos interesados en una ecuación que permita la ocurrencia de ondas con forma permanente debido al balance entre no linealidad y dispersión, es natural exigir que estos términos se balanceen al igualar sus órdenes. Este es el argumento no lineal fundamental en la deducción de la ecuación: *los términos no lineales deben ser del mismo orden que los términos dispersivos*; en particular es razonable buscar términos que reproduzcan aquéllos de KdV ya que es sabido que esa ecuación tiene como soluciones el tipo de ondas en las cuales estamos interesados. De esto resulta que $2\rho = \rho + 1$ y entonces $\rho = 1$. De hecho es de notar que de los términos restantes, los de menor orden son

$$\epsilon^{\rho+1} \nabla^2 \phi_\xi^{(1)}, \quad \epsilon^{\sigma_\phi} \phi_\xi^{(2)}, \quad \epsilon^{2\rho} \phi^{(1)} \phi_\xi^{(1)}, \quad \epsilon^{\sigma_n} n_\xi^{(2)},$$

por lo que pedimos

$$\epsilon^{\rho+1} \nabla^2 \phi_\xi^{(1)} - \epsilon^{\sigma_\phi} \phi_\xi^{(2)} - \epsilon^{2\rho} \phi^{(1)} \phi_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_n} n_\xi^{(2)} = 0;$$

es decir, $\sigma_n = \sigma_\phi = 2$. La anterior ecuación en forma extendida (después de integrar una vez) es

$$\nabla^2 \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \frac{1}{2} \phi^{(1)2} + n^{(2)} = 0.$$

¹³Este término dispersivo en realidad generaliza al de KdV en tres dimensiones.

Ahora nos fijamos en la ecuación (1.36b), a lo largo de la dirección ξ . Con la expansión dada antes (usando que $\rho = 1$ y $\sigma_n = \sigma_\phi = 2$) queda

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} \partial_\tau \left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) - \epsilon^{1/2} \partial_\xi \left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{1/2} \left(\left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) \partial_\xi + \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \partial_\eta + \left(\epsilon^{3/2} v_\zeta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} \right) \partial_\zeta \right) \left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{1/2} \partial_\xi \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} \right) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Antes se encontró que $\phi^{(1)} = v_\xi^{(1)}$, y por esto

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} \partial_\tau \left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) - \epsilon^{1/2 + \sigma_\xi} \partial_\xi v_\xi^{(2)} \\ & + \epsilon^{1/2} \left(\left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) \partial_\xi + \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \partial_\eta + \left(\epsilon^{3/2} v_\zeta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} \right) \partial_\zeta \right) \left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\xi} v_\xi^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{5/2} \partial_\xi \phi^{(2)} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Pedimos que el término $\epsilon^{1/2 + \sigma_\xi} \partial_\xi v_\xi^{(2)}$ tenga orden $\epsilon^{5/2}$, de donde $\sigma_\xi = 2$ y entonces

$$\frac{\partial v_\xi^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_\xi^{(2)}}{\partial \xi} + v_\xi^{(1)} \frac{\partial v_\xi^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} = 0.$$

En dirección η tenemos

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} \partial_\tau \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) - \epsilon^{1/2} \partial_\xi \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{1/2} \left(\left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^2 v_\xi^{(2)} \right) \partial_\xi + \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \partial_\eta + \left(\epsilon^{3/2} v_\zeta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} \right) \partial_\zeta \right) \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{1/2} \partial_\eta \left(\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} \right) - \epsilon^{3/2} v_\zeta^{(1)} - \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} + \dots = 0, \end{aligned}$$

si usamos $\partial_\eta \phi^{(1)} = v_\zeta^{(1)}$ para cancelar un par de términos, tenemos

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} \partial_\tau \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) - \epsilon^{1/2} \partial_\xi \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{1/2} \left(\left(\epsilon v_\xi^{(1)} + \epsilon^2 v_\xi^{(2)} \right) \partial_\xi + \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \partial_\eta + \left(\epsilon^{3/2} v_\zeta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} \right) \partial_\zeta \right) \left(\epsilon^{3/2} v_\eta^{(1)} + \epsilon^{\sigma_\perp} v_\eta^{(2)} \right) \\ & + \epsilon^{5/2} \partial_\eta \phi^{(2)} - \epsilon^{\sigma_\perp} v_\zeta^{(2)} + \dots = 0. \end{aligned}$$

De donde se observa que es imperativo que $\sigma_\perp = 2$ y entonces

$$\frac{\partial v_\eta^{(1)}}{\partial \xi} + v_\zeta^{(2)} = 0.$$

En dirección ζ la situación es muy similar; se obtiene igualmente $\sigma_{\perp} = 2$ y de ello

$$\frac{\partial v_{\zeta}^{(1)}}{\partial \xi} - v_{\eta}^{(2)} = 0.$$

Se han encontrado todas las σ 's, esto permite escribir la expansión perturbativa como

$$\begin{aligned} n &= 1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots, \\ \phi &= \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots, \\ v_{\xi} &= \epsilon v_{\xi}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\xi}^{(2)} + \dots, \\ v_{\eta} &= \epsilon^{3/2} v_{\eta}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\eta}^{(2)} + \dots, \\ v_{\zeta} &= \epsilon^{3/2} v_{\zeta}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\zeta}^{(2)} + \dots, \end{aligned}$$

en el caso de las funciones n , ϕ y v_{ξ} vemos que las potencias de ϵ avanzan una unidad de un término al consecutivo; mientras que en el caso de v_{η} y v_{ζ} avanzan media unidad.

Falta únicamente considerar las ecuaciones resultantes de (1.36); usando las expansiones, tenemos que

$$\begin{aligned} &\epsilon^{3/2} \partial_{\tau} (1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)}) - \epsilon^{1/2} \partial_{\xi} (1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)}) \\ &+ \epsilon^{1/2} \nabla \cdot (1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)}) \left[(\epsilon v_{\xi}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\xi}^{(2)}) \hat{\xi} + (\epsilon^{3/2} v_{\eta}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\eta}^{(2)}) \hat{\eta} + (\epsilon^{3/2} v_{\zeta}^{(1)} + \epsilon^2 v_{\zeta}^{(2)}) \hat{\zeta} \right] = 0. \end{aligned}$$

A orden $\epsilon^{3/2}$ se tiene que

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{\xi}^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

esto, en conjunto con las condiciones de que $n^{(1)}$ y $v_{\xi}^{(1)}$ se anulan al infinito implican:

$$v_{\xi}^{(1)} = n^{(1)}$$

que no es en realidad nueva información ya que se obtuvo anteriormente.

A orden ϵ^2 se obtiene una ecuación que no es de utilidad y por ello no se muestra. A orden $\epsilon^{5/2}$ tenemos

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + 2n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\eta}^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} = 0.$$

Presentamos ahora el conjunto completo de ecuaciones que utilizaremos en lo subsecuente

$$v_{\xi}^{(1)} = \phi^{(1)} = n^{(1)}, \tag{1.37a}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} = v_{\zeta}^{(1)}, \quad (1.37b)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \zeta} = -v_{\eta}^{(1)}, \quad (1.37c)$$

$$\frac{\partial v_{\eta}^{(1)}}{\partial \xi} = -v_{\zeta}^{(2)}, \quad (1.37d)$$

$$\frac{\partial v_{\zeta}^{(1)}}{\partial \xi} = v_{\eta}^{(2)}, \quad (1.37e)$$

$$\nabla^2 \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \frac{1}{2} \phi^{(1)2} + n^{(2)} = 0, \quad (1.37f)$$

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + 2n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\eta}^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.37g)$$

$$\frac{\partial v_{\xi}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_{\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + v_{\xi}^{(1)} \frac{\partial v_{\xi}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad (1.37h)$$

Manipularemos las ecuaciones obtenidas a los diversos órdenes de ϵ y llegaremos a una ecuación diferencial parcial para $n^{(1)}$, ésta será justamente la ecuación ZK.

Si derivamos una vez en ξ la ecuación (1.37f) y empleamos (1.37a) sobre ella y también sobre (1.37h) tendremos

$$\nabla^2 \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad (1.38a)$$

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial v_{\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} = 0. \quad (1.38b)$$

Sumando las dos ecuaciones en (1.38) y la (1.37g) se llega a

$$\nabla^2 \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + 2n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\eta}^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\zeta}^{(2)}}{\partial \zeta} = 0. \quad (1.39)$$

Combinando ahora (1.37b) con (1.37e) y (1.37c) con (1.37d) se obtiene el par de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi \partial \eta} = v_{\eta}^{(2)}, \quad \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi \partial \zeta} = v_{\zeta}^{(2)}. \quad (1.40)$$

En las últimas dos ecuaciones podemos escribir $n^{(1)}$ en lugar de $\phi^{(1)}$, usando (1.37a). El resultado se utiliza en (1.39) para eliminar $v_{\eta}^{(2)}$ y $v_{\zeta}^{(2)}$, llegando a la expresión

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi \partial \zeta^2} = 0,$$

que es la ecuación ZK en una forma no estándar. Hacemos finalmente los cambios $n^{(1)} \rightarrow 2^{-1/3}n^{(1)}$, $\xi \rightarrow 2^{-1/3}x$, $\eta \rightarrow 2^{1/6}y$, $\zeta \rightarrow 2^{1/6}z$ y $\tau \rightarrow t$; obteniéndose

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial x} + \nabla^2 \frac{\partial n^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad (1.41)$$

que es la ecuación Zakharov-Kuznetsov en su forma estándar. De la última expresión se aprecia que ésta es una generalización de la ecuación de Korteweg-de Vries a dos y tres dimensiones, según sea la dimensión del operador Laplaciano. Vemos de lo anterior que nuestra exigencia sobre el orden de magnitud de los términos dispersivos y los no lineales, además de la búsqueda del tipo de términos que aparecen en KdV nos ha llevado de forma natural a una generalización de ésta, la ecuación ZK.

Es de notarse que la ecuación (1.41) es simétrica en las variables y y z , pero no en la variable x . Esto se debe a que el campo magnético uniforme en la dirección x hace de ella una dirección privilegiada; mientras que las otras dos son arbitrarias, siempre y cuando se mantenga un sistema cartesiano.

En esta sección se ha obtenido la ecuación ZK para el caso de ondas de densidad de iones con longitud de onda larga, en un plasma no isotérmico y con un campo magnético uniforme e intenso. Anticipamos, sin embargo, que la ecuación ZK aparecerá en cualquier contexto en donde se tenga una relación de dispersión del tipo (1.17), en el límite en que la no linealidad balancea a la dispersión. De esta manera, la ecuación ZK toma un papel mucho más fundamental y eso hace de su estudio algo mucho más interesante. Esto es similar a lo ocurrido con la ecuación KdV: al principio surgió en el estudio de ondas en la superficie del agua, pero después surgió en muchos otros campos, la conexión entre ellos es la relación de dispersión.

1.6 Resultados conocidos sobre la ecuación Zakharov-Kuznetsov

En esta sección presentamos algunos de los resultados más sobresalientes relacionados con la ecuación Zakharov-Kuznetsov (ZK).

En 1974, Zakharov y Kuznetsov en [38] estudian la propagación de fluctuaciones de densidad en un plasma de dos componentes¹⁴, el cual está en presencia de un campo magnético uniforme e intenso. Se supone adicionalmente que sea un plasma diluido y no isotérmico, de manera que los electrones tengan una temperatura mucho mayor a la de los iones. Obtienen una ecuación para las fluctuaciones de densidad con amplitud pequeña que es una generalización a dos o tres dimensiones de la celebrada ecuación de Korteweg-de Vries (KdV). La

¹⁴Se tiene en este caso iones de una sola especie y electrones.

ecuación en su forma estándar se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.42)$$

donde el campo magnético tiene dirección paralela a x . Tomando el operador laplaciano en el número de dimensiones deseado, se tendrá una generalización a KdV. De ello se sigue que la solución tipo solitón de KdV será también solución de ZK, es decir

$$u(x, y, z, t) = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta(x - x_0) - 4\eta^3 t) \quad (1.43)$$

es solución de (1.42) y en el contexto de tres dimensiones se interpreta como una onda plana. La anterior es la única solución del tipo de onda solitaria que se conoce para dicha ecuación, en particular, no se tienen soluciones que representen ondas solitarias localizadas, ya sea en dos o tres dimensiones. En ese mismo trabajo, utilizando el teorema de Liapunov los autores prueban la estabilidad para ondas tipo solitón con simetría radial que decaigan en las tres direcciones espaciales.

Laedke y Spatschek en [21] realizan estudios de estabilidad para ondas planas solitónicas como (1.43). Se hace esto para el caso de perturbaciones con longitud de onda grande que son transversas a la dirección de propagación. Muestran que una onda plana tipo solitón genera inestabilidades¹⁵ si el campo magnético se intensifica demasiado, o si la amplitud se vuelve demasiado pequeña. Adicionalmente, se encuentra numéricamente que el paso del caso estable al inestable ocurre de manera continua.

En 1982, Laedke y Spatschek [22] muestran que una onda plana se torna inestable al introducir una perturbación periódica con número de onda $k \ll 1$ y perpendicular a la dirección de propagación. Mediante un desarrollo en potencias de k se encuentra una aproximación para la razón de crecimiento exponencial de la perturbación, $\gamma(k)$. Usando métodos variacionales se encuentran cotas superiores e inferiores para $\gamma(k)$. La aproximación de dicha cantidad para $k \ll 1$ concuerda con las cotas encontradas. De la aproximación y de las cotas se encuentra que las inestabilidades crecen con perturbaciones largas ($k \ll 1$), que $\gamma(k)$ tiene un máximo y que existe un valor de corte k_c , a partir de donde $\gamma < 0$ por lo que en este caso la onda plana es estable. Se prueba la estabilidad en la región $k > k_c$ mediante el teorema de Liapunov.

Posteriormente, Infeld en [15] obtiene la ecuación ZK utilizando un reescalamiento espacial uniforme. Se analiza la estabilidad de ondas planas tipo solitón introduciendo perturbaciones periódicas de dirección arbitraria y número de onda pequeño. Se hace una expansión en potencias del número de onda de la perturbación, encontrando que para amplitudes pequeñas se genera un ángulo alrededor de la perpendicular a la dirección de propagación

¹⁵Se introduce un factor de crecimiento de la perturbación periódica del tipo $e^{\gamma t}$. Si γ resulta positiva, la perturbación crece con el tiempo y se dice que la onda es inestable. De manera semejante, la onda resultará estable si $\gamma < 0$.

dentro del cual las perturbaciones generan inestabilidades, confirmando el trabajo [22]. Conforme crece la amplitud, este ángulo de inestabilidad crece hasta que todas las direcciones excepto $\theta = 0, \pi$ (con respecto a la dirección de propagación) son inestables.

Continuando con su anterior trabajo, en 1987 Infeld y Frycz en [16] presentan un estudio numérico de la estabilidad de ondas planas solitónicas. A diferencia del trabajo [15], ahora lo hacen cuando la perturbación posee un número de onda arbitrario perpendicular a la dirección de propagación. Se compara la razón de crecimiento del análisis numérico con los resultados analíticos de [15], así como con las cotas obtenidas en [22] para esta cantidad. Además, consideran de manera numérica el caso en que una onda plana solitónica con una perturbación perpendicular alcanza a una onda del mismo tipo pero que no presenta perturbaciones. Se encuentra que después de la colisión ambas presentan inestabilidades. Sin embargo, el desarrollo de la inestabilidad de la onda originalmente perturbada es más lento que en la ausencia de una colisión, aunque eventualmente recupera su razón de crecimiento original.

La tercera y última parte de la serie de trabajos anteriores, [15] y [16], es presentada en 1989 por Infeld y Frycz en [10]. Este es un segundo estudio numérico en el que consideran perturbaciones a una onda solitónica plana con dirección y número de onda arbitrarios.

En un segundo trabajo ese mismo año, Infeld y Frycz muestran en [11] cómo una onda plana solitónica que ha sido perturbada de forma periódica de manera perpendicular a la dirección de propagación decae en un conjunto de solitones cilíndricos. Utilizando el teorema de Liapunov se muestra que los solitones cilíndricos que resultan de la perturbación son estables frente a dilataciones. Este trabajo es de una importancia fundamental para nuestros propósitos, ya que en las simulaciones numéricas se obtienen ondas solitónicas cilíndricas, es decir, localizadas en las dos direcciones espaciales.

Esta es una evidencia fundamental de que la ecuación ZK posee ondas de este tipo y no solamente ondas planas. Con esta evidencia numérica, el presente trabajo se centrará en la aproximación de la evolución de ondas localizadas en dos dimensiones.

En [18] Infeld y Frycz presentan una generalización a las ecuaciones de KP y ZK, las cuales representan fluctuaciones de densidad iónica en un plasma con campo magnético nulo y uno muy intenso, respectivamente.

Posteriormente, en [2] Allen y Rowlands muestran que un análisis perturbativo ordinario no permite encontrar más información que una forma asintótica para $\gamma(k)$ cuando $k \approx 0$. Atacando el problema de manera distinta, utilizan un método perturbativo de escalas múltiples para encontrar una aproximación a la razón de crecimiento de una perturbación periódica a una onda plana solitónica. Conociendo dos ceros de $\gamma(k)$ (entre los cuales $0 < \gamma(k)$) se encuentra el valor de γ en esos puntos. Subsecuentemente se utiliza una aproximación de Padé en esa región. La aproximación obtenida para $\gamma^2(k)$ presenta un error relativo a los resultados numéricos menor al 0.9%.

En [39] Zhuk y Popov consideran el movimiento de un fluido viscoso junto a una placa vertical caliente. Al tomar en cuenta la convección generada en el fluido, muestran que en

el problema de hallar el campo de velocidades surge la ecuación ZK.

Se muestra que para ondas viajeras en el sentido del campo magnético que decaen al infinito, se espera un comportamiento a distancias grandes dada por la función modificada de Bessel K_0 ¹⁶. Por otro lado, para ondas que viajen en el sentido opuesto al campo magnético y que decaen al infinito, el comportamiento lejos del origen está dado por las funciones de Bessel¹⁷.

En el mismo trabajo se analiza la ecuación ZK en su forma estacionaria con dependencia exclusivamente radial¹⁸, la cual tiene la solución $8r^{-2}$. Mediante un cambio de variable, se escribe a la ecuación de segundo orden como un sistema no lineal de primer orden. Analizando el espacio fase correspondiente, se concluye que el comportamiento en cero siempre es divergente si se pide que ocurra decaimiento al infinito.

Posteriormente, los autores muestran simulaciones numéricas de la ecuación ZK con términos no homogéneos dependientes de la posición. Tomando uno de tipo Gaussiano, se desarrolla una onda localizada espacialmente que al principio es parecida a la no homogeneidad. Subsecuentemente, se deforma y presenta máximos adicionales que posiblemente adopten un comportamiento solitónico. Tomando una no homogeneidad que oscila senoidalmente en ambas direcciones espaciales, se desarrolla un conjunto de solitones de amplitudes aproximadamente iguales que eventualmente se separan y cesan de interactuar.

Finalmente se modela numéricamente la colisión frontal de dos ondas localizadas, encontrando los cambios bruscos de amplitud y de fase característicos de colisiones de ondas no lineales.

Hacemos notar que en este trabajo también se obtiene evidencia de la evolución de ondas localizadas en dos dimensiones, considerando numéricamente la colisión de ondas de este tipo gobernadas por ZK. También se considera de forma numérica a una onda localizada que se parte en varias más, al ser gobernada por la ecuación ZK no homogénea.

En [3] Bradley investiga la deriva de átomos en la superficie de una delgadísima placa metálica al aplicar una fuerte corriente. El fenómeno se conoce como ‘Electromigración Superficial’¹⁹, y se debe a que los electrones colisionan con los átomos y los desplazan. Esto provoca que la superficie de la placa metálica se deforme y ocurra una propagación de dicha deformación; de igual manera que la gravedad provoca que ondas viajen por la superficie de los líquidos. En este trabajo, se considera el caso en que la deformación de la superficie depende solamente de la dirección paralela al campo eléctrico. Por un análisis perturbativo en el límite de fuertes corrientes, amplitud de la perturbación y grosor de la placa pequeños (en comparación con el ancho de la perturbación) se obtiene la ecuación KdV para la forma

¹⁶Esta tiene la forma asintótica $K_0 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r}$ para $r \rightarrow \infty$.

¹⁷Esto significa que lejos del origen se tiene un comportamiento dado por una combinación lineal de $\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \pi/4)$ y $\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin(r - \pi/4)$.

¹⁸Resulta de aquí la llamada ecuación de Emden-Fowler $u'' + \frac{1}{r}u' = \frac{1}{2}u^2$.

¹⁹En inglés ‘Surface Electromigration’ (SEM).

de la superficie. Las soluciones son ondas que viajan exclusivamente en la dirección del campo eléctrico y cuya velocidad decrece con la amplitud. Esto debe contrastarse con el caso de ondas en líquidos poco profundos, donde la dirección de propagación puede ser hacia $\pm\infty$ y donde la dependencia entre velocidad y amplitud es inversa a la de [3].

En [33] Sipeic y Benney presentan un estudio de la ecuación modificada de Zakharov-Kuznetsov (mZK),

$$u_t + u^2 u_x + \nabla^2 u_x = 0,$$

en el caso bidimensional. Ha sido mostrado que esta ecuación describe la propagación de fluctuaciones de densidad en plasmas, cuando éstas viajan a un ángulo crítico de la dirección del campo magnético. En el presente trabajo se motiva a la ecuación mediante una relación de dispersión a la que se le introduce una anisotropía. En el caso de ondas de densidad en plasmas magnetizados, la anisotropía es proporcionada por el campo magnético. Se muestra que en el caso de ondas con simetría angular y que decaigan a cero al infinito, el comportamiento lejos del origen está dado por la función modificada de Bessel K_0 , la cual decae exponencialmente. Por ello, el comportamiento en este caso es del mismo tipo que para soluciones de ZK que cumplan los mismos requisitos.

Para las soluciones con simetría angular, se hace un análisis utilizando la analogía mecánica de una partícula en un potencial conservativo y con un término disipativo²⁰. Se escribe la ecuación como un sistema y se analiza el espacio fase correspondiente. De la forma del potencial se muestra que las soluciones necesariamente oscilan alrededor de 0 ó ± 1 con amplitud decreciente. En el caso de tender a cero, se muestra que existe una única solución que decae exponencialmente y que sea siempre positiva. En contraste, existen un número infinito de soluciones que decaen eventualmente a cero, pero que primero oscilan cambiando de signo con un número finito de ceros (nodos). Estas soluciones son precisamente caracterizadas por el número de nodos que presenten.

Para las soluciones con muchos nodos se introduce un análisis por escalas múltiples en la variable temporal. Esto debido a que dichas soluciones poseen la escala de tiempo rápida de las oscilaciones y una lenta que es la que marca el decaimiento de los máximos de amplitud. De esto se encuentran cotas para los máximos de amplitud de las oscilaciones, que son en realidad envolventes superior e inferior a las oscilaciones.

Subsecuentemente se analiza numéricamente la colisión de dos ondas solitónicas concentradas²¹. Se muestran gráficas de cortes verticales y curvas de nivel a distintos tiempos. En ellas se aprecia cómo una onda alcanza a otra de menor amplitud. Después de la interacción, emergen dos ondas con comportamientos contrastantes: una de ellas decae en el

²⁰Para ello se interpreta a la distancia al origen r como si fuera el tiempo.

²¹Con esto se quiere decir que tienen un máximo de amplitud y decaen al infinito en todas (en este caso dos) direcciones, siempre con el mismo signo. En inglés, se les llama soluciones tipo 'lump', que literalmente significa 'acumulación' o 'protuberancia'.

tiempo, mientras que la otra crece rápidamente en amplitud hasta generar una singularidad en tiempo finito. Se tiene también el cambio de fase típico de la colisión de ondas no lineales: después de la colisión, ambas ondas se encuentran en una posición distinta a la que estarían en ausencia de interacción.

Este estudio numérico por lo tanto también muestra el comportamiento de ondas localizadas en dos dimensiones y motiva el estudio de las mismas.

En [26] Moussa utiliza métodos de álgebra de Lie para encontrar soluciones exactas a la versión bidimensional de ZK. La primera de ellas es una onda plana solitónica del tipo (1.43), pero generalizada a cualquier dirección

$$u(x, y, t) = 12(\eta_1^2 + \eta_2^2) \operatorname{sech}^2(\eta_1(x - x_0) + \eta_2(y - y_0) - 4\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2)t),$$

la cual es una onda plana viajando en dirección (η_1, η_2) y que podría haberse hallado por inspección de (1.42) y (1.43). Las otras dos soluciones obtenidas son

$$u(x, y, t) = \frac{x - c_1y - c_2t + c_3}{t + c_4} + c_2 \quad \text{y} \quad u(x, y, t) = \frac{x - c_1y + c_2}{t},$$

pero tienen la desventaja de no decaer de forma adecuada cuando $x, y \rightarrow \pm\infty$. La extensión de cualquiera de las tres soluciones anteriores a la versión tridimensional de ZK se puede hallar por inspección.

En [4], Bradley estudia el caso de electromigración superficial en el que la forma de la superficie depende tanto de la dirección paralela al campo eléctrico como de la transversal, generalizando su trabajo anterior [3]. Nuevamente aplica un análisis perturbativo bajo las condiciones límite requeridas en [3], llegando a un par de ecuaciones diferenciales acopladas para el potencial eléctrico y la forma de la superficie. Una de las ecuaciones del sistema tiene una fuerte semejanza con ZK, excepto que el acoplamiento con el potencial introduce términos adicionales. Si en este sistema se supone independencia de la coordenada transversal, se recupera el caso de su trabajo anterior y la superficie satisface entonces KdV.

Adicionalmente, en este trabajo Bradley analiza la estabilidad de una onda plana solitónica en este contexto. Para esto, se aplica una perturbación periódica con longitud de onda larga de manera perpendicular a la dirección de propagación y se añade un factor de crecimiento $e^{\gamma t}$, al igual que en los trabajos anteriores de Laedke-Spatschek, Infeld-Frycz y Allen-Rowlands. Mediante un análisis de escalas múltiples muy similar al de [2] se muestra finalmente que la onda plana es inestable ante perturbaciones perpendiculares.

Resumimos ahora los resultados más relevantes que conocemos que han sido encontrados para la ecuación ZK. Se cuenta con lo siguiente:

(i) Gran parte de los trabajos se han concentrado en la estabilidad de la onda plana que es solución de ZK. Al introducir una perturbación periódica perpendicular a la dirección de propagación se encuentran inestabilidades cuando la perturbación posee una longitud de onda larga y de manera inversa la onda es estable ante perturbaciones con longitud de onda

corta. Se consideran también perturbaciones periódicas en otras direcciones y con longitud de onda larga. Para ciertos ángulos estas perturbaciones generan inestabilidad de la onda plana.

(ii) Se ha visto que la ecuación ZK, o una modificación de la misma, aparece en otros contextos. Enfatizamos además la ocurrencia de la ecuación mZK, la cual posee una no linealidad distinta que ZK y motiva la consideración de términos no lineales más generales.

(iii) La evidencia numérica muestra que la ecuación ZK posee estructuras coherentes en dos dimensiones (ondas localizadas) pero enfatizamos que *no* se cuenta con soluciones explícitas para ondas de este tipo hasta este momento. Se tienen también soluciones numéricas para las ecuaciones ZK no homogénea y mZK que consideran colisiones de ondas localizadas en dos dimensiones. Por supuesto que una solución exacta tampoco se ha encontrado en estos casos.

De lo anterior se desprende que la dinámica de ondas localizadas o estructuras coherentes es desconocida e interesante de estudiar. En particular, es importante conocer las situaciones bajo las cuales una estructura coherente gobernada por ZK adquiere una forma permanente (punto de equilibrio), decae a cero o bien crece indefinidamente en amplitud, obteniéndose una singularidad en este último caso.

En las soluciones numéricas hechas en el trabajo de la ecuación mZK, donde el término no lineal es del tipo u^2u_x en lugar del término uu_x que posee ZK, se observó la evolución de dos estructuras coherentes al colisionar. Esto nos empuja a considerar en la Sección 2.4 la evolución de ondas localizadas para una ecuación que posea un término no lineal que generalice a los de ZK y mZK, esto es, considerar un término no lineal de la forma $u^p u_x$ con $p > 0$.

Capítulo 2

Soluciones Modulacionales en dos dimensiones

2.1 Evidencia numérica

En la presente sección mostramos lo que resulta de resolver numéricamente a la ecuación ZK en la forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \quad (2.1)$$

lo cual fue hecho por el doctor N. F. Smyth. Hacemos esto con el propósito de observar el fenómeno que resulta y posteriormente entender lo ocurrido.

En el primer caso, se resuelve (2.1) con condición inicial $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$ y se sigue su evolución hasta llegar a $t = 15$. En la Fig. 2.1 se muestra la condición inicial, mientras que en la Fig. 2.2 se muestra el resultado después de quince unidades de tiempo. Adicionalmente, en la Fig. 2.3 se muestra el corte en el plano $y = 0$ de la solución numérica en $t = 15$.

De las Figs. 2.2 y 2.3 vemos que después de transcurrir quince unidades de tiempo se tiene una estructura coherente que se lleva la mayor cantidad de la masa inicial y que ha avanzado una distancia del orden de veinte unidades en dirección x . Notamos también que su amplitud ha crecido a partir de 0.5 hasta alcanzar un valor cercano a 1.2 y que esta estructura se ha vuelto más angosta. Por otro lado, vemos que cierta parte de la masa se ha quedado atrás formando una estructura más compleja que en su mayor parte tiene baja amplitud; a esta estructura que se forma de la masa cedida por la estructura coherente se le llama radiación. Una característica fundamental de dicha radiación, que es evidente de la Fig. 2.2, es que solamente se forma en una cierta región detrás de la onda acampanada y que fuera de esa región la solución numérica tiene un valor muy cercano a cero.

En un segundo caso, se resuelve (2.1) con condición inicial $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$ e igualmente se sigue su evolución hasta llegar a $t = 10$. En la Fig. 2.4 se muestra la condición

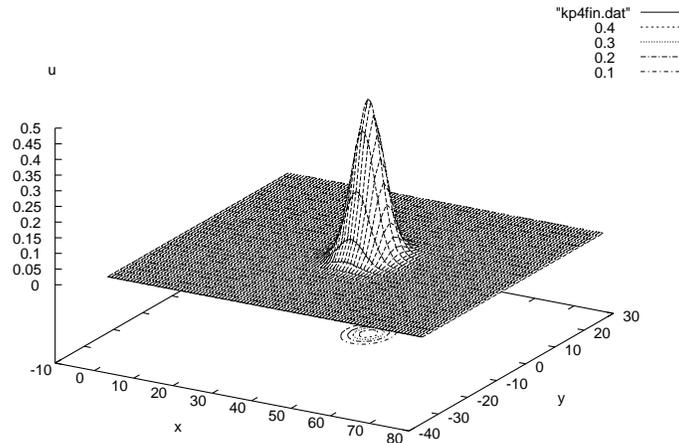


Fig. 2.1: Condición inicial de la simulación numérica $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

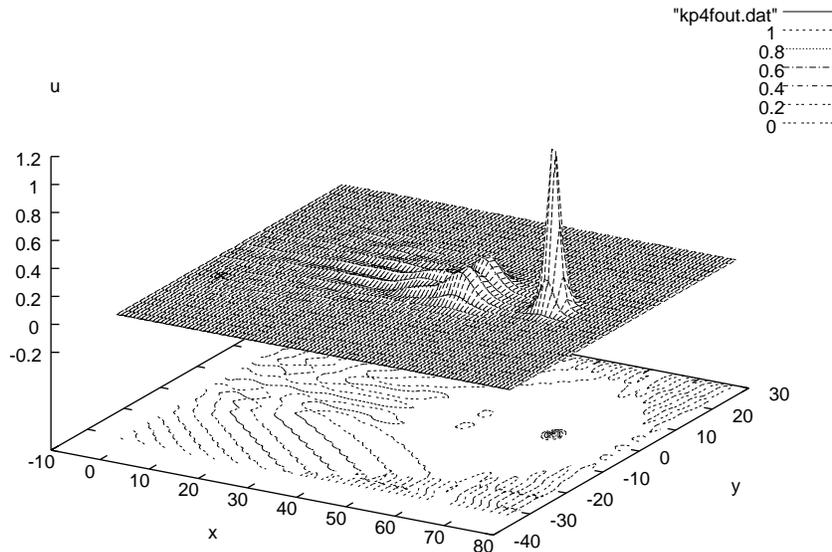


Fig. 2.2: Simulación numérica después de 15 unidades de tiempo, comenzando en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

inicial, en la Fig. 2.5 se muestra el resultado después de quince unidades de tiempo y en la Fig. 2.6 se muestra el corte en el plano $y = 0$ de la solución numérica en $t = 10$.

En las Figs. 2.5 y 2.6 vemos que después de diez unidades de tiempo se tiene nuevamente una estructura coherente que ha avanzado una distancia del orden de cuarenta unidades en dirección x . Su amplitud inicia esta vez en 1 y alcanza un valor cercano a 3.2 para $t = 10$,

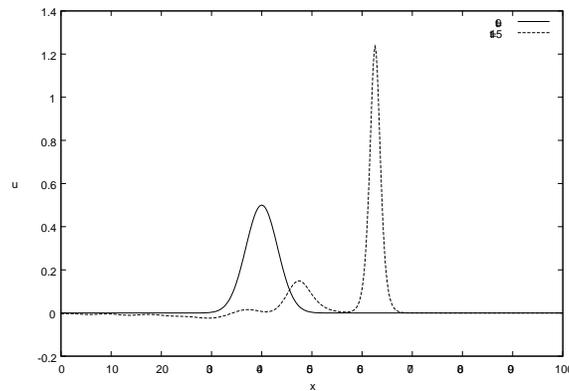


Fig. 2.3: Corte en $y = 0$ de la simulación numérica mostrando la condición inicial y también el resultado después de 15 unidades de tiempo. Se comienza en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

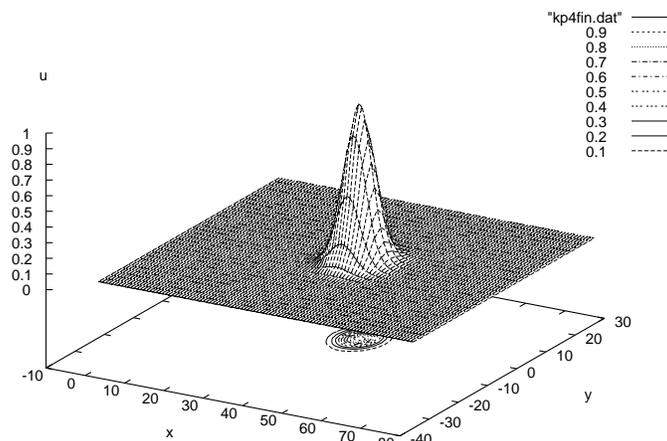


Fig. 2.4: Condición inicial de la simulación numérica $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

al igual que en el primer caso, esta estructura se ha vuelto más angosta. Como antes, vemos que buena parte de la masa se ha quedado atrás en forma de radiación y que la forma de ésta es más compleja esta vez. Notamos que la radiación se sitúa otra vez en una región detrás de la estructura coherente y que fuera de esa región la solución numérica tiene un valor muy cercano a cero. Una diferencia notable con el primer caso es que esta vez la región donde la radiación es notoria es aún mayor.

Con la experiencia adquirida, habiendo observado la evolución de condiciones iniciales Gaussianas con dos amplitudes diferentes, utilizaremos ahora las leyes de conservación de la

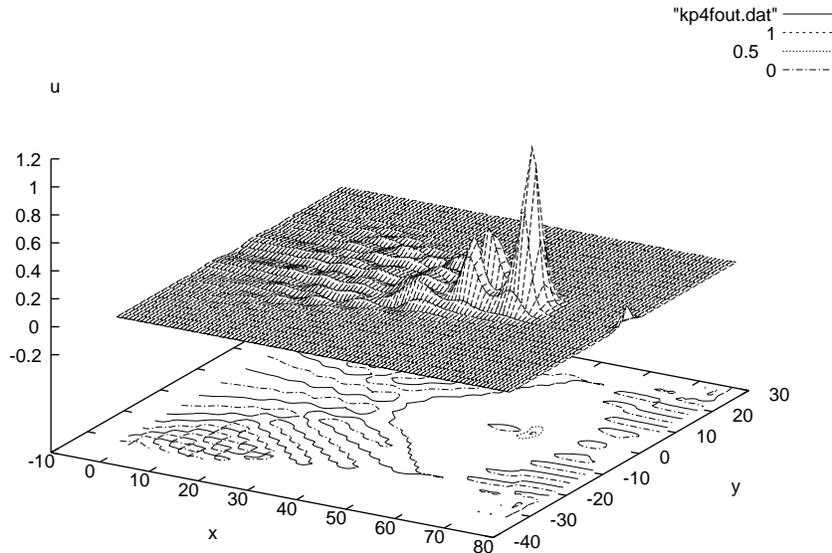


Fig. 2.5: Simulación numérica después de 15 unidades de tiempo, comenzando en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

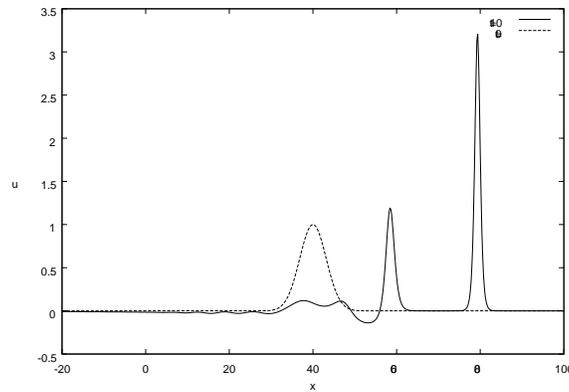


Fig. 2.6: Corte en $y = 0$ de la simulación numérica mostrando la condición inicial y también el resultado después de 15 unidades de tiempo. Se comienza en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

ecuación ZK para entender la evolución de dichas ondas Gaussianas.

Primero observamos que es conveniente dividir la evolución de la estructura coherente u onda principal y la de la radiación. Para ello, tomaremos como solución aproximada de la ecuación ZK a la función $u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t)$ donde $u_0(x, y, t)$ representa a la estructura coherente y $u_1(x, y, t)$ a la radiación. Tomando como punto de partida las

soluciones numéricas antes expuestas, usaremos como aproximación a la estructura coherente a una función Gaussiana en dos dimensiones espaciales. Más aún, como hemos visto que la amplitud, el ancho y la posición de dicha estructura cambian con el tiempo, tomaremos a u_0 como $u_0(x, y, t) = a(t)e^{-\kappa(t)((x-\xi(t))^2+y^2)}$. De manera que la evolución de esta onda acampanada está dada por la evolución de las tres funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$; se dice entonces que la estructura coherente está modulada por las tres funciones del tiempo anteriores, o que ella es una solución modulada o modulacional.

En las soluciones numéricas, también se observó que la radiación no se distribuye sobre todo el espacio bidimensional, por el contrario, la radiación se esparce solamente sobre una región bastante definida. El propósito de la siguiente sección es comprender cómo ocurre esto. Una vez que se logre ello, será más fácil tomar en cuenta el efecto que tiene la radiación sobre la evolución de la estructura coherente y por esto podremos hacer suposiciones útiles sobre la forma de la función que representa a la radiación, $u_1(x, y, t)$.

2.2 Confinamiento de la radiación por la cáustica

Hemos visto que las ecuaciones de onda que son a la vez no lineales y dispersivas, pueden poseer soluciones de forma permanente. Sin embargo, no todas las soluciones son de este tipo, como veremos ahora.

Por simplicidad pensemos en una dimensión, por ejemplo en la ecuación KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.2)$$

La ecuación anterior tiene la solución de onda viajera

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right). \quad (2.3)$$

Si en una simulación numérica de dicha ecuación se utiliza una condición inicial que coincide exactamente con la anterior onda viajera en $t = 0$, entonces la solución para todo tiempo será esa onda viajera con forma permanente. En la simulación numérica, se observará cómo la solución consiste simplemente de una traslación de la condición inicial. Pero, ¿qué ocurre si proponemos una condición inicial arbitraria? Pueden ocurrir en realidad muchos comportamientos distintos, pero se les puede resumir en dos: (a) la condición inicial puede partirse y formar varias ondas viajeras del tipo (2.3) de distintos tamaños y con la posible adición de un tren de ondas sin forma permanente; (b) se forma exclusivamente un tren de ondas de forma no permanente del tipo mencionado. Al tren de ondas sin forma permanente, con una amplitud que a menudo decae a cero, se le conoce como radiación. El comportamiento de tipo (b) ocurre muchas veces cuando la condición inicial no tiene suficiente masa para formar una onda viajera y resulta solamente el otro tipo de comportamiento. En la simulación numérica se verá, a partir del tiempo cero, que se forman un cierto número de ondas

viajeras del tipo (2.3), o tal vez ninguna, más una parte complicada, a menudo oscilatoria, que decae y que es la radiación mencionada.

La radiación de una ecuación de onda no lineal es extremadamente difícil de estudiar y tomar en cuenta, pero para nuestras consideraciones futuras, será necesario conocer aquella región en el espacio, ya sea en dos o tres dimensiones, donde la radiación cedida por la onda principal se acumula. Veremos que es posible hacer esto mediante un análisis de la versión linealizada de la ecuación ZK, suponiendo que la radiación posee una amplitud pequeña y consecuentemente la no linealidad contribuye poco a su evolución.

La versión linealizada de ZK en dos dimensiones es

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0. \quad (2.4)$$

De manera que si proponemos una solución del tipo $e^{i(k(x-\xi)+ly-\omega(k,l)t)}$ tendremos

$$-i\omega - ik^3 - ikl^2 = 0$$

de donde $\omega(k, l) = -k^3 - kl^2$. Escribimos $\varphi(x, y, t; k, l) = k(x - \xi) + ly - \omega(k, l)t$ y entonces la solución general de (2.4) es

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, l) e^{i\varphi(x, y, t; k, l)} dk dl \quad (2.5)$$

donde por supuesto $g(k, l)$ debe decaer lo suficientemente rápido para que la anterior integral tenga sentido.

Es necesario realizar un análisis de la velocidad de grupo de (2.3) para entender la confinación de la radiación en cierta región. Para ello, analizaremos el caso más simple en una dimensión y recordaremos así algunas ideas.

Supóngase que se quiere conocer el comportamiento de

$$H(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

para tiempos grandes. Esto se hace sencillamente en términos del método de fase estacionaria, el cual se explica ahora de manera breve. Al escribir la integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(k) e^{it(kx/t - \omega(k))} dk$$

y recordando que t es grande, vemos que $e^{it(kx/t - \omega(k))}$ efectúa oscilaciones densas excepto en esos lugares donde la fase cambie lentamente con k . Escribiendo nuevamente a la fase como $\varphi(x, t; k) = kx - \omega(k)t$, vemos que esos puntos están caracterizados por $\varphi_k = 0$. Nos percatamos además de que las zonas donde ocurren oscilaciones rápidas en k contribuyen

poco a la integral. Esto se debe a que en la suma de esas áreas ocurre una cancelación entre las partes por arriba del eje y aquellas por debajo de él. Concluimos entonces que la mayor parte de la contribución a $H(x, t)$ se sitúa en la zona cercana a un cierto k_0 donde $\varphi_k(x, t; k_0) = 0$. Usando esto y desarrollando en Taylor alrededor de k_0 obtenemos la aproximación

$$H(x, t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} h(k_0) e^{i(\varphi(k_0) + \varphi_k(k_0)(k-k_0) + \frac{1}{2}\varphi_{kk}(k_0)(k-k_0)^2)} dk.$$

Se omitió escribir la dependencia de φ en x y t , además, se usó solamente el primer término de la serie para $h(k)$ y hasta el tercero para φ . La relación $\varphi_k(k_0) = x - \omega'(k_0)t = 0$ nos da la expresión para $H(x, t)$

$$H(x, t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} h(k_0) e^{i(k_0x - \omega(k_0)t - \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2)} dk = h(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega''(k_0)t}} e^{i(k_0x - \omega(k_0)t - \pi/4)}.$$

La ecuación $x = \omega'(k_0)t$ nos proporciona un número de onda¹ dependiente de la posición y del tiempo $k_0(x, t) = K(x/t)$. Para la frecuencia tendremos algo análogo ya que $\omega(k_0)$ depende a su vez de estas cantidades a través de $k_0(x, t) = K(x/t)$. De ello se desprende que $H(x, t)$ es un paquete de ondas con número de onda y frecuencia que varían de punto a punto y de un instante a otro. Para complicar aún más las cosas, la amplitud del paquete, la cantidad $h(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega''(k_0)t}} e^{i(k_0x - \omega(k_0)t - \pi/4)}$, es también función de la posición y del tiempo.

Por otro lado, la relación $x/t = \omega'(k_0)$ tiene una interpretación mucho más fundamental. De la forma funcional de $k_0(x, t)$, que es $k_0 = K(x/t)$, vemos que tiene un valor constante sobre los rayos que pasan por el origen $x = ct$, con c constante. De esta manera, un observador que se mueve sobre uno de estos rayos y que se fija solamente en los puntos $x = ct$ verá una onda con el número de onda $k_0 = K(c)$ y la frecuencia fija $\omega(K(c))$ pero con amplitud variable. Para dicho observador, la onda avanza a velocidad c (que es su misma velocidad) con un número de onda y frecuencia constantes. Para un segundo observador moviéndose a velocidad c' sobre un rayo $x = c't$, ocurrirá algo similar pero él observará siempre el número de onda $k_0 = K(c')$ y la frecuencia $\omega(K(c'))$. Por otro lado, un observador que no se mueve con algún rayo $x = ct$, será testigo de una onda que avanza con número de onda, frecuencia y amplitud que varían en cada punto y en cada instante.

A la cantidad $\omega'(k_0)$ se le llama la velocidad de grupo correspondiente al número de onda k_0 y por lo antes mencionado es la velocidad a la que avanzan las ondas con ese número de onda y frecuencia $\omega(k_0)$.

Retomamos ahora el caso de ZK, extendiendo lo anterior a dos dimensiones. En ese caso, la fase es

$$\varphi = k(x - \xi) + ly - \omega(k, l)t$$

¹Suponiendo que la solución es única y que $\omega'(k_0) \neq 0$.

con $\omega(k, l) = -k^3 - kl^2$. De la anterior relación de dispersión, se obtienen las componentes de la velocidad de grupo en x y y

$$\omega_k = -3k^2 - l^2, \quad \omega_l = -2kl.$$

De esto se obtiene un importante resultado: la velocidad de grupo en dirección x , ω_k , es siempre negativa sin importar los valores de k y l . Esto nos indica que la radiación cedida por la onda principal al avanzar en dirección x se queda atrás, lo cual simplificará varias consideraciones posteriores.

Los puntos de fase estacionaria están dados por

$$\varphi_k = x - \xi + (3k^2 + l^2)t = 0, \quad \varphi_l = y + 2klt = 0.$$

Esto tiene una interpretación análoga a la de una dimensión. Tenemos dos ecuaciones de donde se obtienen k y l como funciones de x , y y t , a éstas las llamamos k_0 y l_0 , de igual forma que en una dimensión. Al tomar k_0 y l_0 fijas, se obtienen dos familias de curvas con estas cantidades como parámetros. Al moverse el observador con cada una de estas curvas, se percibe un número de onda constante k_0 ó l_0 , dependiendo de la curva escogida. Encontramos ahora las curvas correspondientes a k . Si eliminamos a l entre las dos ecuaciones se obtiene

$$x - \xi + \left(3k^2 + \frac{y^2}{4k^2t^2} \right) t = 0,$$

que es una familia uniparamétrica de parábolas que evolucionan en el tiempo, con k fungiendo como el parámetro. Como se explicó antes, si uno se mueve con estas parábolas, observará siempre el número de onda k_0 . Existe también una familia de parábolas con parámetro l que se encuentra de igual forma, si uno fija a l como l_0 y se mueve con ellas, se observará siempre el número de onda l_0 en dirección y . De forma inversa, al obtener k_0 y l_0 como funciones de (x, y, t) , tendremos para cada punto del espacio y para cada tiempo un vector de número de onda (k_0, l_0) .

Ahora surge la pregunta ¿en verdad tenemos un vector de número de onda para cada punto de \mathbb{R}^2 ? Esto es equivalente a preguntarse si la familia uniparamétrica de parábolas cubre todo el espacio o no. Esto lo podemos resolver considerando la envolvente de dicha familia de curvas. Del Cálculo sabemos que si tenemos una familia de curvas con parámetro k dada por $\varphi_k(x, y, t; k) = 0$, entonces la envolvente se obtiene al resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\varphi_k(x, y, t; k) = 0, \quad \varphi_{kk}(x, y, t; k) = 0.$$

De la segunda de ellas, se obtiene $k^4 = \frac{y^2}{12t^2}$ o bien $k^2 = \pm \frac{y}{2\sqrt{3}t}$. Al usar esto en la primera, tenemos

$$x - \xi \pm \sqrt{3}y = 0,$$

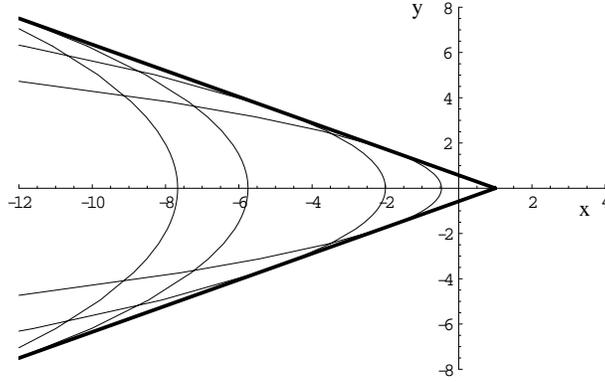


Fig. 2.7: Envoltentes y algunos miembros de la familia de parábolas, con $\xi = t = 1$ y diversos valores de k .

de manera que la envoltente está formada por dos rectas que se trasladan en el tiempo sin cambiar su pendiente dadas por

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi).$$

Las envoltentes y algunos elementos de la familia de parábolas se muestran en la Fig. 2.7. Vemos entonces que las parábolas están confinadas a la región entre las rectas $-\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi) < y < \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi)$, con $x < \xi$; de ello se deduce que las parábolas no cubren todo \mathbb{R}^2 y por ello, los puntos por los cuales no pasa ninguna parábola no poseen números de onda en x y y dados por $k_0(x, y, t)$ y $l_0(x, y, t)$ respectivamente. ¿Qué nos indica esto? Nos dice que en esa región no hay transporte de ondas, el paquete de ondas de la radiación está *confinado* a la región antes mencionada entre las envoltentes, en el límite en que la amplitud de las soluciones de la ecuación ZK tienden a cero.

En tres dimensiones la situación es completamente análoga. En ese caso la ecuación ZK linealizada es

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0.$$

Lo que nos proporciona la relación de dispersión $\omega = -k^3 - kl^2 - km^2$ al proponer una solución del tipo $e^{i(k(x-\xi)+ly+mz-\omega t)} = e^{i\varphi}$. Los puntos de fase estacionaria se encuentran a partir de

$$\varphi_k = x - \xi + (3k^2 + l^2 + m^2)t = 0, \quad \varphi_l = y + 2klt = 0, \quad \varphi_m = z + 2kmt = 0. \quad (2.6)$$

La velocidad de grupo tiene componentes $(\omega_k, \omega_l, \omega_m) = -(3k^2 + l^2 + m^2, 2kl, 2km)$, nuevamente la componente en x es siempre negativa.

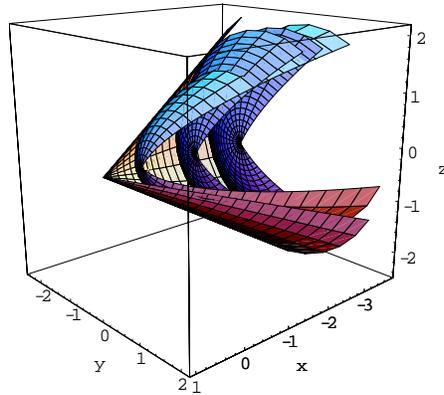


Fig. 2.8: Envoltente y algunos miembros de la familia de paraboloides en tres dimensiones.

Usando (2.6), obtenemos la superficie donde la primer componente del vector de número de onda, k , es una constante. Generalizando lo encontrado en dos dimensiones, estas superficies resultan ahora ser los paraboloides

$$\varphi_k = x - \xi + \left(3k^2 + \frac{1}{4k^2 t^2} (y^2 + z^2) \right) t = 0,$$

con parámetro k . Nuevamente encontramos la envoltente de esta familia, demostrando que los paraboloides no cubren todo \mathbb{R}^3 y de esta manera son restringidos a estar solamente dentro de la envoltente. La envoltente es ahora el cono

$$x - \xi + \sqrt{3(y^2 + z^2)} = 0,$$

como era de esperarse al generalizar las rectas $x - \xi \pm \sqrt{3}y = 0$ a tres dimensiones. Podemos ahora pensar en la Fig. 2.7 como el corte en el plano $z = 0$ de la superficie cónica envoltente y la familia de paraboloides con parámetro k , se muestra también la Fig. 2.8 para una mejor visualización.

Finalmente, como demostración de estas ideas, mostramos una simulación numérica de la ecuación ZK en la forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

y con condición inicial $u(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$ al tiempo $t = 10$. La simulación numérica y la gráfica fue realizada por el doctor N. F. Smyth y gentilmente proporcionada, ver Fig. 2.9. En esa gráfica puede verse el avance de una onda acampanada, la llamada onda principal, y también la radiación cedida por ella. Es claro que la radiación tiene amplitud bastante menor que la onda principal, puede verse también que se encuentra confinada en una región con forma de cuña detrás de ella. Esta región es la que se ha calculado anteriormente, en el límite en que la amplitud de la radiación tiende a cero.

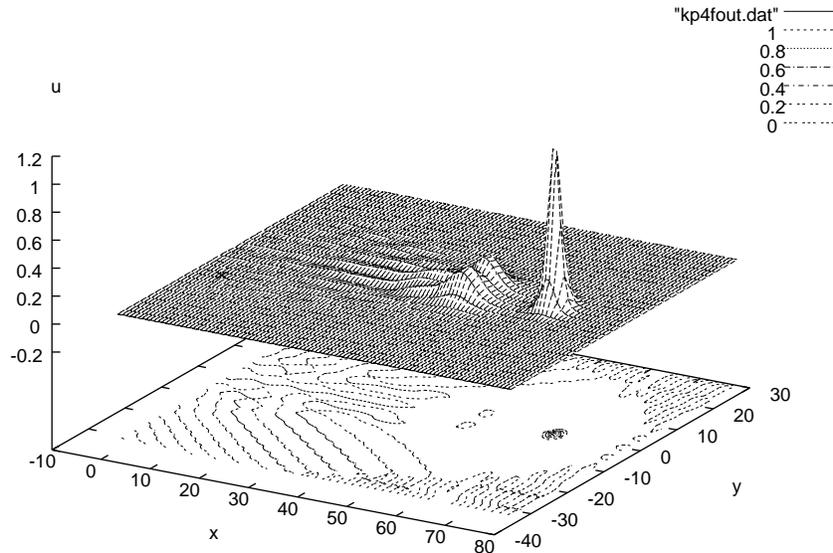


Fig. 2.9: Solución numérica de la condición inicial $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$ después de 15 unidades de tiempo. Cortesía del doctor N.F Smyth.

2.3 Evolución de una onda localizada gobernada por la ecuación Zakharov-Kuznetsov

2.3.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK

Las leyes de conservación juegan un papel de extrema importancia en el estudio de ecuaciones que dan lugar a comportamiento del tipo de ondas solitarias. Para entender los resultados numéricos vistos en la Sección 2.1, usaremos estas leyes de conservación en el presente trabajo, lo que permitirá encontrar una aproximación a la evolución de una onda inicialmente localizada y con forma de campana, la llamada estructura coherente. De manera más específica, estas leyes de conservación nos darán una aproximación a la evolución de las funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, las cuales modulan la evolución de la estructura coherente.

Para nuestros primeros propósitos, basta considerar el caso de dos dimensiones y pensar que la función u que satisface la ecuación ZK no depende de z , esto es $u = u(x, y, t)$, donde u satisface

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0. \quad (2.7)$$

La conservación de masa

Veremos a partir de la ecuación ZK en dos dimensiones que la masa² total de la onda es una cantidad conservada. La masa de la onda en dos dimensiones se define como³

$$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy,$$

por lo que debemos pedir que u decaiga lo suficientemente rápido cuando $x, y \rightarrow \pm\infty$ para obtener un valor finito. Es posible escribir a la ecuación ZK (2.7) en la forma

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y = 0, \quad (2.8)$$

que es la forma diferencial de la conservación de masa. De dicha expresión se sigue que

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x - (u_{xy})_y dx dy = 0,$$

ya que u decae a cero en los extremos. De esta manera tenemos la versión integral de la conservación de masa

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = 0. \quad (2.9)$$

La conservación de momento

Consideramos ahora la conservación del momento de la onda. De la Mecánica sabemos que la cantidad total de momento se puede escribir como la masa del sistema multiplicada por la velocidad del centro de masa. Mediante esto, podemos escribir al momento del sistema como

$$P \equiv \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy, \quad (2.10)$$

donde X y Y son las coordenadas del centro de masa y $\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt}$. A su vez, X y Y están dadas por

$$X = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy}, \quad Y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy}.$$

²En el caso de ondas iónicas acústicas podría ser más adecuado decir la conservación del número total de iones.

³Si u no depende de z , no es posible integrar con respecto a ella en todo el intervalo ya que no se obtendría algo finito. La extensión para M al caso de variaciones en tres dimensiones es inmediata, siempre y cuando u decaiga también a lo largo de la tercera dirección.

Para encontrar una expresión para P desde (2.10), calculamos \dot{X} y \dot{Y}

$$\dot{X} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u_t dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy},$$

notando que no es necesario derivar el denominador debido a (2.9). A partir de (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u_t dx dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right)_x + x (u_{xy})_y \right] dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x \left(u^2/2 + u_{xx} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} dy - \int_{-\infty}^{\infty} x u_{xy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy, \end{aligned}$$

donde se ha usado integración por partes y el que u y sus derivadas se anulan al infinito.

Similarmente, para \dot{Y} se obtiene

$$\dot{Y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u_t dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy}.$$

Usando el mismo procedimiento que para \dot{X}

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u_t dx dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[y \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right)_x + y (u_{xy})_y \right] dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} y \left(u^2/2 + u_{xx} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} dy - \int_{-\infty}^{\infty} y u_{yy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dy = 0, \end{aligned}$$

de manera que el centro de masa de la onda se desplaza exclusivamente en la dirección x .

Usando estos resultados, podemos escribir el momento de la onda como

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy, \quad (2.11)$$

veremos que lo anterior es constante para la ecuación ZK.

Multiplicando a (2.7) por u tenemos

$$\begin{aligned} u u_t + u^2 u_x + u u_{xxx} + u u_{xyy} &= \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{3} u^3 + u u_{xx} \right)_x - u_x u_{xx} + (u u_{xy})_y - u_y u_{xy} \\ &= \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{3} u^3 + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 \right)_x + (u u_{xy})_y = 0. \end{aligned}$$

Por lo que la versión diferencial de la conservación de momento se escribe como

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2\right)_x + (uu_{xy})_y = 0. \quad (2.12)$$

De aquí se sigue la conservación del momento P . Usando (2.11) y (2.12) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2\right)_x + (uu_{xy})_y \right] dx dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la expresión integral para la conservación de momento es

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx dy = 0. \quad (2.13)$$

2.3.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación

Resolver un problema de condiciones iniciales para ecuaciones de onda no lineales que admiten solitones es una tarea formidable. De la teoría de ondas solitarias, es bien sabido que si se tiene una condición inicial que coincide exactamente con la onda solitaria de la ecuación en estudio, entonces la solución para todo tiempo será justamente una onda solitaria. Si se tiene un perfil inicial que no coincide con la onda solitaria, entonces es posible que el perfil inicial se divida en varios solitones, más una componente radiativa; esto es, un tren de ondas de menor amplitud sin forma permanente. Se pueden ver más detalles de las ideas anteriores en [8], [9], [23] ó [27].

En la presente sección, motivados por los resultados numéricos, se construye una solución aproximada a la ecuación ZK que se compone de dos partes: una parte con estructura localizada la cual se representa por una función $u_0(x, y, t)$ y que llamaremos la onda principal; más una segunda parte que representa la radiación desprendida por la onda principal y que se representa por una función $u_1(x, y, t)$. Supondremos además que la condición inicial para $u(x, y, t)$ es justamente $u_0(x, y, 0)$, por lo que al inicio no hay radiación. A la onda principal le impondremos una forma Gaussiana, centrada en un punto $\xi(t)$ sobre el eje x , con una amplitud $a(t)$ y con una razón de decaimiento espacial $\kappa(t)$, ver ecuación (2.14). De esta manera, la evolución de la onda principal se determina por las tres funciones $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$; es decir, estas tres funciones modulan la evolución de $u_0(x, y, t)$, o bien se dice que $u_0(x, y, t)$ es una solución modulada o modulacional. A partir de las leyes de conservación estudiadas en la sección 2.3.1 se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ que por lo tanto describen de manera aproximada la evolución de la onda principal $u_0(x, y, t)$. Como un primer caso, encontraremos un sistema de ecuaciones

que describen la evolución de la onda principal ignorando por completo la radiación; en este caso se supone que la amplitud de la radiación es lo suficientemente pequeña como para despreciarla. Después de ello, estudiaremos el caso en que la radiación no es completamente despreciable y encontraremos así un sistema de ecuaciones que describen a la onda principal añadiendo una corrección debido al efecto de la radiación.

Sistema de ecuaciones sin tomar en cuenta a la radiación

Proponemos entonces como solución de la ecuación ZK

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0,$$

a la función $u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t)$, con u_0 dada por

$$u_0(x, y, t) = a(t)e^{-\kappa(t)((x-\xi(t))^2+y^2)}; \quad (2.14)$$

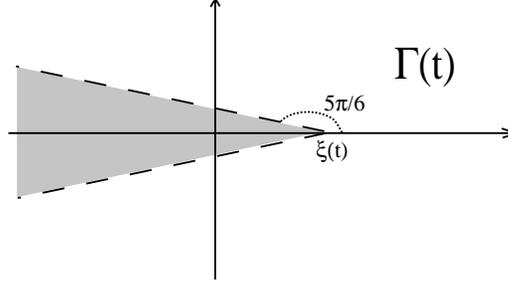
es decir la onda principal tiene un perfil Gaussiano y además se propaga en la dirección x . En el caso de una solución de tipo solitón, hemos visto que la onda conserva su forma, por lo que su amplitud, velocidad y ancho son constantes. En nuestro caso, no se tendrá una onda solitaria por lo que las funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ toman en cuenta que la onda principal puede deformarse cambiando las cantidades mencionadas antes. Llamaremos $V(t) \equiv \dot{\xi}$ a la velocidad de la onda principal y por lo antes mencionado es también función del tiempo. Por supuesto que será indispensable restringirnos al caso $\kappa > 0$, de manera que se tengan soluciones aceptables físicamente. El sistema de ecuaciones que se obtendrá a partir de las leyes de conservación será justamente un sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, la solución de dicho sistema nos dirá entonces cómo evoluciona la onda coherente $u_0(x, y, t)$. Encontramos ahora la primera de las ecuaciones ordinarias que modelan la evolución de u_0 , esto lo haremos utilizando la conservación de la masa, ecuación (2.9).

- Ecuación correspondiente a la conservación de la masa

Hemos visto ya que la radiación desprendida por la onda principal se encuentra confinada en la región entre las cáusticas $\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi) < y < -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi)$ y $x < \xi$, a la que llamamos $\Gamma'(t)$. Con esta nomenclatura, la región $\Gamma(t)$ es aquella región móvil en donde la radiación es completamente despreciable. Esta región se muestra en la Fig. 2.10.

Para obtener la ecuación deseada seguimos el desarrollo de [24] y calculamos el cambio de la masa de la onda en la región $\Gamma(t)$ y tomamos en cuenta que $u(x, y, t)$ satisface la ecuación ZK

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty \int_{\xi - \sqrt{3}y}^\infty u dx dy + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \int_{\xi + \sqrt{3}y}^\infty u dx dy = \int_{\Gamma(t)} u_t dx dy \\ &\quad - \int_0^\infty u|_{\xi - \sqrt{3}y} V dy - \int_{-\infty}^0 u|_{\xi + \sqrt{3}y} V dy - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y \right] dx dy. \end{aligned}$$

Fig. 2.10: La región $\Gamma(t)$.

Si consideramos ahora que en la región $\Gamma(t)$ se cumple $u_1 \simeq 0$ entonces en esa región u_0 por sí sola satisface a la ecuación ZK, y nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &\simeq \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy \simeq -2V \int_0^\infty u_0|_{\xi-\sqrt{3}y} dy \\ &\quad - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde la paridad de u_0 con respecto a y nos ayuda a simplificar la expresión que representa el cambio de masa en la región de integración. El resultado de arriba nos proporcionará la ecuación diferencial ordinaria deseada para los parámetros $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, una vez que se evalúen las integrales de arriba. Hacemos eso en este momento, evaluando cada una de las integrales de arriba y tomando en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito.

Comenzamos con la masa total en la región $\Gamma(t)$, utilizando coordenadas polares planas:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy &= 2 \int_0^\infty \int_{\xi-\sqrt{3}y}^\infty u_0 dx dy = 2 \int_0^\infty \int_{\xi-\sqrt{3}y}^\infty a e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)} dx dy \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-\sqrt{3}y}^\infty a e^{-\kappa(x'^2+y^2)} dx' dy = 2a \int_0^{5\pi/6} \int_0^\infty e^{-\kappa r^2} r dr d\varphi \\ &= \frac{10\pi}{6} \frac{a}{\kappa} \frac{\Gamma(1)}{2} = \frac{5\pi}{6} \frac{a}{\kappa}, \end{aligned}$$

donde se usó la expresión para la función gamma $\frac{1}{2}\Gamma(s) = \int_0^\infty z^{2s-1} e^{-z^2} dz$, y $\Gamma(1) = 1$. El resultado de arriba se hubiera podido obtener de manera más sencilla si notamos que la masa total de la onda es $\frac{\pi a}{\kappa}$ y por lo tanto la masa en la región $\Gamma(t)$ es simplemente $\frac{10\pi/6}{2\pi} = \frac{5}{6}$ del total.

La siguiente integral requerida es inmediata

$$\int_0^\infty u_0|_{\xi-\sqrt{3}y} dy = \int_0^\infty a e^{-\kappa(3y^2+y^2)} dy = \frac{a}{\sqrt{4\kappa}} \frac{\Gamma(1/2)}{2} = \frac{a}{2\kappa^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \frac{a}{\kappa^{1/2}}.$$

Finalmente la última integral es

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy &= 2 \int_0^\infty \int_{\xi - \sqrt{3}y}^\infty \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} + u_{0yy} \right]_{\xi - \sqrt{3}y} dy. \end{aligned}$$

Si usamos ahora $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$ y $u_{0yy} = (4a\kappa^2y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0yy})_x \right] dx dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{a^2}{2} e^{-2\kappa(3y^2+y^2)} + (4a\kappa^2 3y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+y^2)} + (4a\kappa^2 y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+y^2)} \right] dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{a^2}{2} e^{-8\kappa y^2} + (16a\kappa^2 y^2 - 4a\kappa) e^{-4\kappa y^2} \right] dy \\ &= -2 \left[\frac{a^2}{2} \frac{1}{(8\kappa)^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{2} + 16a\kappa^2 \frac{1}{(4\kappa)^{3/2}} \frac{\Gamma(3/2)}{2} - 4a\kappa \frac{1}{(4\kappa)^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \right] \\ &= -2 \left[\frac{\pi^{1/2}}{8\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + \frac{\pi^{1/2}}{2} a\kappa^{1/2} - \pi^{1/2} a\kappa^{1/2} \right] \\ &= -\pi^{1/2} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2} \right] = \pi^{1/2} \left[a\kappa^{1/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Sustituimos en (2.15) los valores de las tres integrales calculadas, quedando

$$\frac{d}{dt} \frac{5\pi}{6} \frac{a}{\kappa} = -2V \frac{\pi^{1/2}}{4} \frac{a}{\kappa^{1/2}} - \pi^{1/2} \left[a\kappa^{1/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \right],$$

o bien,

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2}. \quad (2.16)$$

Esta es la primera ecuación diferencial ordinaria que involucra a $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ ($\dot{\xi} = V(t)$). Proseguimos ahora a considerar la conservación del momento.

- Ecuación correspondiente a la conservación del momento

Consideramos la conservación del momento, ecuación (2.13). Como la amplitud de u_1 es pequeña, tomaremos a u_1^2 como despreciable con respecto a u_0^2 en todo el plano \mathbb{R}^2 . Adicionalmente, u_0 es de magnitud despreciable en aquella región donde u_1 no lo es y viceversa, de esto resulta que $u_0 u_1$ pueda despreciarse en todo el plano. De esta manera, el momento se puede tomar como

$$P = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

La ecuación $\dot{P} = 0$ queda así

$$\dot{P} \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} dx dy = \frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} = 0.$$

Y de esto se obtiene la segunda ecuación del sistema deseado:

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa} = 0. \quad (2.17)$$

- Ecuación correspondiente a la evolución del momento en x del momento de la onda

Una manera de obtener una ecuación más y que de esta manera cierre el sistema (debido a que tenemos tres incógnitas $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$) es considerar el momento en x del momento de la onda en todo \mathbb{R}^2 , siguiendo a [24]. Esta cantidad es

$$\int_{\mathbb{R}^2} x \frac{1}{2} u^2 dx dy.$$

Nuevamente despreciando a u_1^2 y $u_0 u_1$ con respecto a u_0^2 en todo el plano tendremos que el cambio de la cantidad de arriba es

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

Usamos ahora la conservación del momento en forma diferencial, ecuación (2.12), para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy \simeq - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y \right] dx dy.$$

O bien,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{0xy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

después de integrar por partes y tomar en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito. Evaluando cada una de las integrales de arriba, comenzamos con la integral correspondiente al momento en x del momento

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) \frac{1}{2} u_0^2 dx dy + \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy \\ &= \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy, \end{aligned}$$

la integral que contiene al factor $x - \xi$ en el integrando es cero debido a la imparidad del mismo, ya que la integral se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor del origen. La expresión resultante se evalúa sencillamente

$$\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} dx dy = \frac{\xi a^2}{2} \frac{\pi}{2\kappa} = \frac{\pi}{4} \frac{\xi a^2}{\kappa}.$$

Es necesario evaluar también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy,$$

para lo cual hacemos las sustituciones $u_{0x} = -2a\kappa(x-\xi)e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, $u_{0y} = -2a\kappa y e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$ y $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x-\xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, quedando entonces

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a^3}{3} e^{-3\kappa((x-\xi)^2+y^2)} + (4a^2\kappa^2(x-\xi)^2 - 2a^2\kappa) e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} 4a^2\kappa^2(x-\xi)^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} - \frac{1}{2} 4a^2\kappa^2 y^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^3}{3} \frac{\pi}{3\kappa} + 4a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} - 2a^2\kappa \frac{1}{2\kappa} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} \\
&\quad - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \\
&= \frac{\pi a^3}{9\kappa} + a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{2} - a^2 \Gamma(1/2)^2 - a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{4} - a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{4} = \frac{\pi a^3}{9\kappa} - \pi a^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de las integrales, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi \xi a^2}{4\kappa} = \frac{\pi a^3}{9\kappa} - \pi a^2,$$

de lo cual queda la tercera ecuación del sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa} = 4 \left(\frac{a^3}{9\kappa} - a^2 \right). \quad (2.18)$$

De esta manera, el sistema resultante que dicta la evolución de la onda principal es

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.19a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa} = 0, \quad (2.19b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa} - 4 \left(\frac{a^3}{9\kappa} - a^2 \right) = 0, \quad (2.19c)$$

que son las tres ecuaciones requeridas para las funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$.

De la ecuación (2.19b) se obtiene de inmediato

$$\frac{a^2}{\kappa} = \frac{a_0^2}{\kappa_0}, \quad (2.20)$$

donde $a_0 = a(0)$ y análogamente para $\kappa(t)$. Hemos llamado a κ la razón de decaimiento espacial, nombre que se entiende al razonar que para una mayor κ la onda Gaussiana se torna más angosta; entonces vemos que κ^{-1} es una medida del ancho de la onda principal. Escribiendo a la anterior ecuación como

$$a^2 \kappa^{-1} = a_0^2 \kappa_0^{-1}$$

vemos que κ^{-1} es inversamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda. En otras palabras, si la amplitud de la onda principal crece, su ancho disminuye y viceversa.

Por otro lado, usando (2.19b) y (2.19c) se obtiene

$$\frac{d\xi}{dt} = V = 4 \frac{\kappa}{a^2} \left(\frac{a^3}{9\kappa} - a^2 \right) = 4 \left(\frac{a}{9} - \kappa \right),$$

de esta manera, la velocidad de la onda coherente está dada por

$$V = 4 \left(\frac{a}{9} - \kappa \right). \quad (2.21)$$

Ahora utilizamos (2.21) en (2.19a), de lo que se obtiene

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} 4 \left(\frac{a}{9} - \kappa \right) - a\kappa^{1/2} = - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2},$$

es decir

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} = - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2}. \quad (2.22)$$

Tenemos ahora las dos ecuaciones (2.20) y (2.22) para las funciones del tiempo $a(t)$ y $\kappa(t)$. Estas ecuaciones se pueden resolver exactamente, cosa que haremos un poco más adelante. Primero es necesario usar (2.20) para obtener una ecuación de primer orden para $a(t)$:

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} = \frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \frac{d 1}{dt a} = - \frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \frac{\dot{a}}{a^2} = - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \frac{a_0}{\kappa_0^{1/2}} a + \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} a^2,$$

o bien, simplificando un poco

$$\dot{a} = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left[\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) - \frac{\kappa_0}{a_0^2} a \right] a^3. \quad (2.23)$$

La ecuación anterior la escribimos en forma general

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a \right) a^3, \quad (2.24)$$

introduciendo las constantes $\mu = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) > 0$ y $\nu = \frac{6}{5\pi^{1/2}} > 0$. Nótese que no es adecuado incluir a los factores de a_0 y κ_0 en las constantes μ y ν , ya que las condiciones iniciales de $a(t)$ y $\kappa(t)$ tienen gran influencia en la evolución de la onda principal. Debido a ello, para cada pareja de condiciones iniciales distintas, a_0 y κ_0 , tendremos en realidad

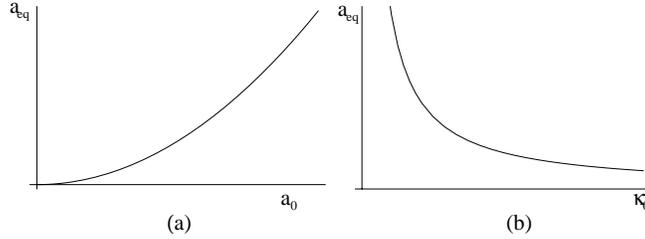


Fig. 2.11: Dependencia del punto de equilibrio a_{eq} con a_0 y κ_0 . En (a) se muestra a_{eq} como función de a_0 , para $\kappa_0 > 0$. Igualmente, en (b) se muestra a_{eq} como función de κ_0 , para $a_0 > 0$.

una ecuación diferencial diferente, no en la estructura que posee pero sí en sus parámetros libres. La ecuación (2.24) tiene las soluciones estacionarias $a = 0$ y $a = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \approx 0.04544 \frac{a_0^2}{\kappa_0}$. Tomando condiciones iniciales distintas para $a(t)$ y $\kappa(t)$, la solución de equilibrio $a = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$ es distinta para cada pareja de valores iniciales y por lo tanto no tendremos curvas solución que converjan todas a un mismo valor $\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$. Dicho de otra forma, cada curva tenderá a un valor de equilibrio distinto. De (2.24), se deduce que ocurre un cambio de concavidad al llegar a $\frac{3\mu}{4\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, pero no todas las curvas solución efectúan dicho cambio, como veremos más adelante.

Hacemos un análisis más detallado de las soluciones que resultan de (2.24). Escribimos dicha ecuación como

$$\dot{a} = \nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} \left(\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0} - a \right) a^3 \quad (2.25)$$

lo cual facilita el análisis. De la expresión de arriba se observa de inmediato que la solución de equilibrio no trivial ($a \neq 0$), $a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, crece cuadráticamente con a_0 y disminuye inversamente con κ_0 , tal como se muestra en la Fig. 2.11. Existe un punto especial que tiene el efecto de que la amplitud permanece constante siempre; es decir, el punto de equilibrio y la condición inicial coinciden, a éste lo llamamos a^* y se determina cuando $\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0} = a_0$, o bien si $a_0 = a^* \equiv \frac{\mu}{\nu} \kappa_0$.

Una vez visto lo anterior, identificamos tres comportamientos posibles para las soluciones de (2.24): (a) el primer tipo de comportamiento consta de soluciones siempre crecientes y que tienden asintóticamente al punto de equilibrio $a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, ésto ocurre cuando $\dot{a}(0) > 0$, o bien si $\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a(0) = \mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} > 0$. El caso (b) se compone de soluciones siempre decrecientes y que asintóticamente se aproximan a $a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$. Este caso ocurre si $\dot{a}(0) < 0$, o bien si $\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} < 0$. El último caso, (c), es el caso especial en que $\dot{a}(0) = 0$. De la ecuación diferencial (2.24) se llega a que $\dot{a} \equiv 0$, lo cual ocurre si $a_0 = a^*$ que es equivalente a $\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} = 0$. Ahora la onda principal viaja de manera que preserve su forma. Ver Fig. 2.12.

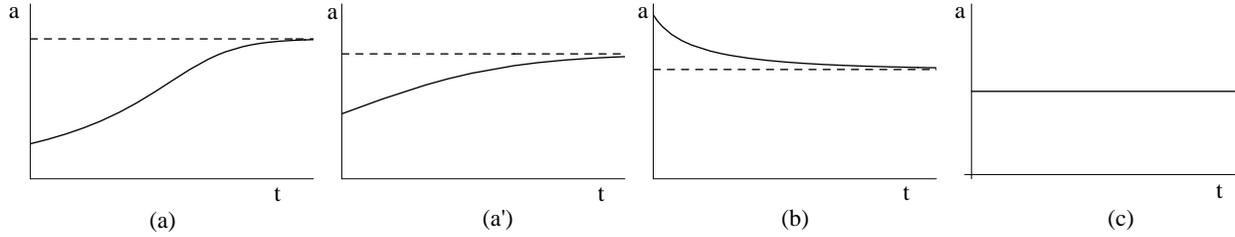


Fig. 2.12: Tipos de comportamiento posibles para las soluciones de (2.24). El caso (a) se divide en dos: aquellas soluciones que tienen cambio de concavidad y aquellas que no.

Es importante mencionar que en el caso (a) tenemos dos posibilidades, el de aquellas soluciones que efectúen un cambio de concavidad y aquellas que no. Para ver esto, calculamos \ddot{a} a partir de (2.24)

$$\ddot{a} = \nu^2 \frac{\kappa_0^3}{a_0^6} \left(\frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} - a \right) \left(3 \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} - 4a \right) a^5.$$

Los puntos $a = 0$ y $a = \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$ no representan cambios de concavidad ya que son ambos puntos de equilibrio. En cambio, como se mencionó antes, el punto $a = \frac{3\mu a_0^2}{4\nu \kappa_0}$ sí marca un cambio de concavidad de las soluciones. Debido a que está por debajo del punto de equilibrio, en el caso (a) la condición inicial puede ser de dos tipos: o bien se encuentra por debajo del punto de cambio de concavidad o por arriba de él. En el primer caso tendremos un cambio de concavidad, mientras que en el segundo no habrá tal.

Podría ahora preguntarse cómo son las soluciones de (2.24) si fijamos a κ_0 . Esto es equivalente a preguntarse: si tenemos a κ_0 fija y resolvemos a (2.24) numéricamente para varias condiciones iniciales distintas, graficándolas todas juntas, ¿qué clase de curvas se obtienen? Podemos entender lo que ocurre en esta situación con lo que hemos hecho ya, simplemente profundizando un poco en el análisis.

Lo primero es entender las condiciones bajo las cuales $a(t)$ crece o decrece. Esto se hace más sencillamente a partir de (2.25), notando que el factor $\left(\frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} - a \right)$ en $t = 0$, i.e. $\left(\frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} - a_0 \right)$, es quien determina esto. Si observamos la Fig. 2.13 vemos que este factor es negativo entre $0 < a_0 < \frac{\nu}{\mu} \kappa_0$, por lo que tendremos soluciones decrecientes. En cambio para $\frac{\nu}{\mu} \kappa_0 < a_0$, dicho factor es positivo y las soluciones son por lo tanto crecientes. Visualizando las soluciones en la Fig. 2.13, en el primero caso, la amplitud de la onda parte de la recta $a = a_0$ y se mueve verticalmente hacia abajo hasta alcanzar la parábola $a = \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$ en un tiempo infinito. En el segundo caso, para $\frac{\nu}{\mu} \kappa_0 < a_0$, la amplitud se mueve verticalmente hacia arriba e igualmente se aproxima a la parábola $a = \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$ asintóticamente. De esta manera, la recta vertical $a_0 = \frac{\nu}{\mu} \kappa_0$ separa a las soluciones decrecientes de las crecientes.

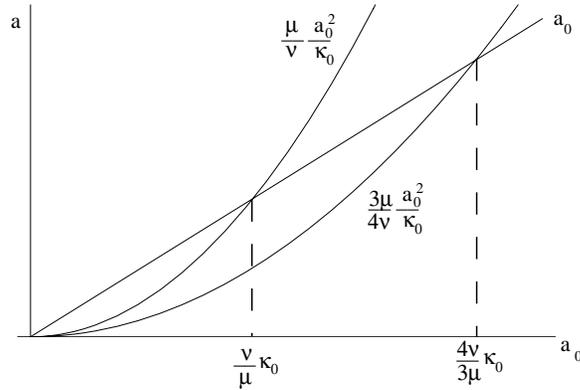


Fig. 2.13: Gráfica de las funciones a_0 junto con $\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$ y $\frac{3\mu}{4\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$.

Consideramos ahora la concavidad de las soluciones. Sabemos ya que el cambio de concavidad se da en $a = \frac{3\mu}{4\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, función que se muestra también en la Fig. 2.13. De esa figura concluimos de inmediato que las curvas que inician entre $0 < a_0 < \frac{\nu}{\mu} \kappa_0$ o entre $\frac{\nu}{\mu} \kappa_0 < a_0 < \frac{4\nu}{3\mu} \kappa_0$ no tienen un cambio de concavidad ya que en la evolución vertical de $a(t)$ se llega antes al punto de equilibrio que al cambio de concavidad. Por otro lado, si la amplitud inicia en $\frac{4\nu}{3\mu} \kappa_0 < a_0$, entonces al moverse verticalmente la amplitud en la Fig. 2.13 pasará por la curva del cambio de concavidad antes de llegar a la curva que marca el punto de equilibrio: tendremos en este caso un cambio de concavidad.

Con el conocimiento recién adquirido, podemos construir gráficas de las soluciones. En la Fig. 2.14 se muestran las soluciones de manera esquemática, tomando a κ_0 como constante. Tenemos el punto especial $a^* = \frac{\nu}{\mu} \kappa_0$, si la condición inicial es justo ésta, entonces la amplitud permanece constante. La recta horizontal $\frac{4\nu}{3\mu} \kappa_0$ separa a las curvas que tienen cambio de concavidad de aquéllas en las que no ocurre, todas las soluciones por arriba de dicho punto llevan a cabo un cambio de concavidad, como se dedujo en el análisis previo. Se observa también cómo cada curva tiene un punto de equilibrio distinto, dado por $a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$. Además de la figura antes explicada, usando *Mathematica* se realiza una gráfica donde se muestran soluciones numéricas para $a(t)$ y diversas condiciones iniciales, ver Fig. 2.15.

También es posible estudiar la evolución de $a(t)$ desde otro punto de vista, variando a κ_0 . Escogemos $\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0} = 1$ de manera que $\kappa_0 = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) a_0^2$ y variamos a_0 . En la Fig. 2.18 se muestran soluciones con distintas condiciones iniciales escogiendo a κ_0 de esta manera.

Nuestro sistema de ecuaciones que aproxima⁴ la evolución de la onda principal $u_0(x, y, t)$ por lo tanto predice que toda onda con la forma propuesta para u_0 tendrá una amplitud que

⁴Es importante recordar que esta es una aproximación que ignora a la radiación, la consideración de ésta llevará a resultados muy distintos.

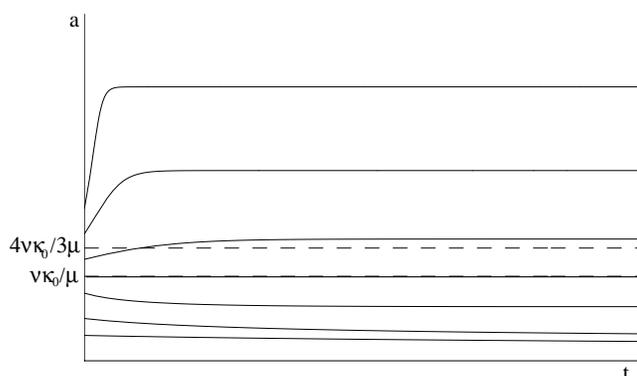


Fig. 2.14: Forma esquemática de las soluciones de (2.24). El punto $\frac{\nu}{\mu}\kappa_0$ es el punto de equilibrio mientras que $\frac{4\nu}{3\mu}\kappa_0$ es el punto que separa las curvas que tienen cambio de concavidad de aquéllas en las que no ocurre, todas las soluciones por arriba de dicho punto llevan a cabo un cambio de concavidad.

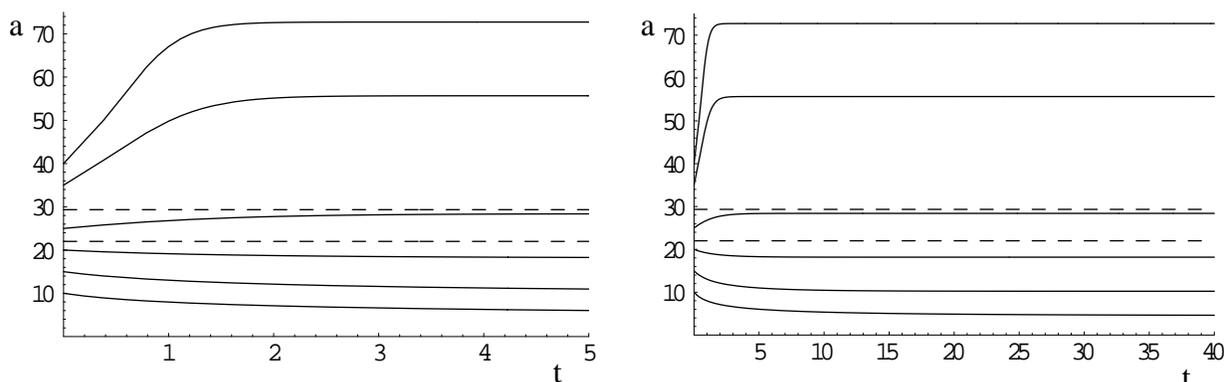


Fig. 2.15: Soluciones de (2.24) para $\mu = 0.03077$, $\nu = 0.67703$ y $\kappa_0 = 1$ con condiciones iniciales $a_0 = 10, 15, 20, 25, 35$ y 40 , para dos escalas de tiempo distintas, lo que permite apreciar la razón de cambio de las diferentes soluciones. La línea punteada de abajo representa la solución estacionaria $\frac{\nu}{\mu}\kappa_0 = \frac{\nu}{\mu}$, mientras que la segunda en $\frac{4\nu}{3\mu}\kappa_0 = \frac{4\nu}{3\mu}$ representa el cambio de comportamiento entre soluciones que tienen un cambio de concavidad y aquéllas que no lo tienen.

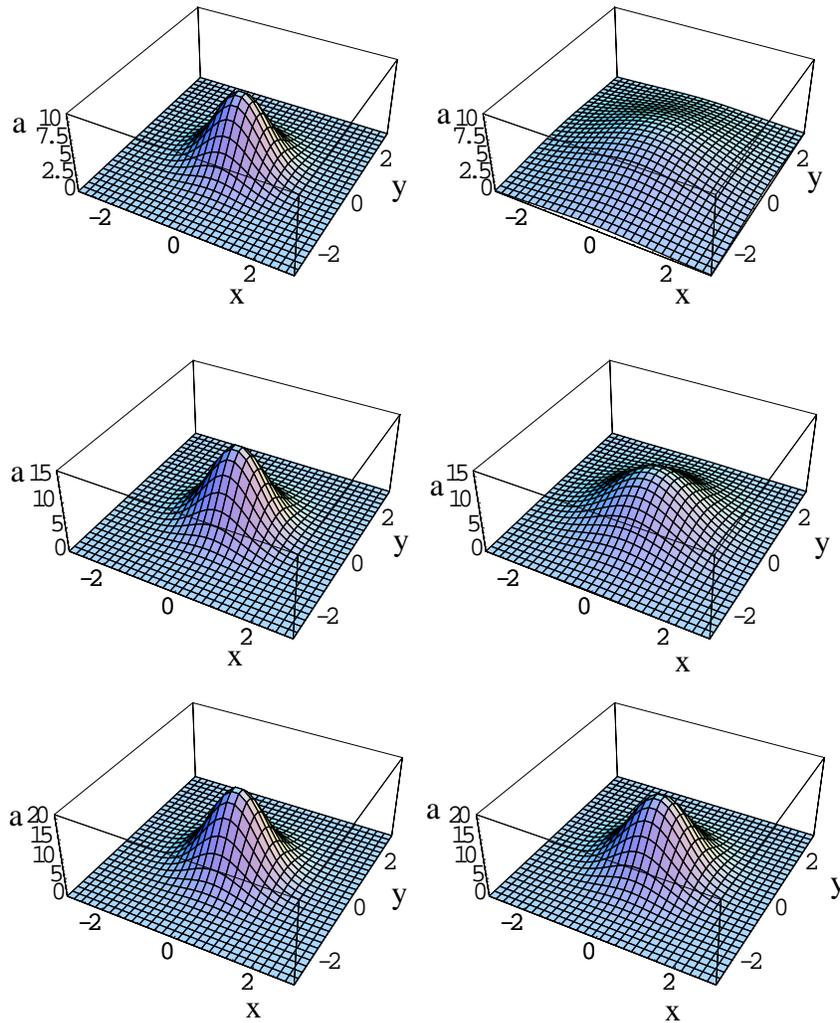


Fig. 2.16: Usando las mismas condiciones iniciales que en la Fig. 2.15, mostramos la evolución de las ondas Gaussianas que disminuyen su amplitud después de un tiempo infinito. La primera figura de cada pareja representa la onda solitaria al tiempo cero, con condiciones iniciales $a_0 = 10, 15$ y 20 . La segunda figura de cada pareja representa la evolución de cada onda después de llegar al equilibrio, cuando transcurre un tiempo infinitamente grande.

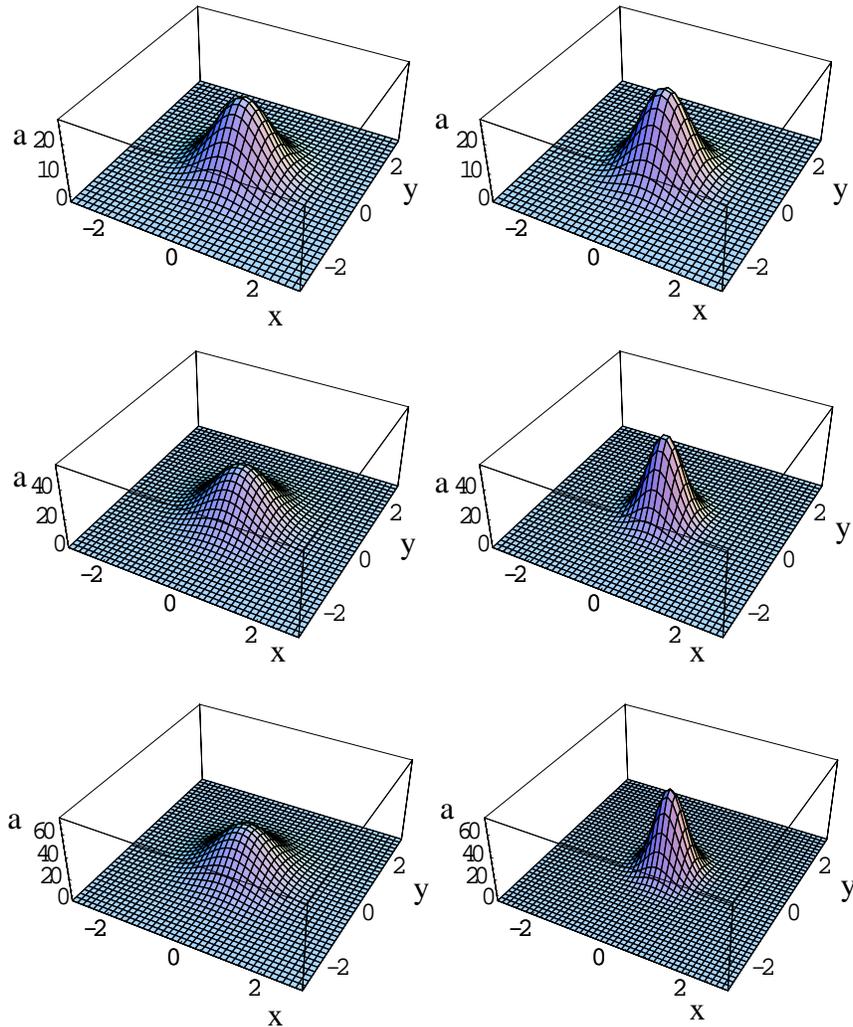


Fig. 2.17: Usando las mismas condiciones iniciales que en la Fig. 2.15, mostramos la evolución de las ondas Gaussianas que aumentan su amplitud después de un tiempo infinito. La primera figura de cada pareja representa la onda solitaria al tiempo cero, con condiciones iniciales $a_0 = 25, 35$ y 40 . La segunda figura de cada pareja representa la evolución de cada onda después de llegar al equilibrio, cuando transcurre un tiempo infinitamente grande.

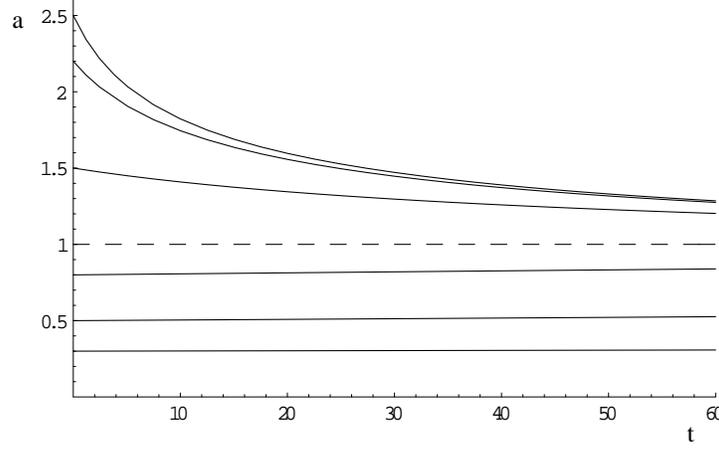


Fig. 2.18: Soluciones de (2.24) para las condiciones iniciales $a_0 = 0.3, 0.5, 0.8, 1.5, 2$ y 2.5 , escogiendo $\kappa_0 = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) a_0^2$ en cada caso y en dos escalas de tiempo distintas, para apreciar la razón de cambio de cada curva. El escoger a κ_0 de esta manera tiene el efecto de que el punto de equilibrio sea el mismo para todas las curvas.

se aproximará a $a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \approx 0.04544 \frac{a_0^2}{\kappa_0}$ y una razón de decaimiento espacial que tienda a $\kappa_{\text{eq}} = \frac{\mu^2}{\nu^2} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \approx 0.002065 \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, de manera que $\kappa_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} a_{\text{eq}}$. Así mismo, la velocidad tenderá al valor constante $V_{\text{eq}} = 4 \left(\frac{a_{\text{eq}}}{9} - \kappa_{\text{eq}}\right) = 4 \frac{\mu}{\nu} \left(\frac{1}{9} - \frac{\mu}{\nu}\right) \frac{a_0^2}{\kappa_0} = 4 \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{9}\right) \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) \frac{a_0^2}{\kappa_0} \approx 0.01193 \frac{a_0^2}{\kappa_0}$; la onda u_0 adoptará por ello un comportamiento de tipo solitón⁵ sin importar las condiciones iniciales. Es interesante notar que los tres valores de equilibrio, a_{eq} , κ_{eq} y V_{eq} , son todos proporcionales a la cantidad a_0^2/κ_0 .

Usando a (2.23), podemos escribir también la ecuación que obedece $\kappa(t)$. Esta es

$$\dot{\kappa} = \frac{12}{5\pi^{1/2}} \left[\frac{a_0}{\kappa_0^{1/2}} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) - \kappa^{1/2} \right] \kappa^2. \quad (2.26)$$

Así mismo, usando la misma notación que en la (2.24) podemos escribir a (2.26) como

$$\dot{\kappa} = 2 \left[\frac{a_0}{\kappa_0^{1/2}} \mu - \nu \kappa^{1/2} \right] \kappa^2.$$

⁵No se le puede llamar solitón propiamente, ya que falta aún ver qué pasa después de la interacción con otra onda similar, es necesario que cada onda conserve su identidad durante un choque. Solamente se hace notar que la onda principal adquiere una forma y velocidad que no cambian, tal como ocurre con las ondas solitarias.

La ecuación (2.24) se puede resolver de manera exacta, aunque implícita para la función $a(t)$. Proseguimos en este momento con dicha tarea y separamos en fracciones parciales

$$1 = \frac{\dot{a}}{\left(\mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} - \nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a\right) a^3} = \dot{a} \left(\frac{\kappa_0^{3/2} \nu^2}{a_0^3 \mu^3} \frac{1}{a} + \frac{\kappa_0^{1/2} \nu}{a_0 \mu^2} \frac{1}{a^2} + \frac{a_0}{\kappa_0^{1/2} \mu} \frac{1}{a^3} + \frac{\kappa_0^3 \nu^3}{a_0^6 \mu^3} \frac{1}{\left(\mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} - \nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a\right)} \right),$$

obteniendo así algo que se integra fácilmente. De ello resulta

$$t = \frac{\kappa_0^{3/2} \nu^2}{a_0^3 \mu^3} \ln \frac{a}{a_0} - \frac{\kappa_0^{1/2} \nu}{a_0 \mu^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) - \frac{a_0}{2\kappa_0^{1/2} \mu} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) - \frac{\kappa_0^3 \nu^2}{a_0^6 \mu^3} \ln \frac{\nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a - \mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0}}{\nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a_0 - \mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0}}. \quad (2.27)$$

De lo anterior vemos que si $a = a_0$ entonces necesariamente $t = 0$, mientras que si $a \rightarrow \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$ entonces $t \rightarrow \infty$; sin importar las condiciones iniciales, la amplitud siempre tiende a la cantidad $\frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$. De esto podemos obtener también una solución implícita para $\kappa(t)$. Sustituyendo $a = a_0 \kappa^{1/2} / \kappa_0^{1/2}$, tenemos

$$t = \frac{\kappa_0^{3/2} \nu^2}{2a_0^3 \mu^3} \ln \frac{\kappa}{\kappa_0} - \frac{\kappa_0^{1/2} \nu}{a_0 \mu^2} \left(\frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0 \kappa^{1/2}} - \frac{1}{a_0} \right) - \frac{a_0}{2\kappa_0^{1/2} \mu} \left(\frac{\kappa_0}{a_0^2 \kappa} - \frac{1}{a_0^2} \right) - \frac{\kappa_0^3 \nu^2}{a_0^6 \mu^3} \ln \frac{\nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a_0 \frac{\kappa^{1/2}}{\kappa_0^{1/2}} - \mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0}}{\nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} a_0 - \mu \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0}}.$$

Notamos que no es fácil obtener información a partir de dichas soluciones. Para entender el comportamiento de $a(t)$, analizaremos la ecuación (2.24) desde otra perspectiva, calculando los tiempos característicos de cambio en la función $a(t)$. Es posible calcular dos tiempos, aquél que corresponde a la razón de cambio cerca de $t = 0$, cuando $a = a_0$ y por otro lado aquél que corresponde al caso en que $a \simeq \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$, para tiempos largos.

Esperamos que cuando a esté cerca de $\frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$, la tasa de cambio sea pequeña; esto es, el tiempo característico de este cambio es largo. Calculamos este tiempo ahora. Cuando $a \approx \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a^3 \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a \right) = -\nu \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} \left\{ \frac{\mu^3 a_0^6}{\nu^3 \kappa_0^3} + 3 \frac{\mu^2 a_0^4}{\nu^2 \kappa_0^2} \left(a - \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} \right) + \dots \right\} \left(a - \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} \right) \\ &\approx -\frac{\mu^3 a_0^3}{\nu^2 \kappa_0^{3/2}} \left(a - \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} \right) \end{aligned}$$

y entonces

$$a - \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} \approx \left(a'_0 - \frac{\mu a_0^2}{\nu \kappa_0} \right) e^{-\frac{\mu^3 a_0^3}{\nu^2 \kappa_0^{3/2}} (t-t_0)}.$$

Donde a'_0 es el valor de a al tiempo t_0 , el cual es un tiempo positivo y grande, de manera que sin importar el valor de $a(0) = a_0$, la cantidad $a(t_0) = a'_0$ está cerca de $\frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$ y el desarrollo en Taylor de la ecuación diferencial se justifica.

Si la cantidad $\frac{\mu^3 a_0^3}{\nu^2 \kappa_0^{3/2}}$ es grande, el decaimiento dado por la anterior ecuación es rápido y entonces el tiempo característico asociado es corto. En la situación inversa, si $\frac{\mu^3 a_0^3}{\nu^2 \kappa_0^{3/2}}$ es chico, entonces el tiempo asociado es grande. Conviene entonces definir al tiempo característico de cambio, en el caso $a \approx \frac{\mu}{\nu} \frac{a_0^2}{\kappa_0}$, como:

$$T_{\text{largo}} = \frac{\nu^2 \kappa_0^{3/2}}{\mu^3 a_0^3} = \frac{5\pi^{1/2}}{6} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^{-3} \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3} \simeq 15,737 \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^3}.$$

Donde se verifica lo prolongado de este periodo de tiempo, al menos en el caso en que a_0 y κ_0 son $O(1)$.

El otro tiempo característico corresponde a la razón de cambio cerca de $t = 0$, de manera que $a \simeq a_0$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a^3 \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a \right) = (a_0^3 + 3a_0^2(a - a_0) + \dots) \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a_0 - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} (a - a_0) \right) \\ &\approx \kappa_0^{1/2} a_0^2 \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} \right) + a_0 \kappa_0^{1/2} \left(3\mu - 4\nu \frac{\kappa_0}{a_0} \right) (a - a_0). \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$a - a_0 \approx a_0 \frac{\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0}}{3\mu - 4\nu \frac{\kappa_0}{a_0}} \left(e^{a_0 \kappa_0^{1/2} \left\{ 3\mu - 4\nu \frac{\kappa_0}{a_0} \right\} t} - 1 \right).$$

De lo anterior se sigue que cerca de $t = 0$ tengamos

$$a - a_0 \approx a_0^2 \kappa_0^{1/2} \left(\mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} \right) t,$$

por lo que el tiempo corto, correspondiente al cambio cerca de $t = 0$ es

$$T_{\text{corto}} = \frac{1}{a_0^2 \kappa_0^{1/2} \left| \mu - \nu \frac{\kappa_0}{a_0} \right|} = \frac{5\sqrt{\pi}}{6a_0 \kappa_0^{1/2} \left| \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) a_0 - \kappa_0 \right|} \simeq \frac{1.477}{a_0 \kappa_0^{1/2} |0.045 a_0 - \kappa_0|}.$$

Se verifica entonces que para a_0 y κ_0 que sean $O(1)$, $T_{\text{corto}} \ll T_{\text{largo}}$, de hecho $T_{\text{corto}} \sim 1.5$ y $T_{\text{largo}} \sim 16,000$. En la Fig. 2.15 se muestra una gráfica de las soluciones elaborada con *Mathematica* para $\mu = \nu = 1$ y diversas condiciones iniciales. En ella se pueden apreciar las escalas de tiempo involucradas en el cambio de la función $a(t)$.

Resultados Numéricos I

Si uno resuelve numéricamente la ecuación ZK con una condición inicial Gaussiana del tipo $a_0 e^{-\kappa_0((x-\xi_0)^2+y^2)}$ (siendo constantes las cantidades con subíndice cero) para casi cualquiera de éstas se verá que la onda cambia bruscamente de tamaño, ya sea creciendo en amplitud o bien el caso contrario. En el análisis precedente hemos obtenido que esto es justamente lo esperado excepto cuando la condición inicial es cercana a la cantidad a^* , en cuyo caso el valor de equilibrio es cercano al inicial y entonces el cambio no es tan brusco. Tenemos que $a^* = \frac{\nu}{\mu} \kappa_0 \approx 22.004\kappa_0$, de manera que si se desea que una onda con perfil inicial Gaussiano evolucione de manera lenta al ser gobernada por ZK, debemos pedir $a_0 \approx 22\kappa_0$. Esto representa una onda Gaussiana con proporciones muy dispares y dificulta la resolución numérica de la ecuación. Es por ello que para estos propósitos conviene cambiar de escala en la ecuación ZK y escribirla como

$$u_t + \delta u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0.$$

Con esta modificación, la ecuación para $a(t)$ queda

$$\dot{a} = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left[\delta \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) - \frac{\kappa_0}{a_0^2} a \right] a^3. \quad (2.28)$$

El punto de equilibrio ahora es

$$a_{\text{eq}} = \frac{\mu}{\nu} \delta \frac{a_0^2}{\kappa_0}$$

y el punto especial a^* se modifica de acuerdo a

$$a^* = \frac{1}{\delta} \frac{\nu}{\mu} \kappa_0.$$

Esto motiva a tomar $\delta = 6$ de manera que la ecuación ZK tome la forma

$$u_t + 6u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

y de esta manera sea una generalización de la forma estándar en que se escribe a la ecuación de Korteweg-de Vries

$$u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0.$$

El punto a^* queda entonces

$$a^* \approx 3.66\kappa_0$$

lo cual provee de una escala más similar entre $a(t)$ y $\kappa(t)$ para facilitar el análisis numérico de la ecuación, que ahora se discute.

La ecuación ZK en la forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

fue resuelta numéricamente por el doctor N. F. Smyth, quien proporcionó los datos numéricos para su estudio. Utilizó una condición inicial Gaussiana del tipo mencionado con $a_0 = 0.5$ y $\kappa_0 = 0.05$, siguió su evolución en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = 15$. De hecho, los puntos en el intervalo temporal entre 14 y 15 se deshechan, debido a que las condiciones de frontera (a distancia finita) que se usan por simplicidad en la solución numérica empiezan a mostrar sus efectos y producen oscilaciones a partir de ese punto. El fenómeno que se desea entender no tiene fronteras finitas y por ello esos puntos son indeseables. Es posible hallar la amplitud de la onda a partir de esta solución y este será nuestro principal indicador para comparar con el sistema de ecuaciones obtenido. Igualmente, el doctor N. F. Smyth también resolvió numéricamente con $a_0 = 1$ y $\kappa_0 = 0.05$ aunque en este caso la onda inicial tiene demasiada masa y eso produce problemas que serán evidentes en un momento más.

Comparamos ahora el resultado arrojado por esta solución numérica con la que se obtiene de resolver (2.28) (con $\delta = 6$) mediante *Mathematica* tomando $a_0 = 0.5$ y $\kappa_0 = 0.05$ en ambos casos. Se muestra una gráfica de la solución numérica de ZK sobrepuesta a una solución numérica de nuestra ecuación para la amplitud. Ver Fig. 2.19. La anterior comparación es suficiente para hacer notar que el ajuste no es bueno; en el segundo caso, $a_0 = 1$ y $\kappa_0 = 0.05$ la comparación no se muestra y de hecho la diferencia es mayor aún.

De dicha figura se observa que *no* hay una buena comparación: la solución para $a(t)$ brindada por el sistema de ecuaciones crece demasiado lenta comparada con la solución numérica hallada directamente de la ecuación ZK. Para notar esto se muestra la evolución de ambas soluciones en dos escalas de tiempo distintas. Debe recordarse que la solución numérica de ZK se hace en un intervalo de tiempo entre 0 y 14 por lo que en la gráfica de la derecha de la Fig. 2.19 no se continúa esta solución más allá del intervalo de solución. Sin embargo, para un tiempo $t \approx 14$ la solución numérica ha llegado esencialmente al equilibrio y puede suponerse que permanezca ahí para tiempos mayores. La comparación entre puntos de equilibrio no es tan mala, para la solución numérica está en 1.28, mientras que el sistema de ecuaciones ordinarias produce un punto de equilibrio $a_{\text{eq}} = 1.36$; es decir, se tiene un error de 0.08.

Mostramos ahora otro tipo de gráficas de la solución numérica de ZK, todas ellas proporcionadas por el doctor N. F. Smyth. En la Fig. 2.20 se muestra la condición inicial de la simulación numérica, i.e. $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$, mientras que en la Fig. 2.21 se muestra el resultado de la simulación numérica en $t = 15$. Nótese la radiación cedida por la onda principal, la cual se encuentra en una región aparentemente triangular detrás de la misma y tiene una amplitud bastante menor.

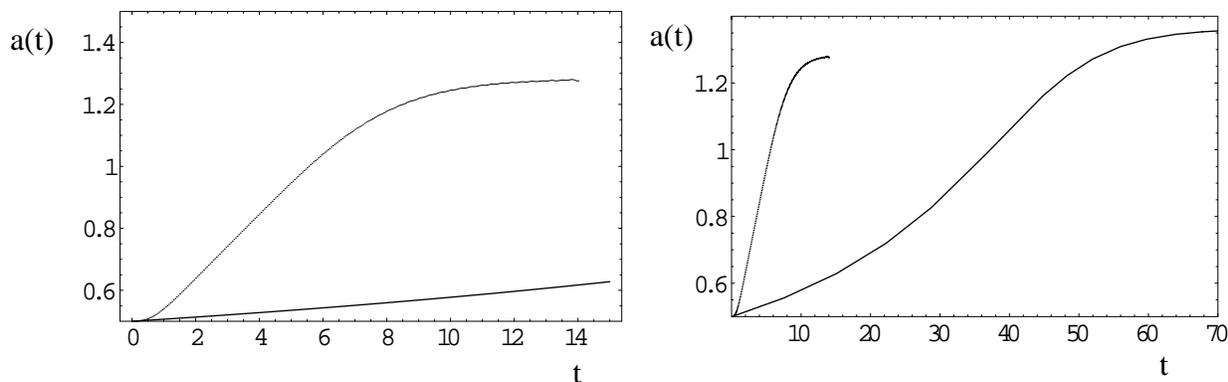


Fig. 2.19: Comparación de la amplitud de la solución numérica de ZK (—) con la solución numérica del sistema de ecuaciones (—) obtenido a partir de las leyes de conservación, sin tomar en cuenta la radiación. Se utiliza $a_0 = 0.5$, $\kappa_0 = 0.05$ y $\delta = 6$. Se toman dos escalas distintas con la finalidad de comparar las escalas de tiempo asociadas a cada curva.

En la Fig. 2.22 se muestran cortes en el plano $y = 0$ de la solución numérica a los tiempos $t = 0$ y $t = 15$, donde se aprecia claramente el avance de la onda principal después de ese periodo de tiempo. En esta gráfica resulta más sencillo notar la diferencia de amplitud entre la radiación y la onda principal, aunque la amplitud máxima de la radiación no está en el plano $y = 0$, como se observa en la Fig. 2.21.

Mostramos ahora un conjunto de gráficas correspondientes a una condición inicial Gaussiana con amplitud distinta. Esta vez se simula numéricamente arrancando con $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$, es decir, una onda con el doble de amplitud y misma κ_0 . En la Fig. 2.23 se muestra la condición inicial, mientras que en la Fig. 2.24 se muestra la evolución después de 10 unidades de tiempo. En esta última figura es posible observar que la amplitud de la radiación es mucho mayor esta vez y de hecho aparentemente se forman ondas principales secundarias, las cuales podrían adquirir una forma permanente. Finalmente, en la Fig. 2.25 se muestra un corte en el plano $y = 0$ de este caso, mostrando tanto el corte en $t = 0$ como aquél en $t = 10$; aquí nuevamente es más sencillo apreciar el avance de la onda, así como la comparación entre la amplitud (otra vez, la amplitud máxima de la radiación no se sitúa en el plano $y = 0$) de la radiación y la onda principal, teniendo esta última apenas unas tres veces la altura de la radiación que se observa en este corte.

Para concluir, debemos mencionar que el método de modulación de soluciones en dos dimensiones fue deficiente en el caso en que se ignora la radiación; la comparación de la amplitud de la solución numérica de ZK y la amplitud obtenida del sistema de ecuaciones no es favorable, aunque la diferencia en los puntos de equilibrio no es mala. La gran diferencia hallada entre la solución numérica y el sistema de ecuaciones ordinarias no es de sorprenderse,

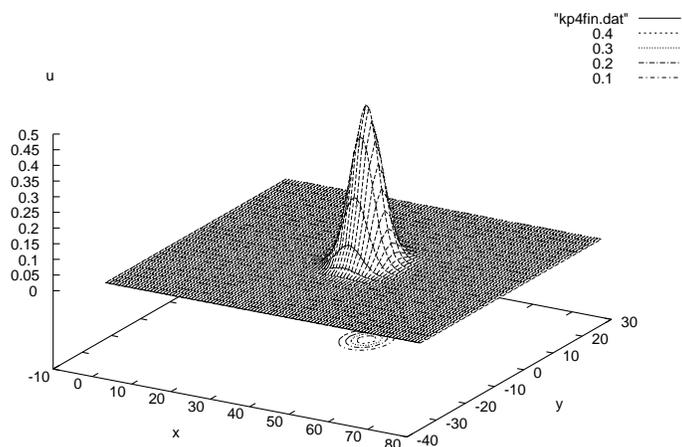


Fig. 2.20: Condición inicial de la simulación numérica $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

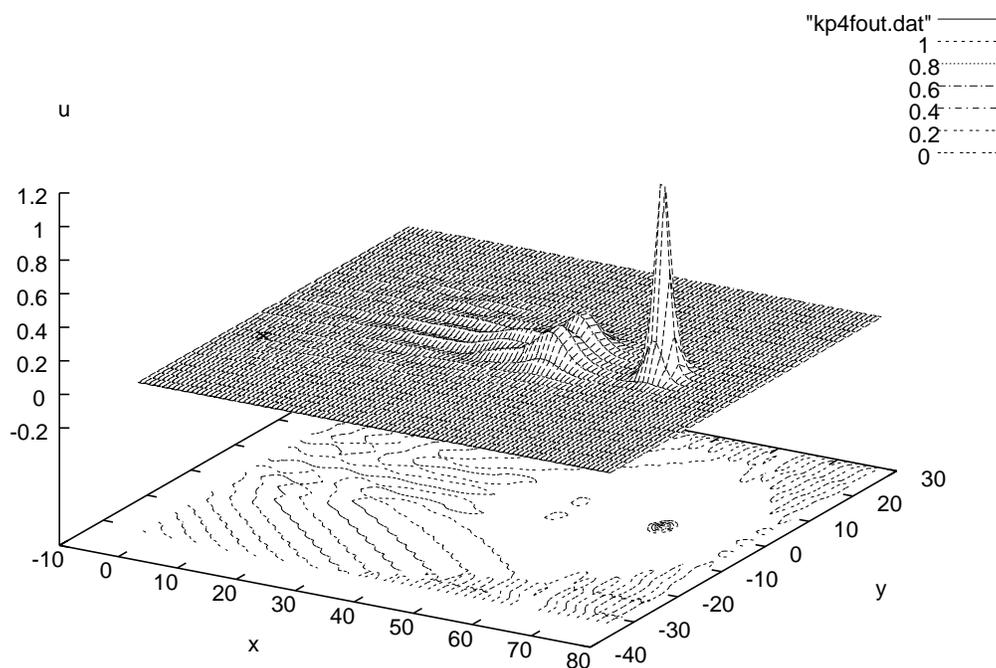


Fig. 2.21: Simulación numérica después de 15 unidades de tiempo, comenzando en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2 + y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

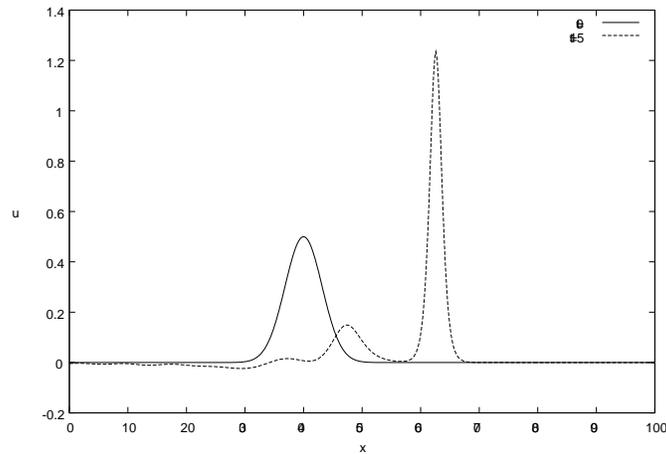


Fig. 2.22: Corte en $y = 0$ de la simulación numérica mostrando la condición inicial y también el resultado después de 15 unidades de tiempo. Se comienza en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = 0.5e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

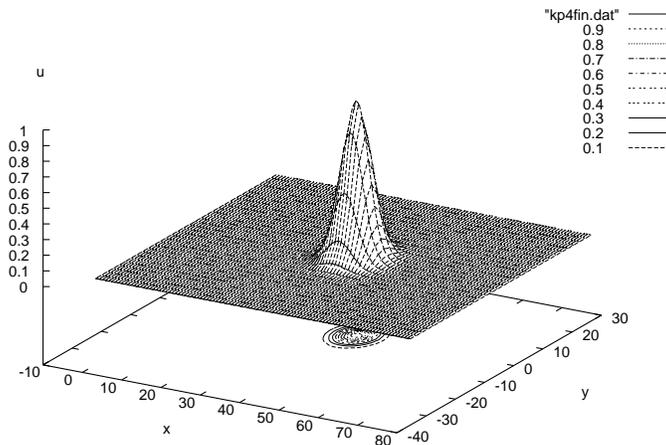


Fig. 2.23: Condición inicial de la simulación numérica $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

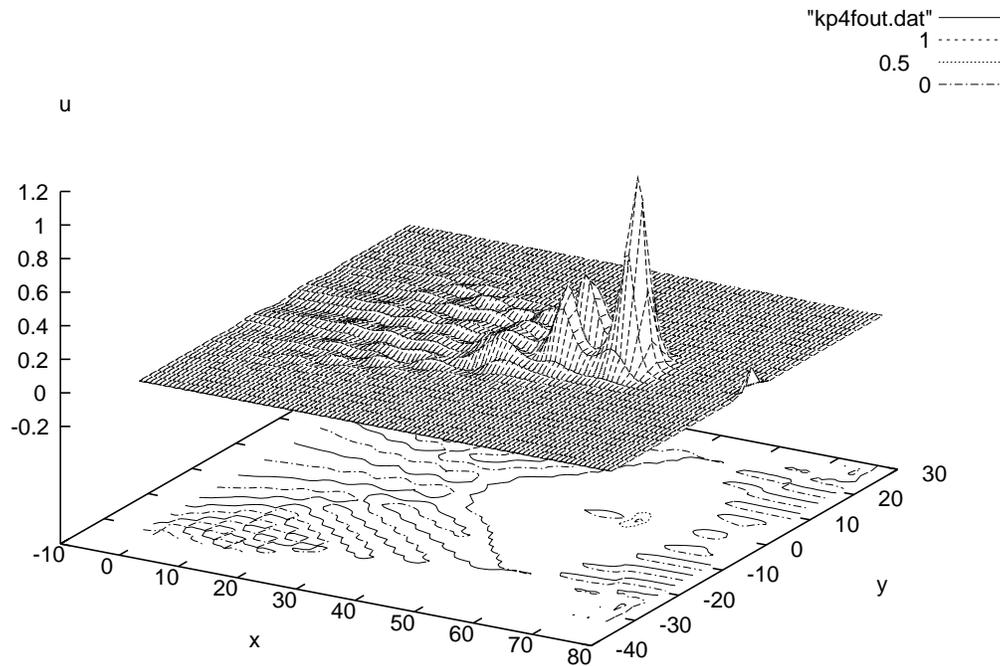


Fig. 2.24: Simulación numérica después de 10 unidades de tiempo, comenzando en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

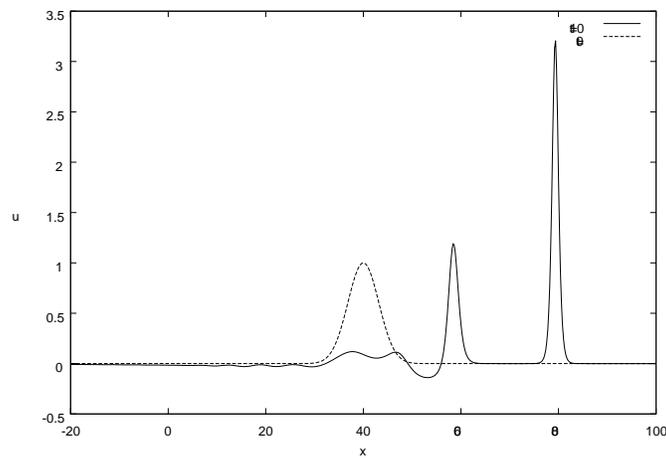


Fig. 2.25: Corte en $y = 0$ de la simulación numérica mostrando la condición inicial y también el resultado después de 10 unidades de tiempo. Se comienza en $t = 0$ con $u_0(x, y, 0) = e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

ya que dicho sistema se encontró mediante una simplificación extrema del problema; en otras palabras, la radiación cedida por la onda principal es parte fundamental de su evolución y no es fácil despreciarla. En la siguiente sección se toma en cuenta la radiación que se desprende de la onda principal, lo cual nos proporcionará un nuevo sistema de ecuaciones que en principio modelará de forma más realista la evolución de la onda principal.

Sistema de ecuaciones al tomar en cuenta a la radiación

Para obtener un sistema de ecuaciones que aproxime la evolución de la onda coherente de una mejor manera, es necesario tomar en cuenta a la radiación. Nos basamos nuevamente en las leyes de conservación, pero esta vez no despreciaremos a u_1 con respecto a u_0 en la región entre las cústicas. Más adelante será necesario hacer una suposición acerca de la forma de u_1 que nos permita incorporar a la radiación a través de la presencia de nuevos parámetros en el sistema de ecuaciones. Consideramos primero la conservación de la masa, proseguimos después con la conservación del momento y finalmente con el momento en x del momento de la onda, siguiendo así el mismo orden que cuando se ignoró a la radiación.

- Ecuaciones correspondientes a la conservación de masa

Para el caso en que se incorpora el efecto de la radiación sobre la evolución de la onda principal, obtendremos dos ecuaciones a partir de la conservación de masa. La primera ecuación se obtuvo ya antes y se basa en que sabemos que la radiación está confinada entre las cústicas. Dicha ecuación se obtuvo integrando la forma diferencial de la conservación de masa fuera de las cústicas, en la región que antes llamamos $\Gamma(t)$, despreciando a u_1 con respecto a u_0 .

La segunda ecuación que se utilizará consiste en considerar la conservación de la masa en todo \mathbb{R}^2 , tal como se muestra ahora. De la conservación de masa sabemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = 0,$$

por lo que si escribimos a $u(x, y, t)$ como $u = u_0 + u_1$ tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx dy + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx dy = \frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + \frac{dM_1}{dt} = 0,$$

si llamamos M_1 a la masa total de u_1 , i.e. la integral de dicha función en todo \mathbb{R}^2 . De esta manera la conservación de masa nos proporciona el par de ecuaciones

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.29a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + \frac{dM_1}{dt} = 0. \quad (2.29b)$$

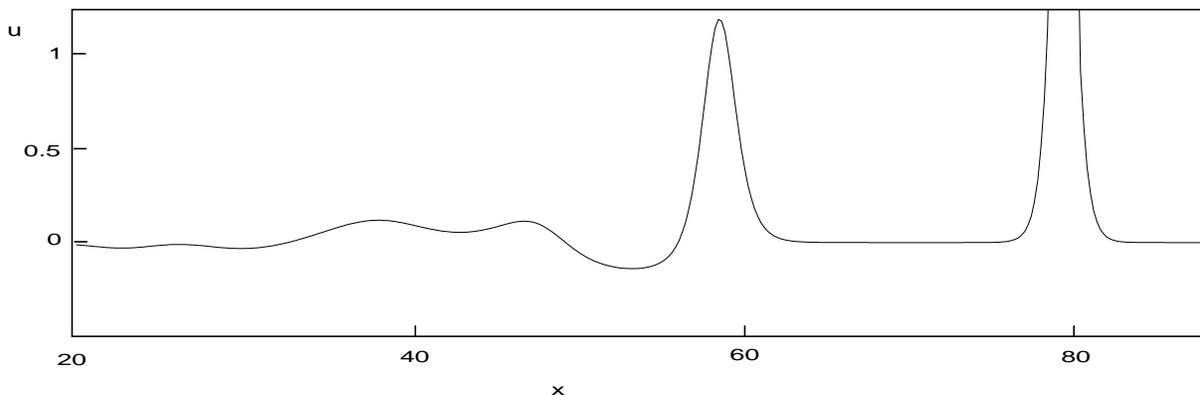


Fig. 2.26: Corte en el plano $y = 0$ al tiempo $t = 10$ de la simulación numérica para la condición inicial $e^{-0.05((x-40)^2+y^2)}$. La estructura que posee la radiación es clara en este aumento. Cortesía del doctor N. F. Smyth.

Vemos entonces que el incorporar a la radiación en la conservación de masa introduce un nuevo parámetro, la masa total de la radiación M_1 .

La radiación cedida por la onda principal, confinada entre las cáusticas, tendrá en general una forma muy complicada. Esto nos obliga a aproximarla por una función que pueda manipularse más fácilmente; en particular, nos gustaría poder evaluar la masa total M_1 . Mostramos una ampliación de la Fig. 2.25, donde se observa mejor la radiación cedida por la estructura coherente, ver Fig. 2.26.

En esa figura se observa que hay zonas donde la radiación forma una estructura casi plana, lo que en este contexto se conoce como *'flat shelf'* en inglés y adoptaremos el término de plataforma en español. Por esta evidencia numérica, se hace la suposición de que la radiación se acumula formando una región plana en su totalidad, con un cierto valor distinto de cero. Supondremos que esta estructura se forma justo detrás de la onda principal y entre las cáusticas; además, se mueve de manera rígida con ella. La evolución de la onda principal tendrá el aspecto del avance de una estructura acampanada, con una estructura plana adherida detrás de ella.

Consideramos entonces que el *flat shelf* se forma en una región entre las cáusticas y que tiene por frontera a una curva $C(t)$; consideramos que esta estructura avanza a la misma velocidad que la onda principal, esto es, a la velocidad $V(t)$. Ver Fig. 2.27. A la región por delante de esta estructura plana la llamamos $R(t)$ y calculamos ahora el cambio de la masa en dicha región. Si escribimos a la curva $C(t)$ como $x = \tilde{x}(y, t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} u dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} u_t dx dy - V \int_{-\infty}^{\infty} u \Big|_{x=\tilde{x}(y,t)} dy$$

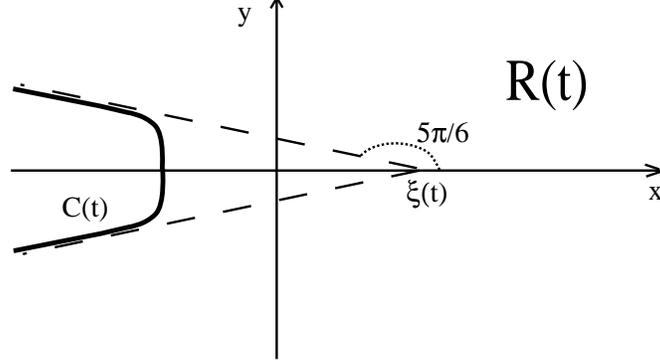


Fig. 2.27: La región $R(t)$, cuya frontera es la curva continua $C(t)$. Se muestran también las caústicas con líneas punteadas.

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y \right] dx dy - V \int_{C(t)} u dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} + u_{yy} \right) \Big|_{x=\tilde{x}(y,t)} dy - V \int_{C(t)} u dy \\
 &= \int_{C(t)} \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} + u_{yy} \right) dy - V \int_{C(t)} u dy,
 \end{aligned}$$

después de utilizar que u satisface la ecuación ZK.

Por tratarse de una estructura plana, tomamos a $u = u_{\infty} = cte.$ sobre una porción de la curva $C(t)$ (sobre la porción de $C(t)$ que es paralela al eje y) y detrás de ella. No podemos exigir que u sea constante en toda la región atrás de la curva $C(t)$ (ni tampoco sobre la curva completa) ya que debe decaer a cero en infinito. Además, tomaremos $|u_{\infty}| \ll 1$ y también $|u_{xx}| \ll 1$, $|u_{yy}| \ll 1$ sobre dicha curva. Si consideramos que $u = u_{\infty}$ sobre la porción de $C(t)$ que es paralela al eje y y que tiene longitud l , tendremos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy \approx -V \int_{C(t)} u dy \approx -V l u_{\infty},$$

donde l es un parámetro que no puede determinarse hasta el momento y toma el papel de una incógnita.

Podemos hacer algunas aproximaciones adicionales que nos permitirán relacionar esto con las ecuaciones obtenidas antes

$$\int_{R(t)} u dx dy \simeq \int_{R(t)} u_0 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx dy = \frac{\pi a}{\kappa}.$$

De manera que

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + V l u_\infty = 0. \quad (2.30)$$

Como se ha mencionado antes, l y u_∞ son desconocidos y deben determinarse.

- Ecuación correspondiente a la conservación de momento

Para obtener una ecuación que tome en cuenta la conservación del momento y además incorpore el efecto de la radiación, seguimos el procedimiento utilizado en el caso de la masa. Calculando el cambio de la cantidad de momento en la región $R(t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx dy - V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x=\tilde{x}(y,t)} dy.$$

Usando la forma diferencial de la conservación del momento, ecuación (2.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u^3 + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 \right)_x dx dy + (u u_{xy})_y dx dy - V \int_{C(t)} \frac{1}{2} u^2 dy \\ &= \int_{C(t)} \left(\frac{1}{3} u^3 + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2, u u_{xy} \right) \cdot \hat{n} ds - V \int_{C(t)} \frac{1}{2} u^2 dy, \end{aligned}$$

usando el teorema de la divergencia en dos dimensiones. Utilizando nuevamente que $u = u_\infty$ sobre el *flat shelf* y también sobre una porción de la curva $C(t)$, donde u_∞ es pequeño; si sobre $C(t)$ las derivadas u_{xx} , u_{xy} , u_x y u_y también lo son, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy \approx -\frac{1}{2} V l u_\infty^2.$$

Al igual que en el caso de la masa, podemos aproximar

$$\int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{R(t)} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \frac{\pi a^2}{4\kappa},$$

de manera que tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} = -\frac{1}{2} V l u_\infty^2. \quad (2.31)$$

No se hacen nuevas consideraciones sobre la velocidad de la onda principal y se conserva la expresión encontrada en el caso sin radiación, ecuación (2.21).

El sistema de ecuaciones que modela la evolución de la onda principal, incorporando a la radiación, queda más sencillo si eliminamos u_∞ entre (2.30) y (2.31). Al hacer esto, el sistema de ecuaciones es

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.32a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{4\kappa} + \frac{\pi}{2Vl} \left(\frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} \right)^2 = 0, \quad (2.32b)$$

$$V - 4 \left(\frac{a}{9} - \kappa \right) = 0. \quad (2.32c)$$

Podemos reducir el sistema anterior a dos ecuaciones, usando la tercera en las dos primeras. De ello resulta

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} + \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.33a)$$

$$4 \left(\frac{a}{9} - \kappa \right) \frac{d}{dt} \frac{a^2}{4\kappa} + \frac{\pi}{2l} \left(\frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} \right)^2 = 0. \quad (2.33b)$$

Que son dos ecuaciones diferenciales no lineales, para las funciones del tiempo $a(t)$ y $\kappa(t)$. Nótese que ahora tenemos un parámetro libre a nuestra elección, l . La solución del par de ecuaciones anterior no es tan fácil como en el caso sin radiación. De hecho, ni siquiera es sencillo obtener ecuaciones aisladas para cada función del tiempo y se trabajará con la pareja como está escrita en (2.33).

Resultados Numéricos II

Adaptamos al sistema de ecuaciones (2.33) para un trabajo numérico, tal como se había hecho antes para el sistema sin radiación. El escribir a la ecuación ZK como

$$u_t + \delta uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0,$$

nos obliga a modificar a (2.33) de acuerdo a

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} + \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \delta \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.34a)$$

$$4 \left(\frac{\delta a}{9} - \kappa \right) \frac{d}{dt} \frac{a^2}{4\kappa} + \frac{\pi}{2l} \left(\frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} \right)^2 = 0, \quad (2.34b)$$

donde la velocidad está dada por $V = 4 \left(\frac{\delta a}{9} - \kappa \right)$. Nuevamente tomamos $\delta = 6$ y resolvemos numéricamente (2.34) usando *Mathematica*, con el propósito de comparar con la solución numérica de ZK. Las soluciones se muestran en la Fig. 2.28, para la condición inicial de $a_0 = 0.5$ y $\kappa_0 = 0.05$. La otra condición inicial considerada, $a_0 = 1$ y $\kappa_0 = 0.05$ no se muestra y al igual que antes el ajuste es peor que en el caso anterior.

Notamos varias cosas de la solución numérica de (2.34). La primera es que no se ha logrado una buena concordancia entre estas soluciones y la solución numérica de ZK. Si uno solamente toma valores de l positivos, entonces la curva resultante está siempre por debajo

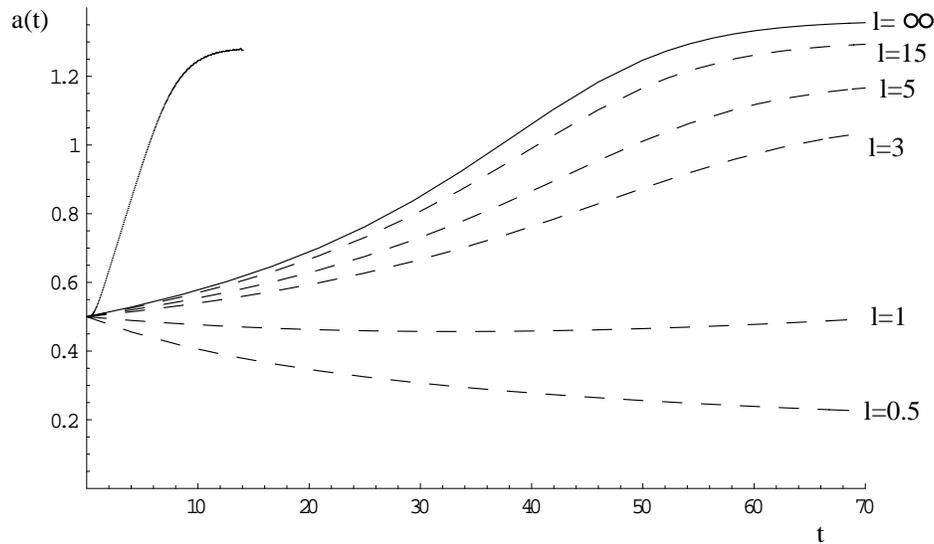


Fig. 2.28: Puntos correspondientes a la solución numérica de ZK (—) y soluciones de (2.34) para los valores de l indicados (---). La condición inicial es $a_0 = 0.5$. La curva correspondiente a $l = \infty$ es en realidad tomada del caso sin radiación, tratado en la sección anterior.

de aquella marcada con $l = \infty$, que corresponde a la situación sin radiación. Mientras l crece, las curvas obtenidas se acercan cada vez más a la curva marcada $l = \infty$; por otro lado, una l pequeña corresponde al caso de intensa radiación. En el caso de l con valores de 0.5 y 1, la radiación es tan intensa que la onda principal pierde demasiada masa inicialmente y su amplitud cae. Las soluciones de (2.34) son relativamente sensibles para cambios del valor de l si $0 < l < 10$, pero son poco sensibles para $10 < l$. En este último caso, las curvas se aproximan cada vez más al caso sin radiación al crecer l , pero de forma muy lenta.

El considerar valores de l negativos cambia radicalmente el comportamiento de las curvas, ya que permanecen por arriba de la curva de puntos de la Fig. 2.28, estabilizándose en valores mayores que ésta. Sin embargo, no tiene sentido tomar valores de l negativos, como puede notarse de la deducción de las ecuaciones que incorporan a la radiación, debido a que l es una longitud, relacionada con el tamaño del *flat shelf* considerado y es por ello que no mostramos figuras con este tipo de valores de l .

En resumen, lo anterior representa una aparente dificultad: hemos incorporado la radiación de la onda principal y a pesar de ello, no hemos logrado que el sistema de ecuaciones ordinarias modele de manera adecuada el fenómeno de interés.

Hemos dicho antes que de la Fig. 2.28 se observa que la amplitud dada por el sistema de ecuaciones crece demasiado lenta comparada con la solución numérica de ZK. La expresión

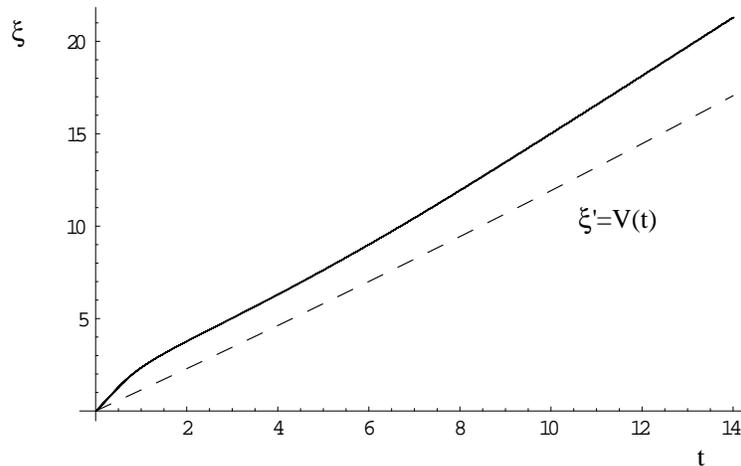


Fig. 2.29: Posición de la estructura coherente como función del tiempo. La línea continua es la curva para la solución numérica completa, mientras que la punteada es la posición obtenida del sistema de ecuaciones (2.34).

usada para la velocidad de la onda, (2.32c), es lineal en $a(t)$ y $\kappa(t)$. Si la evolución de $a(t)$ es lenta, esto nos sugiere que la velocidad usada en el sistema de ecuaciones también tendrá un problema semejante, comparada con la velocidad auténtica de la onda. Comparamos ahora gráficas de la posición de la estructura coherente $\xi(t)$, obtenida de la solución numérica auténtica y del sistema de ecuaciones, la velocidad de la onda es la pendiente de cada curva. Ver Fig. 2.29.

Si comparamos gráficas similares para la velocidad, se obtiene lo que se muestra en Fig. 2.30. La velocidad de la solución numérica se obtiene tomando diferencias entre las posiciones del máximo de amplitud de la onda y dividiendo entre el tiempo transcurrido. La velocidad obtenida de esta forma efectúa oscilaciones densas y por ello los puntos mostrados aquí parecen proporcionar una curva discontinua. Estas oscilaciones densas son producto del proceso numérico empleado⁶ y por lo tanto no reflejan el comportamiento real de una onda gobernada por ZK. La curva punteada es la velocidad obtenida del sistema de ecuaciones. Para tiempos mayores, la velocidad $V(t)$ crece hasta alcanzar un valor de equilibrio cercano a 2.1 para tiempos del orden de $t \approx 50$.

De ello se infiere que es conveniente modificar la expresión para la velocidad. Se sigue el procedimiento de otros trabajos de este tipo, como se trata de [19] y [24] para el caso de otras ecuaciones de onda no lineales, y tomaremos una expresión más general para la velocidad V . Esto permitirá tener un segundo parámetro libre, además de l y se verá que esto permitirá

⁶En particular, el tomar diferencias entre las posiciones y luego dividir entre la pequeña cantidad de 0.002, que es el tiempo transcurrido entre cada medición de la posición introduce grandes errores y este proceso es el responsable de las oscilaciones observadas.

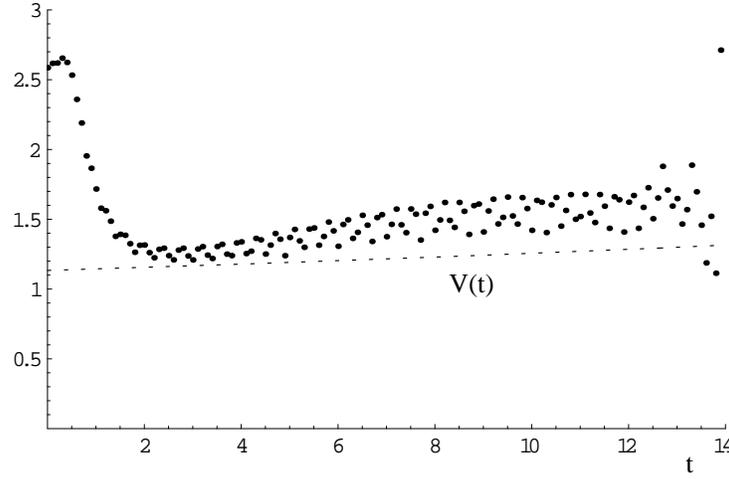


Fig. 2.30: Velocidad de la estructura coherente como función del tiempo. El conjunto de puntos se obtiene de la solución numérica completa, tomando solamente algunos de los puntos totales. La velocidad obtenida de esta forma efectúa oscilaciones densas y por ello los puntos mostrados aquí parecen proporcionar una curva discontinua. La curva punteada es la velocidad obtenida del sistema de ecuaciones (2.34).

que el sistema de ecuaciones arroje resultados con una mayor coincidencia, comparado con la solución numérica de ZK. El procedimiento seguido se muestra en la sección siguiente.

Mejora en la aproximación de la velocidad

Si proponemos como solución para la ecuación ZK

$$u_t + \delta u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

a una onda viajera $u = u(x - ct, y)$, para c constante, se obtiene la ecuación

$$-cu_x + \delta u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0.$$

La cual se puede integrar una vez para obtener

$$-cu + \frac{\delta}{2}u^2 + u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (2.35)$$

Después de considerar que u y todas sus derivadas se anulan al infinito.

Consideramos la integral variacional correspondiente a la ecuación (2.35), esta es

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - \frac{\delta}{6} u^3 + \frac{c}{2} u^2 \right] dx dy \quad (2.36)$$

como verificamos ahora. Si llamamos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - \frac{\delta}{6} u^3 + \frac{c}{2} u^2,$$

la Ecuación de Euler que determina a la función que extremiza a (2.36) es

$$\partial_x \mathcal{L}_{u_x} + \partial_y \mathcal{L}_{u_y} - \mathcal{L}_u = 0.$$

De esto resulta

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \frac{\delta}{2} u^2 - cu = u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta}{2} u^2 - cu = 0$$

y es la ecuación que satisface una onda viajera en dirección x , a partir de la ecuación ZK.

La interpretación de (2.36) es que una auténtica onda viajera de la ecuación ZK necesariamente extremiza a la cantidad A . Por otro lado, si evaluamos a A no con una auténtica solución de ZK, sino con una aproximada que tenga ciertos parámetros aparentemente libres, podremos encontrar de ello la mejor elección de los parámetros libres y de esta forma, la mejor solución aproximada.

Ejemplificamos esto con nuestra solución aproximada $u_0 = ae^{-\kappa((x-ct)^2+y^2)}$. No existe alguna elección de a y κ que permita hacer que u_0 sea una solución, pero supóngase que se quiere tomar a dicha función como solución aproximada. La pregunta entonces es ¿cómo debemos tomar a las constantes a y κ para obtener la mejor solución aproximada posible? Esto se logra pidiendo que $A(u)$ se extremice no al variar la función u sino con respecto a a y κ . Esto nos dará la mejor aproximación Gaussiana del tipo $u_0 = ae^{-\kappa((x-ct)^2+y^2)}$.

Si se evalúa a A en la función u_0 , se obtiene

$$A(u_0) = \frac{\pi}{2} a^2 - \frac{\pi \delta a^3}{18 \kappa} + \frac{\pi c a^2}{4 \kappa}$$

y las ecuaciones $A_a = 0$ y $A_\kappa = 0$ resultan ser

$$c = \frac{\delta}{3} a - 2\kappa, \quad a = \frac{18}{\delta} \kappa. \quad (2.37)$$

De donde podemos encontrar a la velocidad c como función de a

$$c = \frac{2\delta}{9} a. \quad (2.38)$$

En particular, notamos que la expresión para la velocidad c (con $\delta = 1$), (2.37), es distinta que la expresión obtenida antes para V , ecuación (2.32c).

Las relaciones anteriores entre los parámetros a , κ y c nos brindan la mejor solución aproximada, la cual tendrá solamente un parámetro libre, ya sea a , κ ó c , al escribir los otros dos en términos del que se escoja.

Adoptamos ahora una expresión paramétrica de la velocidad de la onda, de manera que para ciertos valores de los parámetros se reduzca a la V encontrada antes, ecuación (2.32c), o a la expresión para c recién hallada en (2.37).

Notando que tanto la velocidad V como c son lineales en a y κ , tomamos la forma funcional para la velocidad C , con los parámetros p , q y μ

$$C = \frac{\delta}{3}(1 + p\mu)a - 2(1 + q\mu)\kappa,$$

de modo tal que si $\mu = 0$ entonces se recupera c de (2.37) y donde p y q se determinan de la siguiente forma: cuando $a = \frac{18}{\delta}\kappa$, es decir, cuando están relacionadas como en la mejor aproximación posible, pedimos que C adopte la velocidad de la mejor aproximación, dada en (2.38) y que esto ocurra para toda μ . Hacemos $\kappa = \frac{\delta}{18}a$ en la expresión para C y nos queda

$$C = \frac{\delta}{9}\{3(1 + p\mu) - (1 + q\mu)\}a$$

lo cual se reduce a (2.38) si $q = 3p$. Sin pérdida de generalidad, tomamos $p = 1$ y nos queda entonces

$$C = \frac{\delta}{3}(1 + \mu)a - 2(1 + 3\mu)\kappa. \quad (2.39)$$

Lo anterior tiene también otra justificación. En la simulación numérica de ZK, se utilizó una condición inicial Gaussiana y esto nos llevó a tomar una función de este estilo para la onda $u_0(x, y, t)$; es decir, se ha supuesto que la estructura coherente conserva la dependencia funcional inicial. Esto no tiene por qué ser así, la onda principal puede iniciar con un perfil Gaussiano y modificarlo después al transcurrir el tiempo, conservando una similitud en la forma acampanada. Si la estructura coherente efectivamente se comporta así, adoptando la forma de una función distinta, pero conservando la dependencia en $(x - \xi)^2 + y^2$, la única variación en el sistema de ecuaciones obtenido, será en los coeficientes, ya que éstos surgen de las integrales en diversas regiones de una función Gaussiana. El considerar una nueva velocidad dada por (2.39) con un parámetro μ modificando a los coeficientes, de cierta forma toma en cuenta que la onda adopta una forma distinta que la Gaussiana y por ello los coeficientes pueden variar.

Comprobaremos ahora que la velocidad V encontrada considerando el momento en dirección x del momento de la onda, es un caso particular de C . Si se introduce el factor constante δ multiplicando el término no lineal de la ecuación ZK, la velocidad V ahora es

$$V = 4 \left(\frac{\delta a}{9} - \kappa \right)$$

y para $\delta = 1$ es idéntica a la expresión (2.32c), como debe ser. Si se toma $\mu = 1/3$, C toma el valor

$$C = 4 \left(\frac{\delta}{9} a - \kappa \right) = V,$$

por lo que efectivamente se recobra la expresión deseada.

Adoptamos a C como la nueva velocidad de la onda principal y con ello tenemos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} - \frac{\delta}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} + \frac{C}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.40a)$$

$$\frac{d a^2}{dt 4\kappa} + \frac{\pi}{2Cl} \left(\frac{d a}{dt \kappa} \right)^2 = 0, \quad (2.40b)$$

$$C - \frac{\delta}{3}(1 + \mu)a + 2(1 + 3\mu)\kappa = 0. \quad (2.40c)$$

que se obtiene considerando $\delta \neq 1$.

Si eliminamos a C del sistema de ecuaciones tendremos

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} + \left(\frac{1 + \mu}{6} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \delta \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - 3\mu a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.41a)$$

$$\left(\frac{\delta}{3}(1 + \mu)a - 2(1 + 3\mu)\kappa \right) \frac{d a^2}{dt 4\kappa} + \frac{\pi}{2l} \left(\frac{d a}{dt \kappa} \right)^2 = 0. \quad (2.41b)$$

Este sistema de ecuaciones se reduce al anterior si hacemos $\mu = 1/3$, como se mencionó antes. Sin embargo, lo que deseamos es más bien modificar a μ para lograr el ajuste numérico. De esta manera, (2.41) es un sistema de ecuaciones con dos parámetros libres, μ y l , esperamos que con esto se pueda lograr una mejor comparación con la solución numérica de ZK.

Resultados Numéricos III

Retomamos la comparación con la solución numérica de ZK utilizando esta vez al sistema de ecuaciones en la forma (2.41). Si se resuelve para diversas parejas de valores de μ y l se obtiene algo como en la Fig. 2.31. Mientras que en el caso en que solamente se tenía a l libre, con $l > 0$, las curvas siempre pasaban por debajo de la solución numérica de ZK; ahora vemos que es posible variar l y μ lo suficiente para que las curvas del sistema de ecuaciones pasen por un lado y por otro de los puntos de la solución numérica de ZK.

El mejor ajuste hallado entre el sistema de ecuaciones se encuentra para los valores $l = 15$ y $\mu = 2.3$, como puede verse en la Fig. 2.32.

De la Fig. 2.32 vemos que a esta escala el punto estacionario es prácticamente el mismo entre los puntos y la curva. Sin embargo, el comportamiento intermedio es algo distinto ya

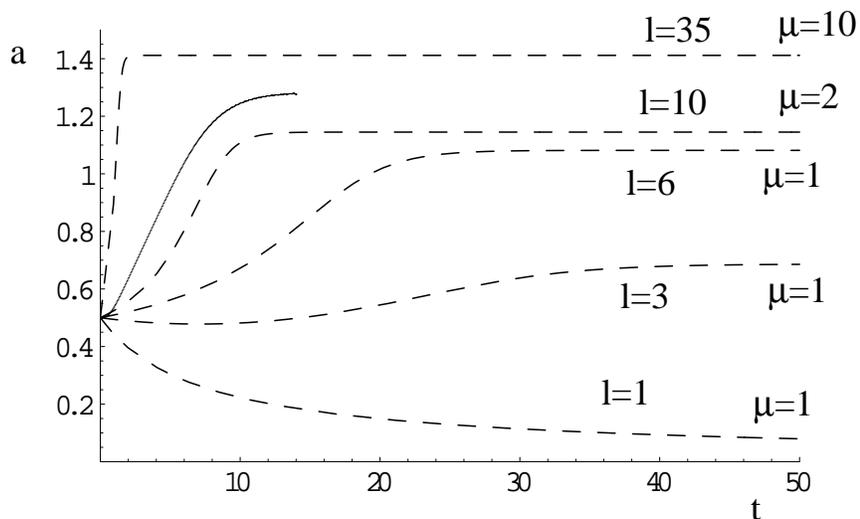


Fig. 2.31: Comparación entre la solución numérica de ZK (\cdots) y el sistema de ecuaciones (2.39) ($---$) con diversos valores de l y μ .

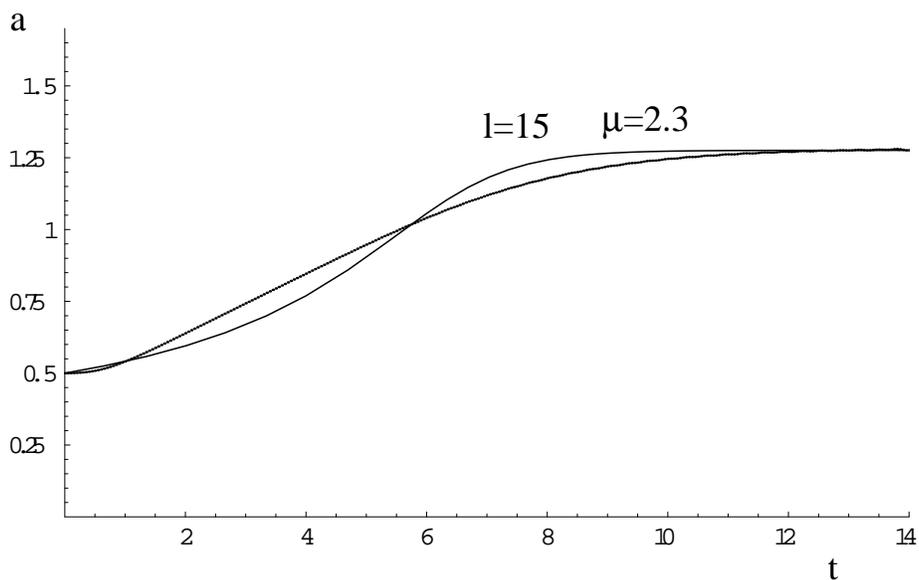


Fig. 2.32: Comparación entre la solución numérica de ZK (\cdots) y el sistema de ecuaciones (2.39) ($---$) con $a_0 = 0.5$, $l = 15$ y $\mu = 2.3$.

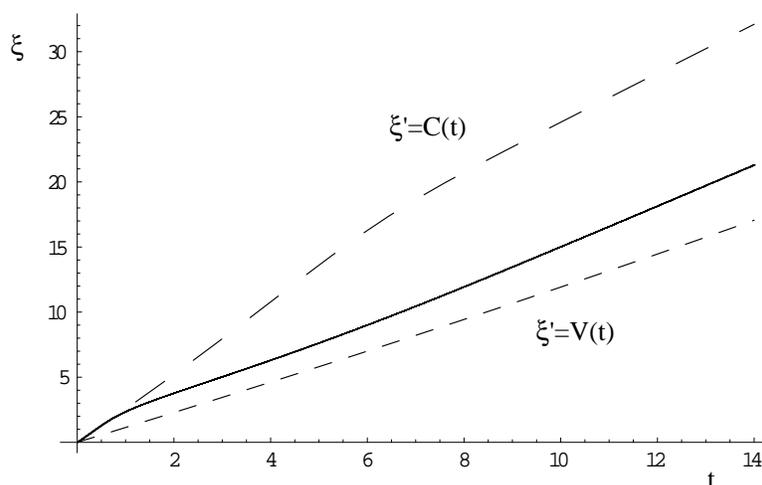


Fig. 2.33: Posición de la estructura coherente como función del tiempo. La línea continua es la curva para la solución numérica completa, mientras que las punteadas son las posiciones obtenidas del sistema de ecuaciones, en el caso en que la velocidad no se ha corregido y en el caso en que se llevado a cabo dicha corrección.

que la solución a partir del sistema no recrea la curvatura exacta de la serie de puntos. En particular, mientras que el punto de cambio de concavidad está alrededor de $t = 1$ para la solución numérica de ZK, para la amplitud a partir del sistema de ecuaciones el cambio de concavidad está alrededor de $t = 6$.

Resulta interesante comparar la nueva posición y velocidad obtenidas para la onda a partir del sistema de ecuaciones con la velocidad y posición de la solución numérica completa, como se hizo en las Figs. 2.29 y 2.30 para la forma anterior de la velocidad. En la Fig. 2.33 se muestra la posición dada por la solución numérica, comparada con la posición obtenida con la velocidad $V(t)$, esto es, antes de corregir la velocidad y con la posición que se obtiene con la velocidad corregida $C(t)$.

De la Fig. 2.33 vemos que el valor y pendiente de la posición de la onda proporcionada por la velocidad $C(t)$ es mucho mejor en la vecindad de $t = 0$ pero se aleja de la solución numérica para tiempos posteriores. De manera contraria, el ajuste que se obtiene al usar a $V(t)$ como la velocidad de la onda es peor cerca de $t = 0$, pero se aleja una cantidad menor para tiempos mayores. De esto inferimos que el ajuste adecuado a la posición y velocidad de la onda es crucial cerca de $t = 0$; el mejorar el ajuste de la posición en esta región es lo que permite a su vez mejorar el ajuste de la amplitud de la onda como se observa en la Fig. 2.32, a diferencia del ajuste visto en la Fig. 2.28.

Podemos también comparar la velocidad de la onda obtenida de la solución numérica con la velocidad que se obtiene del nuevo sistema de ecuaciones (2.40). Esto se muestra en la Fig.

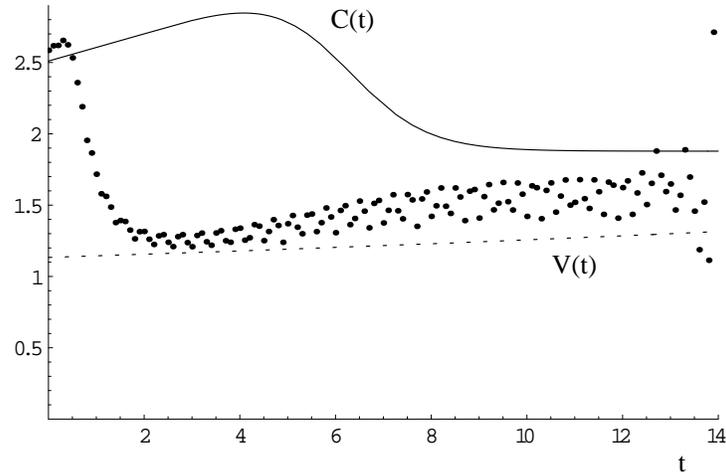


Fig. 2.34: Velocidad de la estructura coherente como función del tiempo. El conjunto de puntos se obtiene de la solución numérica completa, tomando solamente algunos de los puntos totales. La velocidad obtenida de esta forma efectúa oscilaciones densas y por ello los puntos mostrados aquí parecen proporcionar una curva discontinua. Las curva punteada y la continua son las velocidades obtenidas de los sistema de ecuaciones (2.34) y (2.40); es decir antes y después de corregir la velocidad.

2.34, donde los puntos respresentan nuevamente la velocidad dada por la solución numérica y las curvas punteadas representan a las velocidades obtenidas de los sistemas de ecuaciones, antes de la corrección en la velocidad y después de ella. La velocidad obtenida de esta forma efectúa oscilaciones densas y por ello los puntos mostrados aquí parecen proporcionar una curva discontinua. Como se ha mencionado antes, estas oscilaciones son resultado de la forma en que se calcula la velocidad y no respresentan algo real. Algo más realista sería utilizar un ajuste a los puntos de manera que se obtenga una curva lisa. Como se esperaba, vemos que la aproximación a la velocidad real de la onda dada por $C(t)$ es mejor cerca de $t = 0$, aunque posteriormente la diferencia crece. Para tiempos mayores, la velocidad $C(t)$ permanece en el valor de equilibrio que se ve en la figura, mientras que la velocidad $V(t)$ crece hasta alcanzar un valor de equilibrio cercano a 2.1 para tiempos del orden de $t \approx 50$.

El ajuste a la velocidad de la onda logrado por la función $C(t)$ es mejor que el de la función $V(t)$ en varios sentidos y esto es lo que permite reproducir el comportamiento de la amplitud de la onda de mejor manera. En particular, cerca de $t = 0$ el valor que toma es bastante más cercano al valor real y además $C(t)$ llega al equilibrio mucho más rápido que $V(t)$, aunque no tan rápido como la solución numérica. Adicionalmente, $C(t)$ alcanza el equilibrio de la misma forma que la solución numérica: de manera decreciente. Esto se compara con la forma en que la función $V(t)$ llega al equilibrio: de manera mucho más lenta

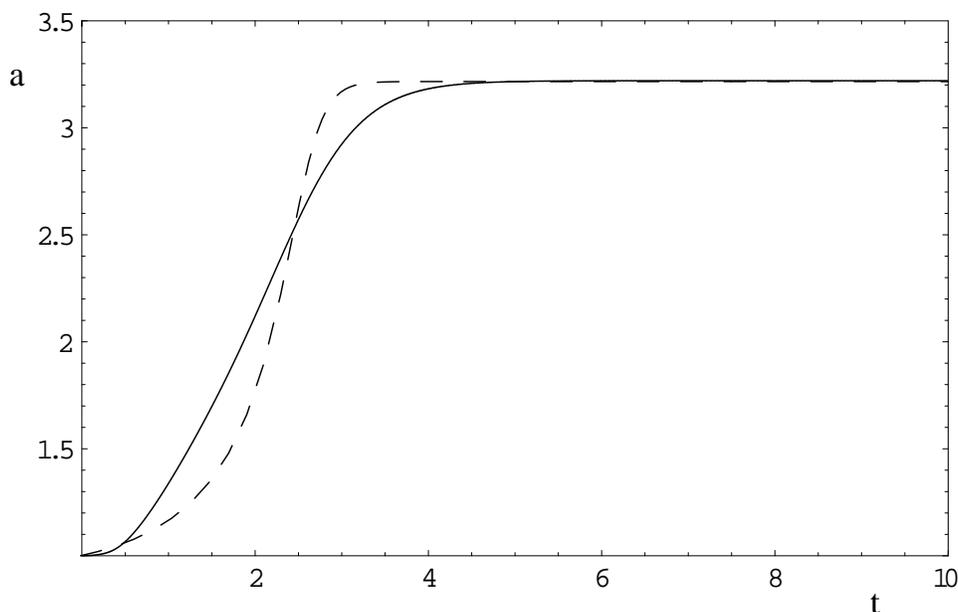


Fig. 2.35: Comparación entre la solución numérica de ZK (—) y el sistema de ecuaciones (2.39) (---) con $a_0 = 1$, $l = 8.8$ y $\mu = 3$.

y de forma creciente.

Para el caso en que la amplitud inicial es uno, mostramos la figura análoga, en 2.35. El mejor ajuste se logra en este caso con $l = 8.8$ y $\mu = 3$. Al igual que antes la mayor diferencia está relacionada con el cambio de concavidad ya que la solución numérica directa efectúa dicho cambio para tiempos cercanos a cero, mientras que la solución a partir del sistema de ecuaciones tarda un poco más en cambiar su concavidad. Sin embargo, fue posible escoger los parámetros libres para que el acuerdo entre puntos de equilibrio sea total.

Resumimos lo encontrado hasta ahora. El mal ajuste entre el sistema de ecuaciones ordinarias que incorpora a la radiación únicamente a través del parámetro l , en particular la lenta evolución de la función $a(t)$ dada por el sistema de ecuaciones comparada con la solución numérica completa, nos motiva a tomar una versión más general de la velocidad de la onda principal, la cual conserva la forma funcional de la expresión anterior y se obtiene a partir de la integral variacional para la forma de ZK correspondiente a ondas viajeras. Esta nueva forma de la velocidad de cierta manera toma en cuenta que la estructura coherente después de $t = 0$ no tiene porqué ser Gaussiana y por lo tanto los coeficientes obtenidos en las ecuaciones pueden ser distintos. Esto introduce el parámetro adicional μ de manera que resulta un sistema de dos ecuaciones ordinarias con dos parámetros libres l y la antes mencionada μ . En este caso se logra un ajuste bueno e incluso se puede reproducir el punto de equilibrio de la solución numérica directa con una curva que se sitúa muy cerca

de la anterior. La mayor diferencia resulta de considerar el cambio de concavidad de las soluciones. La solución numérica directa presenta un cambio de concavidad casi inmediato, mientras que la solución del sistema de ecuaciones presenta un cambio análogo para tiempos posteriores. Podemos decir que un sistema de ecuaciones ordinarias con dos parámetros libres es suficiente para lograr un muy buen acuerdo con la solución numérica de la ecuación parcial pero no para reproducir el grado de detalle que está involucrado en el cambio de concavidad de la solución.

Es un asunto de experiencia en este tipo de trabajos que en el cambio de concavidad siempre existe gran discrepancia y esto está relacionado con la complejidad de la radiación cedida por la onda principal, como se menciona en [24]. En el trabajo citado se menciona que en la solución numérica de la ecuación parcial la cáustica tarda cierto tiempo en formarse, mientras que en el sistema de ecuaciones se asume que ésta se forma de inmediato, algo que necesariamente acarrea discrepancia entre las soluciones. Finalmente, si uno observa las Figs. 2.21, 2.24, 2.22 y 2.25, es evidente una tremenda complejidad en la forma de la radiación, por lo que el incorporarla en el sistema de ecuaciones de manera más realista es algo muy difícil. De ello, resalta la buena calidad de los resultados obtenidos a pesar de la forma tan compleja de la radiación.

2.4 Evolución de una onda localizada gobernada por una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov

2.4.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK generalizada

Hemos visto que en el artículo de Sipcic y Benney, [33], se considera a la ecuación mZK, la cual involucra una no linealidad del estilo u^2u_x en lugar de la que presenta ZK. Los autores mencionan que esa ecuación surge en el estudio de fluctuaciones de densidad de los iones de un plasma cuando ésta se propaga con un cierto ángulo con respecto al campo magnético. Al igual que la ecuación ZK, la ecuación mZK no es exclusiva de esta situación sino que por el contrario puede surgir en muchos contextos. Incluso pueden surgir ecuaciones con una no linealidad más general, del estilo $u^p u_x$. Por ello, consideramos ahora una generalización a la ecuación de Zakharov-Kuznetsov en dos dimensiones, que presentamos en la forma

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \quad p > 0 \quad (2.42)$$

con $u = u(x, y, t)$ y la cual se reduce a ZK para $p = 1$. Por simplicidad, a esta generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov la llamaremos gZK.

Encontraremos las leyes de conservación correspondientes a esta ecuación y luego obtendremos a partir de ellas ecuaciones ordinarias que aproximen la evolución de una onda

coherente Gaussiana, tal como lo hicimos en el caso $p = 1$. Obtendremos así una generalización a los procedimientos seguidos antes y se estudiará el tipo de comportamiento de la onda coherente al variar p . Por las ideas discutidas en la sección 1.1, esperamos que un aumento en la no linealidad (para $p > 1$) puede llevar a que no ocurra un balance entre la dispersión y el efecto antes mencionado, de manera que la estructura coherente decaiga a cero o se colapse sobre sí misma. En el caso opuesto, para $p < 1$ puede ser que la no linealidad no sea lo suficientemente intensa para evitar que la onda se disperse por completo.

La conservación de masa

Al igual que en el caso de la ecuación ZK, la ecuación considerada ahora tiene algo análogo a la conservación de masa y que se reduce a la expresión correspondiente a ZK si hacemos $p = 1$. Definimos la masa total como

$$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy,$$

por lo que debemos pedir que u decaiga lo suficientemente rápido cuando $x, y \rightarrow \pm\infty$ para obtener un valor finito. Podemos escribir a la ecuación gZK (2.42) como

$$u_t + \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y = 0, \quad (2.43)$$

y esta es la forma diferencial de la conservación de masa. A partir de (2.43) se sigue que

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} \right)_x - (u_{xy})_y dx dy = 0,$$

ya que $u(x, y, t)$ y sus derivadas decaen a cero en el infinito. Tenemos la versión integral de la conservación de masa

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = 0, \quad (2.44)$$

que será utilizada más adelante para obtener un sistema de ecuaciones que aproxime la evolución de una onda con la misma forma que u_0 , tal como se hizo en el caso de ZK.

La conservación de momento

Consideramos ahora la conservación del momento de la onda. Este se define como

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy, \quad (2.45)$$

veremos que lo anterior es constante en el tiempo, a partir de la ecuación gZK.

Multiplicando a (2.42) por u tenemos

$$\begin{aligned} uu_t + u^{p+1}u_x + uu_{xxx} + uu_{xyy} &= \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{p+2}u^{p+2} + uu_{xx}\right)_x - u_xu_{xx} + (uu_{xy})_y - u_yu_{xy} \\ &= \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{p+2}u^{p+2} + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2\right)_x + (uu_{xy})_y = 0. \end{aligned}$$

Por lo que la versión diferencial de la conservación de momento se escribe como

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{p+2}u^{p+2} + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2\right)_x + (uu_{xy})_y = 0. \quad (2.46)$$

De aquí se sigue la conservación de P en forma integral de manera sencilla, siguiendo el procedimiento conocido. Usando (2.45) y (2.46) tenemos

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx dy = 0 \quad (2.47)$$

y será igualmente utilizada para aproximar la evolución de la onda coherente.

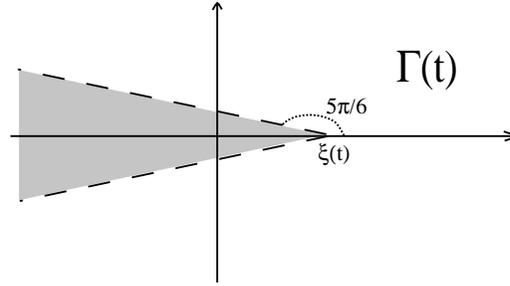
2.4.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación

Proponemos una solución a la ecuación gZK que se compone de dos partes: una parte con estructura localizada la cual se representa por una función $u_0(x, y, t)$ y que llamaremos la onda coherente o principal; más una segunda parte que representa la radiación desprendida por la onda y que se representa por una función $u_1(x, y, t)$, de manera idéntica al caso con la ecuación ZK. Nuevamente supondremos que la condición inicial para $u(x, y, t)$ es justamente $u_0(x, y, 0)$, por lo que al inicio no hay radiación. A partir de las leyes de conservación encontradas en la sección 2.4.1 se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen de manera aproximada la evolución de onda coherente $u_0(x, y, t)$. Al comienzo, encontraremos un sistema de ecuaciones que describen la evolución de la onda coherente ignorando por completo la radiación. Después de ello, estudiaremos el caso en que la radiación no es completamente despreciable y encontraremos así un sistema de ecuaciones que describen la evolución de la onda coherente añadiendo una corrección debido al efecto de la radiación.

Sistema de ecuaciones sin tomar en cuenta a la radiación

Para la ecuación gZK

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \quad p > 0$$

Fig. 2.36: La región $\Gamma(t)$.

proponemos como solución a la función $u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t)$, con u_0 dado por

$$u_0(x, y, t) = a(t)e^{-\kappa(t)((x-\xi(t))^2+y^2)}; \quad (2.48)$$

es decir la onda coherente tiene un perfil Gaussiano y además se propaga en dirección x . Al igual que antes, las funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ toman en cuenta que la onda coherente puede deformarse, debido a que no es un solitón. La función $V(t) \equiv \dot{\xi}$ es la velocidad de la onda coherente y por lo antes mencionado es también función del tiempo. Por supuesto que nos limitamos al caso $\kappa > 0$, de manera que se tengan soluciones con sentido físico. La primera de las ecuaciones ordinarias que modelan la evolución de u_0 se obtendrá utilizando la conservación de la masa, ecuación (2.44).

- Ecuación correspondiente a la conservación de la masa

Al igual que en el caso $p = 1$, la radiación desprendida por la onda coherente se encuentra confinada en la región entre las cáusticas⁷ $\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi) < y < -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \xi)$ y $x < \xi$, a la que llamamos $\Gamma'(t)$, de igual manera que en el caso de la ecuación ZK. De esta manera, la región $\Gamma(t)$ es aquella región móvil en donde la radiación es prácticamente nula. Esta región se muestra en la Fig. 2.36.

Seguimos el desarrollo usado en el caso de ZK y calculamos el cambio de la masa de la onda en la región $\Gamma(t)$, tomando en cuenta que $u(x, y, t)$ satisface la ecuación gZK

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty \int_{\xi-\sqrt{3}y}^\infty u dx dy + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \int_{\xi+\sqrt{3}y}^\infty u dx dy = \int_{\Gamma(t)} u_t dx dy \\ &\quad - \int_0^\infty u|_{\xi-\sqrt{3}y} V dy - \int_{-\infty}^0 u|_{\xi+\sqrt{3}y} V dy - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y \right] dx dy. \end{aligned}$$

⁷El que la región donde queda confinada la radiación no se modifique en el caso de gZK es de esperarse, pues ésta región se dedujo tomando la parte lineal de la ecuación ZK, parte que es idéntica en el caso de gZK.

Como en la región $\Gamma(t)$ se cumple $u_1 \simeq 0$ entonces en esa región $u \simeq u_0$ y nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &\simeq \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy \simeq -2V \int_0^\infty u_0|_{\xi-\sqrt{3}y} dy \\ &\quad - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy, \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde la paridad de u_0 con respecto a y nos ayuda a simplificar la expresión que representa el cambio de masa en la región de integración. Evaluamos ahora cada una de las integrales de arriba tomando en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito.

En la sección 2.3.2 se halló la masa total en la región $\Gamma(t)$:

$$\int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy = \frac{5\pi a}{6 \kappa}.$$

La siguiente integral también fue calculada en la sección 2.3.2

$$\int_0^\infty u_0|_{\xi-\sqrt{3}y} dy = \frac{\pi^{1/2} a}{4 \kappa^{1/2}}.$$

La última integral requerida es

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy &= 2 \int_0^\infty \int_{\xi-\sqrt{3}y}^\infty \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} + u_{0yy} \right]_{\xi-\sqrt{3}y} dy. \end{aligned}$$

Si usamos ahora $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x-\xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$ y $u_{0yy} = (4a\kappa^2y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y \right] dx dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{a^{p+1}}{p+1} e^{-(p+1)\kappa(3y^2+y^2)} + (4a\kappa^2 3y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+y^2)} + (4a\kappa^2 y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+y^2)} \right] dy \\ &= -2 \int_0^\infty \left[\frac{a^{p+1}}{p+1} e^{-4(p+1)\kappa y^2} + (16a\kappa^2 y^2 - 4a\kappa) e^{-4\kappa y^2} \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \left[\frac{a^{p+1}}{p+1} \frac{1}{(4(p+1)\kappa)^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{2} + 16a\kappa^2 \frac{1}{(4\kappa)^{3/2}} \frac{\Gamma(3/2)}{2} - 4a\kappa \frac{1}{(4\kappa)^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \right] \\
 &= -2 \left[\frac{\pi^{1/2}}{4(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + \frac{\pi^{1/2}}{2} a\kappa^{1/2} - \pi^{1/2} a\kappa^{1/2} \right] = -\pi^{1/2} \left[\frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2} \right] \\
 &= \pi^{1/2} \left[a\kappa^{1/2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} \right].
 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores de las tres integrales en (2.49)

$$\frac{d}{dt} \frac{5\pi}{6} \frac{a}{\kappa} = -2V \frac{\pi^{1/2}}{4} \frac{a}{\kappa^{1/2}} - \pi^{1/2} \left[a\kappa^{1/2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} \right],$$

o equivalentemente,

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} = \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} - \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} - a\kappa^{1/2}. \quad (2.50)$$

Esta es la ecuación diferencial ordinaria que generaliza a (2.16), la cual podemos obtener al hacer $p = 1$ en la expresión (2.50) y de esta manera verificar los cálculos.

- Ecuación correspondiente a la conservación del momento

Al considerar la conservación del momento en el caso $p \neq 1$, se llega exactamente a la misma expresión obtenida antes, cosa que se muestra ahora. Bajo las mismas condiciones; esto es, tomando a u_1^2 y a u_0u_1 como despreciables con respecto a u_0^2 en todo el plano \mathbb{R}^2 , el momento se calcula como

$$P = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

La ecuación $\dot{P} = 0$ queda así

$$\dot{P} \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} dx dy = \frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} = 0.$$

Y de esto se obtiene una ecuación adicional, y que es idéntica a (2.17)

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa} = 0. \quad (2.51)$$

• Ecuación correspondiente a la consideración del momento en x del momento de la onda. Consideramos ahora el momento en x del momento de la onda, sabemos de antemano que esto nos proporcionará la ecuación que cierra el sistema y de hecho, una expresión que nos proporciona la velocidad de la onda en términos de su a y κ . El momento en x del momento es

$$\int_{\mathbb{R}^2} x \frac{1}{2} u^2 dx dy.$$

Nuevamente despreciando a u_1^2 y $u_0 u_1$ con respecto a u_0^2 en todo el plano tendremos que el cambio de la cantidad de arriba es

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

Usamos la ecuación (2.47)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy \simeq - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y \right] dx dy.$$

De ello se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{0xy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

después de integrar por partes y tomar en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito. Las integrales de arriba tienen los valores

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \frac{\pi}{4} \frac{\xi a^2}{\kappa},$$

según se encontró en la sección 2.3.2. Es necesario evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy,$$

por lo que requerimos las expresiones $u_{0x} = -2a\kappa(x-\xi)e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, $u_{0y} = -2a\kappa y e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$ y $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x-\xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2)}$, quedando entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a^{p+2}}{p+2} e^{-(p+2)\kappa((x-\xi)^2+y^2)} + (4a^2\kappa^2(x-\xi)^2 - 2a^2\kappa) e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}4a^2\kappa^2(x-\xi)^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} - \frac{1}{2}4a^2\kappa^2 y^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2)} \right) dx dy \\
&= \frac{a^{p+2}}{p+2} \frac{\pi}{(p+2)\kappa} + 4a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} - 2a^2\kappa \frac{1}{2\kappa} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} \\
&\quad - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{4\kappa^2} \frac{2\Gamma(1/2)}{2} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \\
&= \frac{\pi}{(p+2)^2} \frac{a^{p+2}}{\kappa} + a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{2} - a^2 \Gamma(1/2)^2 - a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{4} - a^2 \frac{\Gamma(1/2)^2}{4} = \frac{\pi}{(p+2)^2} \frac{a^{p+2}}{\kappa} - \pi a^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores calculados, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi \xi a^2}{4 \kappa} = \frac{\pi}{(p+2)^2} \frac{a^{p+2}}{\kappa} - \pi a^2,$$

por lo que al simplificar

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa} = 4 \left(\frac{a^{p+2}}{(p+2)^2 \kappa} - a^2 \right). \quad (2.52)$$

El sistema de ecuaciones ordinarias para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ que aproxima la evolución de la onda coherente, en el caso $p \neq 1$ es

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.53a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa} = 0, \quad (2.53b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa} - 4 \left(\frac{a^{p+2}}{(p+2)^2 \kappa} - a^2 \right) = 0. \quad (2.53c)$$

De la ecuación (2.53b) se obtiene, al igual que cuando se tenía $p = 1$

$$\frac{a^2}{\kappa} = \frac{a_0^2}{\kappa_0}, \quad (2.54)$$

donde $a_0 = a(0)$ y $\kappa(0) = \kappa_0$.

Por otro lado, usando (2.53b) y (2.53c) se obtiene

$$\frac{d\xi}{dt} = V = 4 \frac{\kappa}{a^2} \left(\frac{a^{p+2}}{(p+2)^2 \kappa} - a^2 \right) = 4 \left(\frac{a^p}{(p+2)^2} - \kappa \right),$$

la velocidad de la onda coherente está dada por

$$V = 4 \left(\frac{a^p}{(p+2)^2} - \kappa \right), \quad (2.55)$$

lo cual se reduce a (2.21) en el caso $p = 1$.

Utilizando (2.55) en (2.53a)

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} = - \left(\frac{2}{(p+2)^2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \right) \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2}. \quad (2.56)$$

Las dos ecuaciones (2.53b) y (2.56) determinan a las funciones del tiempo $a(t)$ y $\kappa(t)$ a partir de las condiciones iniciales. Usando (2.54) podemos obtener una ecuación diferencial para $a(t)$:

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} = \frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \frac{d 1}{dt a} = - \frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{a_0^2}{\kappa_0} \frac{\dot{a}}{a^2} = - \left(\frac{2}{(p+2)^2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \right) \frac{a_0}{\kappa_0^{1/2}} a^p + \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} a^2,$$

o bien, simplificando un poco

$$\dot{a} = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left[\left(\frac{2}{(p+2)^2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \right) a^p - \frac{\kappa_0}{a_0^2} a^2 \right] a^2. \quad (2.57)$$

La ecuación anterior la escribimos en forma general

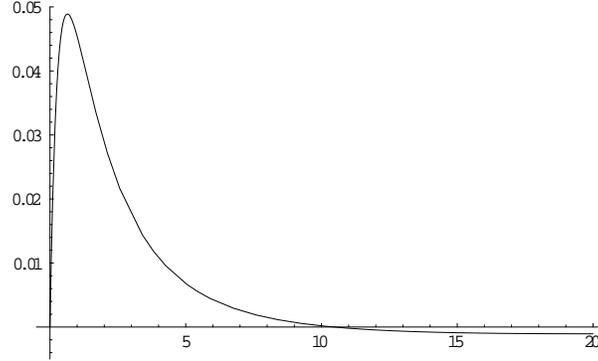
$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(f(p) a^p - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a^2 \right) a^2, \quad (2.58)$$

con $f(p) = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{(p+2)^2} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \right)$ y $\nu = \frac{6}{5\pi^{1/2}} > 0$ igual que en la sección 2.3.2; obsérvese que $f(1) = \mu$, lo cual coincide con la ecuación (2.24) y corrobora los cálculos efectuados.

De la ecuación (2.58), vemos que la función $f(p)$ tiene gran influencia sobre el comportamiento de a y de \dot{a} . Es por esto que debemos entender el comportamiento de dicha función y para ello mostramos su gráfica en la Fig. 2.37. Vemos que $f(p)$ tiene dos ceros: el primero ocurre en $p = 0$ y el segundo en $p \simeq 10.44$. Además $f(p)$ es positiva entre las dos raíces, $0 \leq p < 10.44$ y negativa para $10.44 < p$. Adicionalmente $f(p) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$.

Dependiendo del valor de p , es conveniente escribir a la ecuación (2.58) en las dos formas

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a^{2-p} \right) a^{p+2} \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq 2,$$

Fig. 2.37: La función $f(p)$.

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(f(p)a^{p-2} - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} \right) a^4 \quad \text{si} \quad 2 \leq p.$$

En el caso $0 \leq p < 2$ tenemos dos puntos de equilibrio, el primero dado por $a = 0$ y el segundo por $a = \left(\frac{a_0^2 f(p)}{\kappa_0 \nu} \right)^{\frac{1}{2-p}}$. Cualquier onda coherente con una amplitud inicial distinta de cero adoptará la amplitud dada por el último punto de equilibrio, para tiempos infinitamente grandes; además, la evolución de la amplitud ocurre de forma monótona. Al igual que el caso $p = 1$, tenemos un punto especial a^* que corresponde al caso en que la condición inicial y el punto de equilibrio coinciden. Esto ocurre cuando $f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} a_0^{2-p} = 0$, o bien si $a_0 = a^* \equiv \left(\frac{\nu \kappa_0}{f(p)} \right)^{1/p}$. En este último caso, tendremos que la amplitud de la onda coherente permanece constante para todo tiempo.

Un cálculo sencillo demuestra que el cambio de concavidad se sitúa ahora en $a = \left(\frac{a_0^2}{\kappa_0} \frac{2+p}{4\nu} f(p) \right)^{\frac{1}{2-p}}$, que es menor que el punto de equilibrio y además se reduce a la expresión hallada antes si escogemos $p = 1$. Es por esto que según la condición inicial, las soluciones que son crecientes pueden efectuar un cambio de concavidad o no. Los diferentes tipos de soluciones se dividen entonces en tres: (a) soluciones siempre crecientes, (b) soluciones siempre decrecientes o (c) soluciones que permanecen constantes. De este análisis se deduce que para $0 < p < 2$, la onda coherente siempre se aproxima a una onda con forma y velocidad permanente; es decir, tiene un carácter de tipo solitón. Las curvas solución se muestran de forma esquemática en la Fig. 2.38.

En el caso $p = 2$ podemos tener dos comportamientos, dependiendo de si $f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2}$ es positivo a negativo. En ambos casos el único punto de equilibrio es para $a = 0$ y las situaciones varían solamente en si la solución es siempre creciente o de manera inversa, siempre decreciente; notando además que debido a la ausencia de un punto de equilibrio no

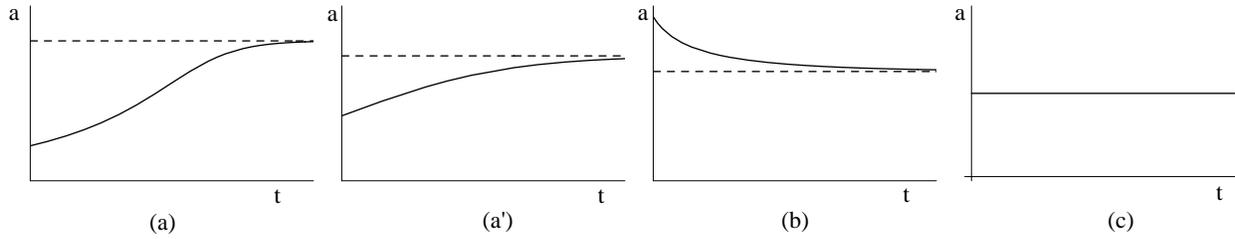


Fig. 2.38: Los diferentes tipos de curvas solución para $0 \leq p < 2$ y sus clasificaciones. Las curvas tipo (a) se dividen en dos dependiendo de la ocurrencia de un cambio de concavidad. El punto de equilibrio se muestra con una línea punteada.

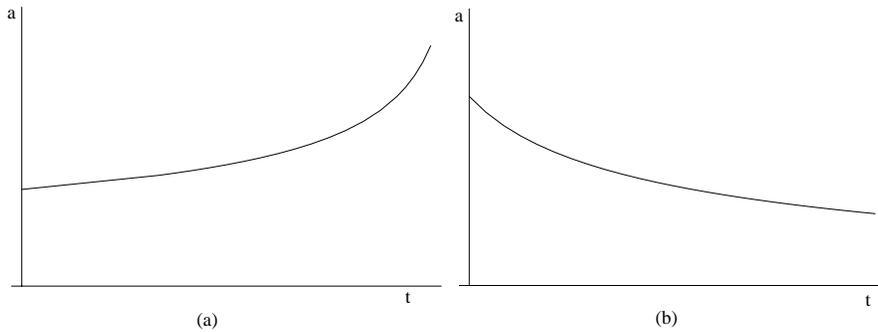


Fig. 2.39: Tipo de curvas solución para $p = 2$. Caso (a), $f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} > 0$. Caso (b), $f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} < 0$.

cero, no hay posibilidad de que exista un punto especial a^* , tal que $a(t) = a^*$ para todo t ; ni tampoco es posible tener cambios de concavidad. Esta situación es de especial interés, ya que permite integrar la solución de manera sencilla. De ello veremos que en el caso $f(p) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} > 0$ de hecho es posible que la amplitud se vaya a infinito en un tiempo finito, como veremos enseguida. Las curvas solución se muestran de manera esquemática en la Fig. 2.39, mostrando ambos casos.

En el caso $p = 2$ tenemos la ecuación diferencial

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0} \left(f(2) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} \right) a^4$$

con $f(2) = \frac{6}{5\pi^{1/2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6\sqrt{3}} \right) \approx 0.01948$. Esta ecuación se integra de manera sencilla. De ello resulta

$$a(t) = \frac{a_0}{\left(1 - 3a_0^2 \kappa_0^{1/2} \left(f(2) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} \right) t \right)}.$$

Es por esto que en el caso de amplitud creciente, $f(2) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} > 0$, tendremos una singularidad en la amplitud al tiempo

$$t = \frac{1}{3a_0^2 \kappa_0^{1/2}} \left(f(2) - \nu \frac{\kappa_0}{a_0^2} \right)^{-1}.$$

Dada la relación entre la amplitud $a(t)$ y la razón de decaimiento espacial $\kappa(t)$, $a^2 \kappa^{-1} = a_0^2 \kappa_0^{-1}$; una singularidad en $a(t)$ implica también un comportamiento análogo en la función $\kappa(t)$, por lo que tendremos una onda cuya altura crece indefinidamente, haciéndose cada vez más angosta de forma simultánea.

Este resultado es muy interesante ya que está relacionado directamente con el trabajo de Benney y Sipcic, [33]. Ahí, los autores estudian la ecuación modificada de ZK, que resulta de tomar $p = 2$. Si el lector recuerda, en la Sección 1.6 se comentó que en dicho trabajo, los autores analizan numéricamente la colisión de dos ondas solitarias que avanzan en el mismo sentido. De ello, resulta que una de las dos adquiere una inestabilidad que la lleva a crecer en amplitud hasta alcanzar una singularidad en tiempo finito. Nuestro sistema de ecuaciones ordinarias nos dice que esto es de esperarse, aunque en esto no se ha incluido ninguna interacción con otra onda solitaria. Del trabajo [33] no es claro si es posible obtener esta divergencia para ondas sin interacción.

En el caso $2 < p < 10.44$, tenemos nuevamente un punto especial a^* ; tal que si la amplitud comienza en ese punto en $t = 0$, entonces tendrá el mismo valor para todo tiempo futuro. Dicho punto se calcula pidiendo $\dot{a}(0) = 0$ y está dado por $a^* \equiv \left(\frac{\nu \kappa_0}{f(p)} \right)^{1/p}$. Existen también los dos puntos de equilibrio $a = 0$ y $a_{\text{eq}} = \left(\frac{\nu \kappa_0}{f(p) a_0^2} \right)^{\frac{1}{p-2}}$. El punto a^* marca un cambio de comportamiento, si $a_0 > a^*$ entonces la solución crece indefinidamente y de forma monótona. Esto se deduce al notar que si $a^* < a_0$ entonces $a_{\text{eq}} < a_0$, de forma que el punto de equilibrio está por debajo de la condición inicial. De esta manera, las ondas que comiencen con condiciones iniciales por arriba de a^* crecen hasta tener una amplitud infinita, mientras que aquellas ondas que partan con tamaños iniciales menores, tienden a cero. La tercera posibilidad es que $a_0 = a^*$ de lo que resulta una amplitud constante para cualquier tiempo. No hay comportamiento de tipo solitón. Las curvas solución se muestran de manera esquemática en la Fig. 2.40.

Finalmente, para el caso $10.44 < p$, tenemos que $f(p)$ es negativa; de donde \dot{a} también lo es y la solución siempre tiende a cero, sin importar su condición inicial. No existe un punto especial a^* para el cual corresponda una variación inicial nula, $\dot{a}(0) = 0$, ni tampoco es posible la ocurrencia de cambios de concavidad. La Fig. 2.41 muestra este tipo de comportamiento.

Del análisis precedente concluimos que el comportamiento de tipo solitón sólo es posible en el caso en que $0 \leq p < 2$, dentro de la aproximación obtenida a partir de las leyes de conservación.

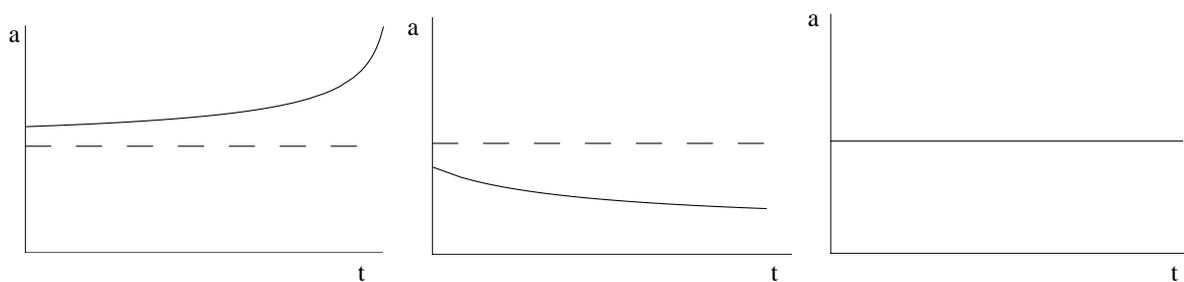


Fig. 2.40: Los tres tipos de curvas solución para $2 < p < 10.44$. El punto que separa el tipo de comportamiento, a^* , se muestra con línea punteada.

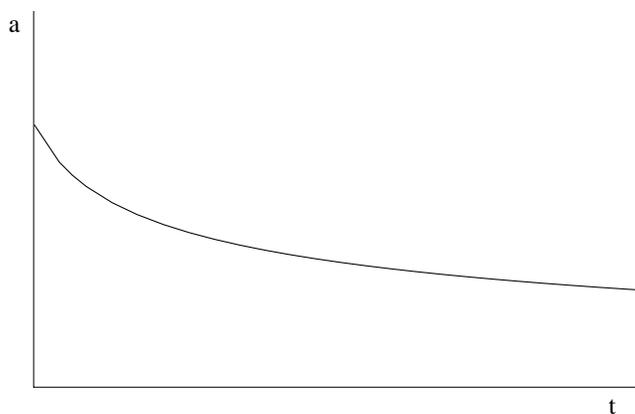


Fig. 2.41: Curva solución típica para $10.44 < p$.

Sistema de ecuaciones al tomar en cuenta a la radiación

Procedemos ahora a obtener un sistema de ecuaciones que incorporen a la radiación en la descripción de la evolución de la onda coherente, para la ecuación generalizada de ZK (gZK). Seguiremos de cerca el desarrollo de la sección 2.3.2 en el caso análogo.

- Ecuaciones correspondientes a la conservación de masa

Al igual que en el caso $p = 1$, obtendremos dos ecuaciones a partir de la conservación de masa. La primera ecuación se obtuvo ya antes y se basa en que sabemos que la radiación está confinada entre las cústicas . Dicha ecuación se obtuvo integrando la forma diferencial de la conservación de masa fuera de las cústicas, en la región que antes llamamos $\Gamma(t)$, despreciando a u_1 con respecto a u_0 .

La segunda ecuación resulta de considerar la conservación de la masa en todo \mathbb{R}^2 , tal como se muestra ahora. De la conservación de masa sabemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = 0,$$

por lo que si escribimos a $u(x, y, t)$ como $u = u_0 + u_1$ tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx dy + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx dy = \frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + \frac{dM_1}{dt} = 0,$$

si llamamos M_1 a la masa total de u_1 , i.e. la integral de dicha función en todo \mathbb{R}^2 . De esta manera la conservación de masa nos proporciona el par de ecuaciones

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \tag{2.59a}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + \frac{dM_1}{dt} = 0. \tag{2.59b}$$

Notamos que esto generaliza lo obtenido antes, reduciéndose la primera de ellas a la ecuación previamente hallada en (2.29a) si hacemos $p = 1$.

Se hace ahora la suposición de que la radiación se acumula formando una región plana con un cierto valor distinto de cero; esta estructura es el ‘*flat shelf*’ discutido antes. Supondremos que esta estructura se forma justo detrás de la onda coherente y entre las cústicas; además, se mueve de manera rígida con ella. La evolución de la onda coherente tendrá el aspecto del avance de una estructura acampanada, con una estructura plana adherida detrás de ella.

Conservando la notación usada en el caso $p = 1$, consideramos que el *flat shelf* se forma en una región entre las cústicas y que tiene por frontera a una curva $C(t)$; recordamos que esta estructura avanza a la misma velocidad que la onda coherente, esto es, a la velocidad

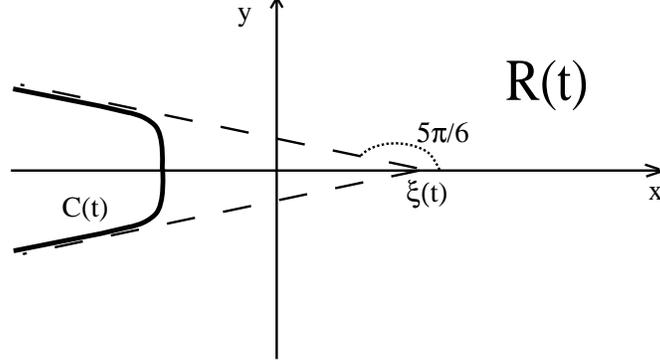


Fig. 2.42: La región $R(t)$, cuya frontera es la curva continua $C(t)$. Se muestran también las caústicas con líneas punteadas.

$V(t)$. Ver Fig. 2.42. A la región por delante de $C(t)$ la llamamos $R(t)$ y calculamos ahora el cambio de la masa en dicha región. Si escribimos a la curva $C(t)$ como $x = \tilde{x}(y, t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} u dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} u_t dx dy - V \int_{-\infty}^{\infty} u \Big|_{x=\tilde{x}(y,t)} dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y \right] dx dy - V \int_{C(t)} u dy \\ &= \int_{C(t)} \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} + u_{yy} \right) dy - V \int_{C(t)} u dy, \end{aligned}$$

después de utilizar que u satisface la ecuación gZK.

Tomamos a $u = u_{\infty} = cte.$ sobre una porción de la curva $C(t)$ y detrás de ella. No podemos exigir que u sea constante en toda la región atrás de la curva $C(t)$, ni tampoco sobre la curva completa, ya que debe decaer a cero en infinito. Además, tomaremos $|u_{\infty}| \ll 1$ y también $|u_{xx}| \ll 1$, $|u_{yy}| \ll 1$ sobre $C(t)$. Si consideramos que $u = u_{\infty}$ sobre una porción de $C(t)$ que tiene una proyección sobre el eje y de longitud l , tendremos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy \approx - \int_{C(t)} \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + V u \right) dy \approx -l \left(\frac{1}{p+1} u_{\infty}^{p+1} + V u_{\infty} \right).$$

Mediante algunas aproximaciones adicionales podemos relacionar esto con las ecuaciones obtenidas antes

$$\int_{R(t)} u dx dy \simeq \int_{R(t)} u_0 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx dy = \frac{\pi a}{\kappa}.$$

De manera que

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + l u_\infty \left(V + \frac{u_\infty^p}{p+1} \right) = 0. \quad (2.60)$$

A diferencia del caso $p = 1$, tener $|u_\infty| \ll 1$ no garantiza que el término con u_∞^{p+1} sea pequeño comparado con u_∞ , como ocurre en el caso $p \sim 0$.

- Ecuación correspondiente a la conservación de momento

Para obtener una ecuación que tome en cuenta la conservación del momento y además incorpore el efecto de la radiación, seguimos el mismo procedimiento que en el caso de la masa. Calculando el cambio de la cantidad de momento en la región $R(t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx dy - V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x=\tilde{x}(y,t)} dy.$$

Usando la forma diferencial de la conservación del momento para la ecuación gZK, ecuación (2.46), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{p+2} u^{p+2} + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 \right)_x + (u u_{xy})_y \right] dx dy \\ &\quad - V \int_{C(t)} \frac{1}{2} u^2 dy \\ &= \int_{C(t)} \left(\frac{1}{p+2} u^{p+2} + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2, \quad u u_{xy} \right) \cdot \hat{n} ds - V \int_{C(t)} \frac{1}{2} u^2 dy, \end{aligned}$$

Nuevamente hacemos $u = u_\infty$ sobre el *flat shelf* y también sobre una porción de la curva $C(t)$, donde u_∞ es pequeño; si sobre $C(t)$ las derivadas u_{xx} , u_{xy} , u_x y u_y también lo son, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy \approx -l \left(\frac{u_\infty^{p+2}}{p+2} + V \frac{1}{2} u_\infty^2 \right).$$

Al igual que en el caso de la masa, podemos aproximar

$$\int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{R(t)} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy = \frac{\pi a^2}{4\kappa},$$

de manera que tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} = -l u_\infty^2 \left(\frac{1}{2} V + \frac{u_\infty^p}{p+2} \right). \quad (2.61)$$

Al igual que en el caso de la masa, tenemos en este caso que el término u_∞^{p+2} no es necesariamente despreciable con respecto a u_∞^2 , como ocurre para $p \sim 0$.

En un primer caso, no se hacen nuevas consideraciones sobre la velocidad de la onda coherente y se conserva la expresión encontrada en el caso sin radiación, ecuación (2.55).

De esta forma, el sistema de ecuaciones que aproxima la evolución de la onda coherente en el caso con radiación es

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d a}{dt \kappa} - \frac{1}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.62a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + l u_\infty \left(V + \frac{u_\infty^p}{p+1} \right) = 0, \quad (2.62b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} + l u_\infty^2 \left(\frac{1}{2} V + \frac{u_\infty^p}{p+2} \right) = 0, \quad (2.62c)$$

$$V - 4 \left(\frac{a^p}{(p+2)^2} - \kappa \right) = 0. \quad (2.62d)$$

Mientras que en el caso de $p = 1$ se reducía el sistema a dos ecuaciones eliminando V y u_∞ , en este caso se puede reducir de manera sencilla solamente a tres al eliminar V , la cantidad u_∞ aparece de una forma más complicada que antes y no vale la pena simplificar más que eso. Lo anterior se puede resolver numéricamente pensando en u_∞ como una función adicional del tiempo.

Esta vez no se cuentan con resultados numéricos directamente de gZK para algún valor de p y por lo tanto no se tienen datos para comparar con (2.62). A pesar de ello, con el propósito de un futuro trabajo numérico, anticipamos que será necesario adoptar una forma más general para la velocidad y hacemos eso ahora.

Mejora en la aproximación de la velocidad

Al proponer una onda viajera como solución para la ecuación gZK y después de integrar una vez se llega a

$$-cu + \frac{\delta}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (2.63)$$

Al considerar que u y todas sus derivadas se anulan al infinito.

La integral variacional correspondiente a la ecuación (2.63) es

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - \frac{\delta}{(p+1)(p+2)} u^{p+2} + \frac{c}{2} u^2 \right] dx dy. \quad (2.64)$$

Recordamos al lector la interpretación de (2.64). Una auténtica onda viajera de la ecuación gZK necesariamente extremiza a la cantidad A . Si en cambio evaluamos a A

no en una auténtica solución de gZK, sino en una que sea aproximada y que tenga ciertos parámetros aparentemente libres, podremos encontrar de ello la mejor elección de los parámetros libres y de esta forma, la mejor solución aproximada; proponemos como solución aproximada a $u_0 = ae^{-\kappa((x-ct)^2+y^2)}$. La mejor elección de los parámetros se logra pidiendo que $A(u)$ se extremice no al variar la función u sino con respecto a a y κ . Esto nos dará la mejor aproximación Gaussiana del tipo $u_0 = ae^{-\kappa((x-ct)^2+y^2)}$.

Al evaluar a A en la función u_0 , se obtiene

$$A(u_0) = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\pi\delta}{(p+1)(p+2)^2} \frac{a^{p+2}}{\kappa} + \frac{\pi c}{4} \frac{a^2}{\kappa}$$

las ecuaciones $A_a = 0$ y $A_\kappa = 0$ son

$$c = \frac{2\delta}{(p+1)(p+2)} a^p - 2\kappa, \quad a^p = \frac{(p+1)(p+2)^2}{\delta p} \kappa \quad (2.65)$$

y podemos encontrar a la velocidad c como función de a exclusivamente

$$c = \frac{4\delta}{(p+1)(p+2)^2} a^p. \quad (2.66)$$

Los anteriores valores de los parámetros son entonces los que debe tener la mejor aproximación Gaussiana para una onda viajera de gZK y para esa solución aproximada, permanecerá libre solamente uno de los tres parámetros

Como antes, se adopta ahora una expresión paramétrica de la velocidad de la onda, de manera que para ciertos valores de los parámetros se reduzca a c recién hallada en (2.65). Siguiendo el procedimiento hecho antes para ZK, la nueva velocidad con el parámetro μ es

$$C = \frac{2\delta}{(p+1)(p+2)} (1 + \mu)a^p - 2(1 + (p+2)\mu)\kappa. \quad (2.67)$$

que se reduce al valor de c de (2.65) si $\mu = 0$.

Sin embargo, a diferencia del caso $p = 1$ en que la velocidad C generalizaba tanto a c como a V , en este caso C puede coincidir con V dada en (2.62d) solamente cuando $p = 1$, como se comprueba fácilmente.

Olvidando ese detalle, dado que C nos proporciona un parámetro libre adicional, adoptamos a C como una mejor expresión para la velocidad de la onda coherente y por ello (incorporando además la δ que multiplica al término no lineal de gZK) el sistema de ecuaciones se modifica a

$$\frac{5\pi^{1/2}}{6} \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa} - \frac{\delta}{2(p+1)^{3/2}} \frac{a^{p+1}}{\kappa^{1/2}} + \frac{C}{2} \frac{a}{\kappa^{1/2}} + a\kappa^{1/2} = 0, \quad (2.68a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a}{\kappa} + l u_{\infty} \left(C + \frac{u_{\infty}^p}{p+1} \right) = 0, \quad (2.68b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi a^2}{4\kappa} + l u_{\infty}^2 \left(\frac{1}{2} C + \frac{u_{\infty}^p}{p+2} \right) = 0, \quad (2.68c)$$

$$C - \frac{2\delta}{(p+1)(p+2)} (1 + \mu) a^p + 2(1 + (p+2)\mu) \kappa = 0. \quad (2.68d)$$

El sistema anterior posee ahora dos parámetros libres, l y μ y por lo tanto tiene mayores posibilidades de lograr un buen ajuste con una simulación numérica de gZK, para el valor de p deseado.

Capítulo 3

Soluciones Modulacionales en tres dimensiones

3.1 Evolución de una onda localizada gobernada por la ecuación Zakharov-Kuznetsov

3.1.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK

Obtener soluciones moduladas como hasta ahora es posible en el caso de tres dimensiones, no existe alguna dificultad inherente excepto el cálculo de integrales triples en lugar de dobles. El problema con tres dimensiones yace en la obtención de resultados numéricos. En lugar de tener una malla bidimensional para las variables espaciales, se tiene una malla cúbica y eso acarrea grandes dificultades. Sin embargo, motivados por los resultados obtenidos hasta ahora, notando que la modulación de soluciones tiene gran éxito para dos dimensiones, se continúa con el caso de tres dimensiones de manera paralela a lo antes expuesto.

Obtendremos en primera instancia las leyes de conservación de la ecuación de ZK en ese número de dimensiones. Denotamos, al igual que antes, por u a la función que satisface la ecuación ZK en tres dimensiones $u = u(x, y, z, t)$, esto es

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0. \quad (3.1)$$

La conservación de masa

A partir de la ecuación ZK en tres dimensiones es posible ver que la masa total de la onda es una cantidad conservada. La masa de la onda en tres dimensiones se define como

$$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz,$$

debemos pedir que u decaiga lo suficientemente rápido cuando $x, y, z \rightarrow \pm\infty$ para obtener un valor finito. Escribimos a la ecuación ZK (3.1) en la forma

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z = 0, \quad (3.2)$$

que es la forma diferencial de la conservación de masa. De dicha expresión se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x - (u_{xy})_y - (u_{xz})_z \right] dx dy dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

debido a que u y sus derivadas decaen a cero en los extremos. De esta manera tenemos la versión integral de la conservación de masa

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz = 0. \quad (3.3)$$

La conservación de momento

Ahora consideramos la conservación del momento de la onda. Al igual que en dos dimensiones, podemos escribir al momento del sistema como

$$P \equiv \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz, \quad (3.4)$$

denotando con X , Y y Z a las coordenadas del centro de masa. Estas coordenadas están dadas por

$$X = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz}, \quad Y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz}, \quad Z = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z u dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz}.$$

Calculamos \dot{X} , \dot{Y} y \dot{Z}

$$\dot{X} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u_t dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz},$$

notando que el denominador es constante, como se muestra en (3.3). A partir de (3.2) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x u_t dx dy dz = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x + x(u_{xy})_y + x(u_{xz})_z \right] dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x (u^2/2 + u_{xx}) \Big|_{-\infty}^{\infty} dydz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xu_{xy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx dz \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xu_{xz} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right) dx dy dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy dz,
\end{aligned}$$

después de integrar por partes y de recordar que u y sus derivadas se anulan al infinito.

Por otro lado, tenemos para \dot{Y}

$$\dot{Y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u_t dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz}.$$

Usando que u satisface a la ecuación ZK, como se hizo para \dot{X}

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y u_t dx dy dz \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \right)_x + y (u_{xy})_y + y (u_{xz})_z dx dy dz \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y (u^2/2 + u_{xx}) \Big|_{-\infty}^{\infty} dy dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y (u_{yy} + u_{zz}) \Big|_{-\infty}^{\infty} dy dz = 0.
\end{aligned}$$

El intercambiar z por y en el último cálculo (debido a que existe simetría con respecto a esas dos coordenadas) revela que $\dot{Z} = 0$. Por lo anterior, el centro de masa de la onda se desplaza exclusivamente en dirección x . Usando las expresiones para \dot{X} , \dot{Y} y \dot{Z} , podemos escribir el momento de la onda como

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy dz, \quad (3.5)$$

siguiendo el caso de dos dimensiones, veremos que lo anterior es constante a partir de la ecuación ZK.

Multiplicando a (3.1) por u tenemos

$$\begin{aligned}
uu_t + u^2 u_x + uu_{xxx} + uu_{xyy} + uu_{xzz} &= \left(\frac{1}{2}u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} \right)_x - u_x u_{xx} + (uu_{xy})_y \\
&\quad - u_y u_{xy} + (uu_{xz})_z - u_z u_{xz} \\
&= \left(\frac{1}{2}u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2 - \frac{1}{2}u_z^2 \right)_x \\
&\quad + (uu_{xy})_y + (uu_{xz})_z = 0.
\end{aligned}$$

La versión diferencial de la conservación de momento se escribe como

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2 - \frac{1}{2}u_z^2\right)_x + (uu_{xy})_y + (uu_{xz})_z = 0. \quad (3.6)$$

De (3.6) se sigue la conservación de P . Usando (3.5) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2 - \frac{1}{2}u_z^2\right)_x + (uu_{xy})_y + (uu_{xz})_z dx dy dz = 0, \end{aligned}$$

obteniendo así la expresión integral para la conservación de momento

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx dy dz = 0. \quad (3.7)$$

3.1.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación

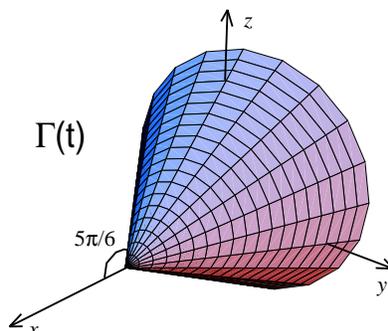
En esta sección, obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describan la evolución de una onda principal gobernada por la ecuación ZK en tres dimensiones. Será el análogo a lo hecho ya en dos dimensiones, en la sección 2.3.2.

Al igual que antes, proponemos una solución a la ecuación ZK que se compone de dos partes: una parte con estructura localizada la cual se representa por una función $u_0(x, y, z, t)$ y que llamaremos la onda principal; más una segunda parte que representa la radiación desprendida por la onda principal y que se representa por una función $u_1(x, y, z, t)$. La condición inicial para $u(x, y, z, t)$ es justamente $u_0(x, y, 0)$, por lo que al inicio no hay radiación. Usando las leyes de conservación estudiadas en la sección 3.1.1 llegaremos a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describan de manera aproximada la evolución de la onda principal $u_0(x, y, z, t)$. Primeramente, encontraremos un sistema de ecuaciones que describen la evolución de la onda principal ignorando por completo la radiación; en este caso se supone que la amplitud de la radiación es lo suficientemente pequeña como para despreciarla. Después de ello, estudiaremos el caso en que la radiación no es completamente despreciable y encontraremos así un sistema de ecuaciones que describen a la onda principal que incorporan una corrección debido al efecto de la radiación.

Sistema de ecuaciones sin tomar en cuenta a la radiación

Proponemos entonces como solución de la ecuación ZK

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0,$$

Fig. 3.1: La región $\Gamma(t)$.

a la función $u(x, y, t) = u_0(x, y, z, t) + u_1(x, y, z, t)$, con u_0 dado por

$$u_0(x, y, z, t) = a(t)e^{-\kappa(t)((x-\xi(t))^2+y^2+z^2)}; \quad (3.8)$$

es decir la onda principal tiene un perfil Gaussiano y se propaga en dirección x . En el caso de una solución de tipo solitón, hemos visto que la onda conserva su forma, por lo que su amplitud, velocidad y ancho son constantes. Al igual que en dos dimensiones, las funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ toman en cuenta que la onda principal puede deformarse cambiando las cantidades mencionadas antes (conservamos la manera de denotar a dichas funciones, de manera de hacer el desarrollo lo más simple posible). Nuevamente $V(t) \equiv \dot{\xi}$ es la velocidad de la onda principal y es también función del tiempo. Es indispensable considerar siempre el caso $\kappa > 0$, de manera que se tengan soluciones aceptables físicamente. A partir de las leyes de conservación se llegará a un sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, la solución de dicho sistema nos dirá entonces cómo evoluciona la onda principal $u_0(x, y, t)$. Utilizando la conservación de la masa, ecuación (3.3), encontramos ahora la primera de las ecuaciones ordinarias que modelan la evolución de u_0 .

- Ecuación correspondiente a la conservación de la masa

Se ha visto ya que la radiación desprendida por la onda principal se encuentra confinada en la región dentro de la superficie cáustica $x < \xi$, $(y^2 + z^2) < \frac{\xi-x}{\sqrt{3}}$, la cual tiene forma cónica y la llamamos $\Gamma'(t)$, igual que en el caso tratado antes. La región $\Gamma(t)$ es aquella región móvil en donde la radiación es completamente despreciable. Esta región se muestra en la Fig. 3.1.

Calculamos el cambio de la masa de la onda en la región $\Gamma(t)$ y tomamos en cuenta que $u(x, y, t)$ satisface la ecuación ZK

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} u dx dy dz \\ &= \int_{\Gamma(t)} u_t dx dy dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \Big|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} V dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z \right] dx dy dz \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} V dy dz.
\end{aligned}$$

Si consideramos ahora que en la región $\Gamma(t)$ se cumple $u_1 \simeq 0$ entonces en esa región $u \simeq u_0$ y nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &\simeq \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy \simeq -V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dy dz \\
&\quad - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Esta relación nos proporciona una ecuación diferencial ordinaria para los parámetros $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ deseada, una vez que se evalúen las integrales de arriba. Evaluando cada una de las integrales de arriba y tomando en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito, encontraremos dicha ecuación de forma explícita.

Comenzamos con la masa total en la región $\Gamma(t)$, utilizando coordenadas esféricas con origen en $(\xi, 0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} u_0 dx dy dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} a e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} dx dy dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} a e^{-\kappa(x'^2+y^2)} dx' dy dz \\
&= a \int_0^{2\pi} \int_0^{5\pi/6} \int_0^{\infty} e^{-\kappa r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= 2\pi \frac{a}{\kappa^{3/2}} \cos \theta \Big|_{5\pi/6}^0 \int_0^{\infty} e^{-\mu^2} \mu^2 d\mu = 2\pi \frac{a}{\kappa^{3/2}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\Gamma(3/2)}{2} \\
&= \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{a}{\kappa^{3/2}},
\end{aligned}$$

donde se usó la expresión para la función gamma $\frac{1}{2}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} z^{2s-1} e^{-z^2} dz$, y $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}/2$. El resultado de arriba se hubiera podido obtener de manera más sencilla de la manera siguiente: la masa total de la onda es $\frac{\pi^{3/2}a}{\kappa^{3/2}}$, mientras que el ángulo sólido subtendido por el cono desde el origen del sistema de coordenadas esféricas es $2\pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Por lo tanto la

masa en la región $\Gamma(t)$ es simplemente la masa total multiplicada por la fracción del ángulo sólido total 4π ; esto es, se debe multiplicar por un factor $\frac{1}{4\pi}2\pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La siguiente integral requerida es inmediata

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dydz &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} dydz \\ &= \frac{a}{4\kappa} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} = \frac{a}{4\kappa} \pi = \frac{\pi a}{4\kappa}. \end{aligned}$$

Finalmente la última integral requerida es

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} + u_{0yy} + u_{0zz} \right]_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dy dz. \end{aligned}$$

Si usamos ahora $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0yy} = (4a\kappa^2y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$ y $u_{0zz} = (4a\kappa^2z^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^2}{2} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a^2}{2} e^{-2\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} + (4a\kappa^2 3(y^2+z^2) - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} \right. \\ \left. + (4a\kappa^2 y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} + (4a\kappa^2 z^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} \right] dy dz \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a^2}{2} e^{-8\kappa(y^2+z^2)} + (16a\kappa^2(y^2+z^2) - 6a\kappa) e^{-4\kappa(y^2+z^2)} \right] dy dz \\ - \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{8\kappa} + 6a\kappa \frac{\pi}{4\kappa} - \frac{16a\kappa^2}{16\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 + \nu^2) e^{-\mu^2 - \nu^2} d\mu d\nu \\ = \frac{3\pi}{2} a - \frac{\pi a^2}{16\kappa} - a 2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi a^2}{16\kappa}. \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de las tres integrales calculadas en (3.9) de lo que se obtiene

$$\frac{\pi^{3/2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = \frac{\pi a^2}{16\kappa} - \frac{\pi V a}{4\kappa} - \frac{\pi}{2} a,$$

simplificando un poco

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = \frac{1}{8} \frac{a^2}{\kappa} - \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} - a. \quad (3.10)$$

Esta es la primera ecuación diferencial ordinaria que involucra a $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ ($\dot{\xi} = V(t)$). Proseguimos ahora a considerar la conservación del momento.

- Ecuación correspondiente a la conservación del momento

Consideramos la conservación del momento, ecuación (3.7). Como la amplitud de u_1 es pequeña, tomaremos a u_1^2 y $u_0 u_1$ como despreciables con respecto a u_0^2 en todo el espacio \mathbb{R}^3 , de manera que el momento se puede tomar como

$$P = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

La ecuación $\dot{P} = 0$ toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{P} &\simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} dx dy dz \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\kappa^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación del sistema deseado es:

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = 0. \quad (3.11)$$

- Ecuación correspondiente a la consideración del momento en x del momento de la onda

Como hemos visto con anterioridad, una manera de cerrar el sistema de ecuaciones para las tres incógnitas $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ es considerar el momento en x del momento de la onda en todo \mathbb{R}^3 . Esta cantidad es

$$\int_{\mathbb{R}^3} x \frac{1}{2} u^2 dx dy dz.$$

Despreciando a u_1^2 y $u_0 u_1$ con respecto a u_0^2 en todo el espacio, el cambio de la cantidad de arriba es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} x \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \simeq \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz.$$

Con la conservación del momento en forma diferencial, ecuación (3.6), se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^3} x \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \simeq - \int_{\mathbb{R}^3} x \left[\left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y + (u_0 u_{0xz})_z \right] dx dy dz.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \\ & \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{0xy} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx dz + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{0xz} \Big|_{-\infty}^{\infty} dx dy \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

al integrar por partes y tomar en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito. Evaluando cada una de las integrales de arriba, encontraremos la tercera ecuación buscada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz + \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \\ &= \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz, \end{aligned}$$

la integral que contiene al factor $x - \xi$ en el integrando es cero debido a la imparidad del mismo, ya que la integral se lleva a cabo sobre un intervalo simétrico alrededor del origen. La expresión resultante tiene por valor

$$\begin{aligned} \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz &= \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} e^{-2\kappa((x-\xi)^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz \\ &= \frac{\xi a^2}{2} \frac{\pi^{3/2}}{2^{3/2} \kappa^{3/2}} = \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}}. \end{aligned}$$

Evaluamos ahora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz,$$

para lo cual sustituimos $u_{0x} = -2a\kappa(x - \xi)e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0y} = -2a\kappa ye^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0z} = -2a\kappa ze^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$ y $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a\kappa)e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}u_0^3 + u_0u_{0xx} - \frac{1}{2}u_{0x}^2 - \frac{1}{2}u_{0y}^2 - \frac{1}{2}u_{0z}^2 \right) dx dy dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a^3}{3}e^{-3\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} + (4a^2\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a^2\kappa)e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2}4a^2\kappa^2(x - \xi)^2e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} - \frac{1}{2}4a^2\kappa^2y^2e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}4a^2\kappa^2z^2e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \right) dx dy dz = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{3\kappa} \right)^{3/2} + 4a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} \\
 &\quad - 2a^2\kappa \frac{1}{(2\kappa)^{3/2}} \frac{8\Gamma(1/2)^3}{8} - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} \\
 &\quad - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} \\
 &= \frac{\pi^{3/2}}{9\sqrt{3}} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(3/2)\Gamma(1/2)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(1/2)^3 - 3 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(3/2)\Gamma(1/2)^2 \\
 &= \frac{\pi^{3/2}}{9\sqrt{3}} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(1/2)^3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(3/2)\Gamma(1/2)^2 \\
 &= \frac{\pi^{3/2}}{9\sqrt{3}} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} - \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \\
 &= \frac{\pi^{3/2}}{9\sqrt{3}} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - \frac{5\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de las integrales

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}} = \frac{\pi^{3/2}}{9\sqrt{3}} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - \frac{5\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}},$$

y tenemos ya la tercera ecuación del sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}} = \frac{4\sqrt{6}}{27} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}}. \tag{3.12}$$

Hemos obtenido ya tres ecuaciones para las tres funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, escribimos estas ecuaciones de nuevo ahora

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{\kappa} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} + a = 0, \tag{3.13a}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = 0, \quad (3.13b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}} - \frac{4\sqrt{6}}{27} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} + 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} = 0. \quad (3.13c)$$

De (3.13) vemos que se obtiene un sistema de ecuaciones similar al obtenido para dos dimensiones pero que los factores numéricos y los exponentes cambian un poco.

De la segunda ecuación, (3.13b), se obtiene de inmediato

$$\frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = \frac{a_0^2}{\kappa_0^{3/2}}, \quad (3.14)$$

donde a_0 y κ_0 son el valor de las funciones $a(t)$ y $\kappa(t)$ al tiempo $t = 0$.

Si usamos (3.13b) y (3.13c) se obtiene

$$\frac{d\xi}{dt} = V = \frac{\kappa^{3/2}}{a^2} \left(\frac{4\sqrt{6}}{27} \frac{a^3}{\kappa^{3/2}} - 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \right) = \frac{4\sqrt{6}}{27} a - 5\kappa,$$

así, la velocidad de la onda principal está dada por

$$V = \frac{4\sqrt{6}}{27} a - 5\kappa. \quad (3.15)$$

Si utilizamos (3.15) en (3.13a) se obtiene

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = \frac{1}{8} \frac{a^2}{\kappa} - \frac{1}{2} \frac{a}{\kappa} \left(\frac{4\sqrt{6}}{27} a - 5\kappa \right) - a = - \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8} \right) \frac{a^2}{\kappa} + \frac{3}{2} a,$$

es decir

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = - \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8} \right) \frac{a^2}{\kappa} + \frac{3}{2} a. \quad (3.16)$$

Llegamos entonces a dos ecuaciones (3.13b) y (3.16) para las funciones del tiempo $a(t)$ y $\kappa(t)$.

Podemos ahora obtener una ecuación para la función $a(t)$ exclusivamente. Usando (3.14) y (3.16)

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a_0^2}{\kappa_0^{3/2}} \frac{1}{a} = - \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8} \right) \frac{a_0^{4/3}}{\kappa_0} a^{2/3} + \frac{3}{2} a,$$

si despejamos \dot{a}

$$\dot{a} = \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} \left[\left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8}\right) \frac{a_0^{4/3}}{\kappa_0} - \frac{3}{2} a^{1/3} \right] a^{8/3}. \quad (3.17)$$

Podemos escribir la ecuación en forma general

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^{1/3} \right) a^{8/3}, \quad (3.18)$$

con las definiciones $\alpha = \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8}\right) > 0$ y $\beta = \frac{3}{2} \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} > 0$ en las cuales, al igual que en dos dimensiones, no se incluyen las cantidades que dependen de las condiciones iniciales ya que dichas cantidades deben considerarse con cuidado al proceder en el análisis. Como se mencionó en el caso de dos dimensiones, el que las condiciones iniciales de las funciones $a(t)$ y $\kappa(t)$ aparezcan en las ecuaciones diferenciales mismas produce que para cada pareja de condiciones iniciales distintas, a_0 y κ_0 , tendremos en realidad una ecuación diferencial diferente. La ecuación (3.18) tiene el par de soluciones estacionarias $a = 0$ y $a_{\text{eq}} = \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \approx 0.00005328 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$. Cada curva solución con amplitud inicial no cero tenderá al valor estacionario $a_{\text{eq}} = \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3}$; sin embargo, como éste depende de las condiciones iniciales, este valor es distinto para cada curva y por lo tanto cada curva tendrá su propio valor de equilibrio. Las ondas principales a tiempos grandes adquieren una amplitud a_{eq} la cual crece a la cuarta potencia con a_0 y es inversamente proporcional al cubo de κ_0 . De (3.18), se deduce que ocurre un cambio de concavidad al llegar a $\left(\frac{8\alpha}{9\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$, pero al igual que en caso bidimensional, no todas las curvas solución efectúan dicho cambio. Escribimos a la ecuación (3.18) como

$$\dot{a} = \beta \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} \left(\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a^{1/3} \right) a^{8/3}. \quad (3.19)$$

En tres dimensiones también existe un punto especial que tiene el efecto de que la amplitud permanece constante siempre; esto ocurre cuando el punto de equilibrio y la condición inicial coinciden, a éste lo llamamos a^* y se determina cuando $\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3} = 0$, o bien si $a_0 = a^* \equiv \frac{\beta}{\alpha} \kappa_0$.

Hay tres posibilidades para el comportamiento de las soluciones de (3.18): (a) el primer tipo consta de soluciones siempre crecientes y que tienden asintóticamente al punto de equilibrio $a_{\text{eq}} = \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3}$, esto obviamente ocurre cuando $\dot{a}(0) > 0$, o bien si $\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3} > 0$. El caso (b) se compone de soluciones monótonas decrecientes y que asintóticamente se aproximan a

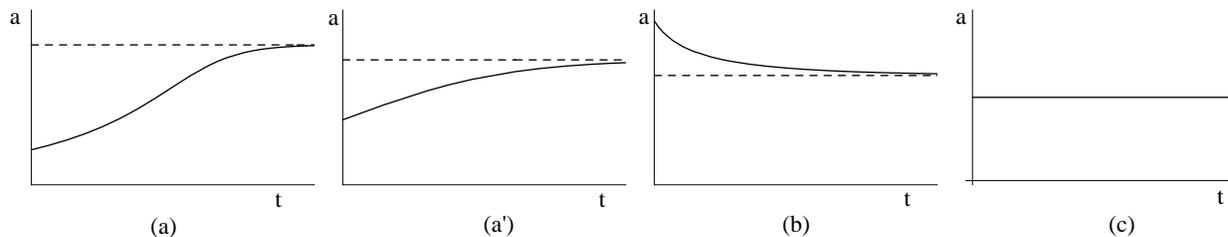


Fig. 3.2: Tipos de comportamiento posibles para las soluciones de (3.18). El caso (a) se divide en dos: aquellas soluciones que tienen cambio de concavidad y aquellas que no.

a_{eq} . Este caso ocurre si $\dot{a}(0) < 0$, o bien si $\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3} < 0$. El último caso, (c), es el caso especial en que $\dot{a}(0) = 0$. De la ecuación diferencial (3.18) se llega a que $\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3} = 0$. Ahora la onda principal viaja de manera que preserva su forma. Ver Fig. 3.2.

Los tres tipos de soluciones antes expuestas abarcan completamente las posibilidades que (3.18) permite; sin embargo, cabe mencionar que en el caso (a) tenemos dos posibilidades, el de aquellas soluciones que efectúen un cambio de concavidad y aquellas que no. Para ver esto, calculamos \ddot{a} a partir de (3.18)

$$\ddot{a} = \beta^2 \frac{\kappa_0^3}{a_0^4} \left(\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3} \right) \left(\frac{8\alpha a_0^{4/3}}{3\beta \kappa_0} - 3a_0^{1/3} \right) a^{13/3}.$$

Como se ha visto, $a = 0$ y $a = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ no representan cambios de concavidad ya que son ambos puntos de equilibrio. En cambio el punto $a = \left(\frac{8\alpha}{9\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ marca un cambio de concavidad de las soluciones. Debido a que está por debajo del punto de equilibrio, para las soluciones que son monótonas crecientes, llamado caso (a) anteriormente, la condición inicial o bien se encuentra por debajo del punto de cambio de concavidad o por arriba de él. De ocurrir lo primero, tendremos un cambio de concavidad, mientras que si la condición inicial está por arriba del punto de cambio de concavidad no habrá tal.

Llevamos ahora a cabo un análisis de las soluciones de (3.18) en el caso en que κ_0 es fija, de igual manera en que se realizó anteriormente para el caso bidimensional. Es necesario entender bajo qué condiciones $a(t)$ es creciente o decreciente. A partir de (3.19), vemos que el factor $\left(\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3}\right)$ evaluado en $t = 0$, i.e. $\left(\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0} - a_0^{1/3}\right)$, es quien lo determina. Observando la Fig. 3.3 se deduce que este factor es negativo entre $0 < a_0 < \frac{\beta}{\alpha} \kappa_0$, por lo que curvas con condiciones iniciales en ese intervalo serán soluciones decrecientes. Por otro lado, para $\frac{\beta}{\alpha} \kappa_0 < a_0$, este factor es positivo y las soluciones son por lo tanto crecientes.

Visualizando las soluciones en la Fig. 3.3(b), en el primero caso, la amplitud de la onda

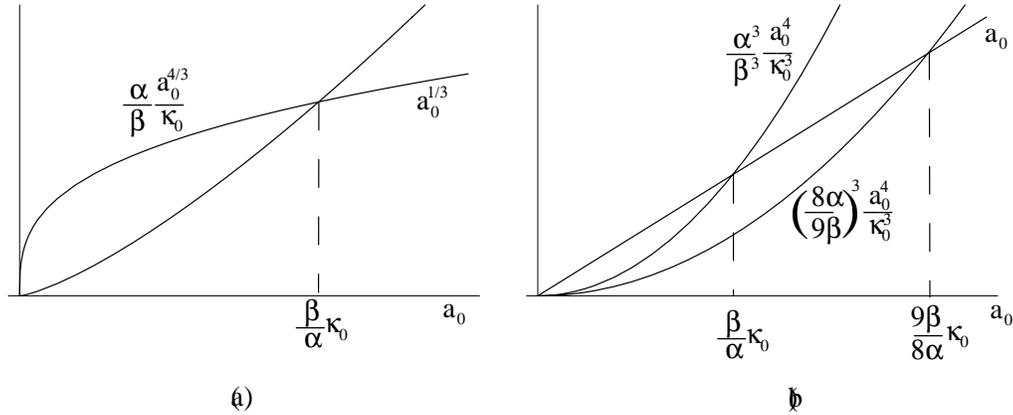


Fig. 3.3: En (a) se muestra una gráfica de $\frac{\alpha a_0^{4/3}}{\beta \kappa_0}$ y $a_0^{1/3}$. En (b) tenemos la gráfica de las funciones a_0 junto con $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ y $\left(\frac{8\alpha}{9\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$.

parte de la recta $a = a_0$ y se mueve verticalmente hacia abajo hasta alcanzar la curva $a = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ en un tiempo infinito. En el segundo caso, para $\frac{\beta}{\alpha} \kappa_0 < a_0$, la amplitud se mueve verticalmente hacia arriba partiendo de la recta $a = a_0$ e igualmente se aproxima a la parábola cuarta $a = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ de forma asintótica. La recta vertical $a_0 = \frac{\beta}{\alpha} \kappa_0$ separa a las soluciones decrecientes de las crecientes.

Al igual que en dos dimensiones, algunas de las soluciones crecientes efectúan un cambio de concavidad, mientras que otras crecen siempre con la misma concavidad. Hemos visto que el cambio de concavidad se da en $a = \left(\frac{8\alpha}{9\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$, curva que se muestra en la Fig. 3.3(b). De esa figura concluimos de inmediato que las curvas que inician entre $0 < a_0 < \frac{\beta}{\alpha} \kappa_0$ o entre $\frac{\beta}{\alpha} \kappa_0 < a_0 < \frac{9\beta}{8\alpha} \kappa_0$ no tienen un cambio de concavidad ya que al moverse el valor de la amplitud de forma vertical se llega antes al punto de equilibrio que al cambio de concavidad. En contraste, cuando la amplitud inicial satisface $\frac{9\beta}{8\alpha} \kappa_0 < a_0$, al moverse verticalmente la amplitud en la Fig. 3.3(b) pasará por la curva del cambio de concavidad antes de llegar a la curva que marca el punto de equilibrio y ocurrirá así un cambio de concavidad.

Ahora es posible construir gráficas cualitativas de las soluciones. En la Fig. 3.4 se muestran las soluciones de manera esquemática, tomando a κ_0 como constante. Tenemos el punto especial $a^* = \frac{\beta}{\alpha} \kappa_0$ y hemos visto que si la condición inicial tiene este valor, la amplitud se conserva constante. La recta horizontal $\frac{9\beta}{8\alpha} \kappa_0$ separa a las soluciones que efectúan un cambio de concavidad de aquéllas en las que no ocurre, tal como se mostrará anteriormente. Se observa también cómo cada curva tiene un punto de equilibrio distinto, dado por $a_{\text{eq}} =$

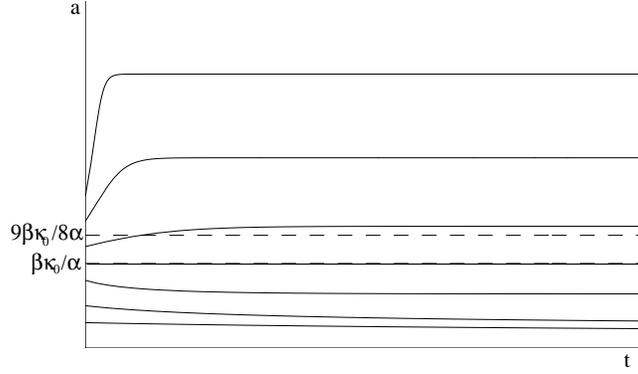


Fig. 3.4: Forma esquemática de las soluciones de (3.18). El punto $\frac{\beta}{\alpha}\kappa_0$ es el punto especial a^* y el punto $\frac{9\beta}{8\alpha}\kappa_0$ es el punto que separa las curvas que tienen cambio de concavidad de aquéllas en las que no ocurre, todas las soluciones por arriba de dicho punto llevan a cabo un cambio de concavidad.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}.$$

Además de la figura antes explicada, usando *Mathematica* se realiza una gráfica donde se muestran soluciones numéricas para $a(t)$ y diversas condiciones iniciales, ver Fig. 3.5.

Se deduce del análisis anterior, de igual manera que en dos dimensiones, que el sistema de ecuaciones que aproxima la evolución de la onda principal $u_0(x, y, z, t)$ predice que toda onda con la forma propuesta para u_0 adoptará una forma y velocidad permanentes al transcurrir el tiempo. En particular, su amplitud se aproximará a $a_{\text{eq}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3} \approx 0.00005328 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ y una razón de decaimiento espacial que tienda a $\kappa_{\text{eq}} = \kappa_0 \frac{a_{\text{eq}}^{4/3}}{a_0^{4/3}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3} \approx 0.000002004 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$, de manera que $\kappa_{\text{eq}} = \frac{\alpha}{\beta} a_{\text{eq}}$. La velocidad tenderá al valor de equilibrio $V_{\text{eq}} = \frac{4\sqrt{6}}{27} a_{\text{eq}} - 5\kappa_{\text{eq}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(\frac{4\sqrt{6}}{27} - 5\frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{a_0^4}{\kappa_0^3} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(\frac{5}{12} - \frac{8\sqrt{6}}{81}\right) \frac{a_0^4}{\kappa_0^3} \approx 0.000009310 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$. Es interesante notar que los tres valores de equilibrio, a_{eq} , κ_{eq} y V_{eq} , son todos proporcionales a la cantidad a_0^4/κ_0^3 .

La ecuación (3.18) se puede resolver de manera exacta para $a(t)$, si hacemos el cambio $w = a^{1/3}$ y separamos la integral resultante en fracciones parciales

$$\begin{aligned} t &= \int_{a_0}^{a(t)} \frac{\dot{a}}{\frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^{1/3}\right) a^{8/3}} dt = \int_{a_0^{1/3}}^{a(t)^{1/3}} \frac{3w^2 dw}{\frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} w\right) w^8} \\ &= 3 \int_{a_0^{1/3}}^{a(t)^{1/3}} \frac{\kappa_0^6 \beta^6}{a_0^8 \alpha^6 \left(\alpha \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} - \beta \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} w\right)} dw \end{aligned}$$

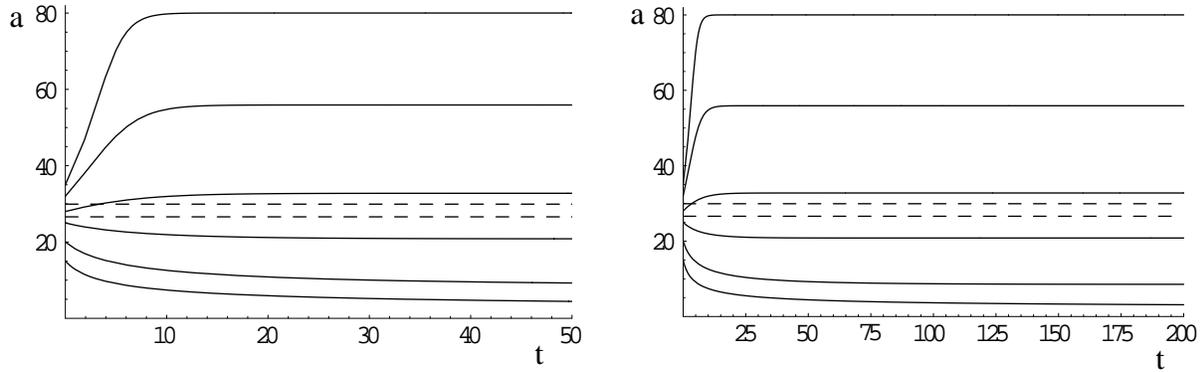


Fig. 3.5: Soluciones de (3.18) para $\alpha = 0.01707$, $\beta = 0.45352$ y $\kappa_0 = 1$ con condiciones iniciales $a_0 = 15, 20, 25, 28, 32$ y 35 , para dos escalas de tiempo distintas, lo que permite apreciar la razón de cambio de las diferentes soluciones. La línea punteada de abajo representa la solución estacionaria $a_0 = a^* \equiv \frac{\beta}{\alpha}\kappa_0 = \frac{\beta}{\alpha}$, mientras que la segunda en $\frac{9\beta}{8\alpha}\kappa_0 = \frac{9\beta}{8\alpha}$ representa el cambio de comportamiento entre soluciones que tienen un cambio de concavidad y aquéllas que no lo tienen.

$$+ 3 \int_{a_0^{1/3}}^{a(t)^{1/3}} \left[\frac{a_0^{2/3}}{\kappa_0^{1/2} \alpha w^6} + \frac{\kappa_0^{1/2} \beta}{a_0^{2/3} \alpha^2 w^5} + \frac{\kappa_0^{3/2} \beta^2}{a_0^2 \alpha^3 w^4} + \frac{\kappa_0^{5/2} \beta^3}{a_0^{10/3} \alpha^4 w^3} + \frac{\kappa_0^{7/2} \beta^4}{a_0^{14/3} \alpha^5 w^2} + \frac{\kappa_0^{9/2} \beta^5}{a_0^6 \alpha^6 w} \right] dw,$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{t}{3} = & - \frac{\kappa_0^{9/2} \beta^5}{a_0^6 \alpha^6} \ln \frac{\frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \alpha - \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} \beta a^{1/3}}{\frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \alpha - \beta \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} a_0^{1/3}} - \frac{a_0^{2/3}}{5 \kappa_0^{1/2} \alpha} \left(\frac{1}{a^{5/3}} - \frac{1}{a_0^{5/3}} \right) - \frac{\kappa_0^{1/2} \beta}{4 a_0^{2/3} \alpha^2} \left(\frac{1}{a^{4/3}} - \frac{1}{a_0^{4/3}} \right) \\ & - \frac{\kappa_0^{3/2} \beta^2}{3 a_0^2 \alpha^3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) - \frac{\kappa_0^{5/2} \beta^3}{2 a_0^{10/3} \alpha^4} \left(\frac{1}{a^{2/3}} - \frac{1}{a_0^{2/3}} \right) - \frac{\kappa_0^{7/2} \beta^4}{a_0^{14/3} \alpha^5} \left(\frac{1}{a^{1/3}} - \frac{1}{a_0^{1/3}} \right) + \frac{\kappa_0^{9/2} \beta^5}{a_0^6 \alpha^6} \ln \frac{a^{1/3}}{a_0^{1/3}}. \end{aligned}$$

La expresión anterior resulta muy complicada para extraer información de manera rápida, por lo que para entender mejor el comportamiento de $a(t)$, analizaremos a la ecuación (3.18) desde otra perspectiva; calculando la razón de cambio de la función $a(t)$: aquél que corresponde al cambio cerca de $t = 0$, cuando $a = a_0$ y por otro lado aquél que corresponde al caso en que $a \simeq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$, para tiempos largos.

Cuando a esté cerca de $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$, la razón de cambio será pequeña, ya que de (3.18) en este caso \dot{a} es chica; por ello, el tiempo característico de este cambio es largo. Calculamos

este tiempo ahora. Cuando $a \approx \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} a^{8/3} \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^{1/3} \right) \\ &= \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(\frac{\alpha^8 a_0^{32/3}}{\beta^8 \kappa_0^8} + \frac{8 \alpha^5 a_0^{20/3}}{3 \beta^5 \kappa_0^5} \left(a - \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \right) + \dots \right) \left(-\frac{\beta \kappa_0}{3 a_0^{4/3}} \frac{\beta^2 \kappa_0^2}{\alpha^2 a_0^{8/3}} \left(a - \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \right) \right) \\ &\approx -\frac{a_0^6 \alpha^6}{3 \kappa_0^{9/2} \beta^5} \left(a - \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \right) \end{aligned}$$

de esto

$$a - \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \approx \left(a'_0 - \frac{\alpha^3 a_0^4}{\beta^3 \kappa_0^3} \right) e^{-\frac{a_0^6 \alpha^6}{3 \kappa_0^{9/2} \beta^5} (t-t_0)}.$$

Denotamos con a'_0 al valor de a al tiempo t_0 ; el cual es un tiempo positivo y grande, de manera que sin importar el valor de $a(0) = a_0$, la cantidad $a(t_0) = a'_0$ esté cerca de $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \frac{a_0^4}{\kappa_0^3}$ y el desarrollo en Taylor de la ecuación diferencial sea válido.

Como en dos dimensiones, obtenemos el tiempo característico de cambio cuando $a \approx \alpha^3/\beta^3$ a partir de la solución aproximada, el cual es un tiempo largo:

$$T_{\text{largo}} = \frac{3 \kappa_0^{9/2} \beta^5}{a_0^6 \alpha^6} = \frac{3^6 (1 + \sqrt{3}/2)}{2^5 (2\sqrt{6}/27 - 1/8)^6} \frac{\kappa_0^{9/2}}{a_0^6} \approx 1,314,628,251 \frac{\kappa_0^{9/2}}{a_0^6} \sim 1,314,628,251,$$

si a_0 y κ_0 son $O(1)$.

Donde se verifica lo prolongado de este periodo de tiempo, al menos en el caso en que a_0 y κ_0 están cerca de uno.

El otro tiempo característico corresponde, como en dos dimensiones, a la razón de cambio cerca de $t = 0$, por lo que $a \simeq a_0$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} a^{8/3} \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^{1/3} \right) \\ &= \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(a_0^{8/3} + \frac{8}{3} a_0^{5/3} (a - a_0) + \dots \right) \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a_0^{1/3} - \frac{\kappa_0 \beta}{a_0^{4/3}} \frac{\beta}{3} a_0^{-2/3} (a - a_0) + \dots \right) \\ &\approx \kappa_0^{1/2} a_0^2 \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right) + 3 \kappa_0^{1/2} a_0 \left(\frac{8}{9} \alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right) (a - a_0). \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación diferencial anterior

$$a - a_0 \approx a_0 \frac{\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0}}{3 \left(\frac{8}{9} \alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right)} \left(e^{3\kappa_0^{1/2} a_0 \left(\frac{8}{9} \alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right) t} - 1 \right).$$

Cerca de $t = 0$ se cumple que

$$a - a_0 \approx \kappa_0^{1/2} a_0^2 \left(\alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right) t$$

la escala de tiempo corto, correspondiente al cambio cerca de $t = 0$ es

$$T_{\text{corto}} = \frac{1}{\kappa_0^{1/2} a_0^2 \left| \alpha - \beta \frac{\kappa_0}{a_0} \right|} = \frac{\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\kappa_0^{1/2} a_0^2 \left| \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8} \right) - \frac{3}{2} \frac{\kappa_0}{a_0} \right|} \sim 2.3, \quad \text{si } a_0 \text{ y } \kappa_0 \text{ son } O(1)$$

Vemos que para a_0 y κ_0 que sean $O(1)$, $T_{\text{corto}} \ll T_{\text{largo}}$.

Sistema de ecuaciones al tomar en cuenta a la radiación

Deseamos ahora obtener un sistema de ecuaciones que describan la evolución de la onda principal tomando en cuenta el efecto que tiene la radiación sobre ella. Al igual que en el desarrollo llevado a cabo para dos dimensiones, nos basamos nuevamente en las leyes de conservación, sin desprestigiar necesariamente a u_1 con respecto a u_0 en la región dentro de la superficie cáustica. Luego se hará una suposición acerca de la forma de u_1 que nos permita incorporar a la radiación a través de la presencia de nuevos parámetros en el sistema de ecuaciones; de manera específica, así como en el caso de dos dimensiones se supuso que u_1 era constante en una región por detrás de la onda principal ('flat shelf'), supondremos ahora que u_1 es constante en una región tridimensional por detrás de la onda principal.

- Ecuaciones correspondientes a la conservación de masa

Una vez que se incorpora el efecto de la radiación sobre la evolución de la onda principal, la conservación de masa nos permite obtener dos ecuaciones que describen la evolución de dicha onda. La primera de ellas se obtuvo antes y se basa en que sabemos que la radiación está confinada dentro de la superficie cáustica. Esta ecuación se obtuvo integrando la forma diferencial de la conservación de masa fuera de la superficie cáustica, en la región que antes llamamos $\Gamma(t)$, desprestigando a u_1 con respecto a u_0 .

La segunda ecuación que se hallará, resulta de considerar la conservación de la masa en todo \mathbb{R}^3 . De la conservación de masa sabemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz = 0,$$

por lo que si escribimos a $u(x, y, t)$ como $u = u_0 + u_1$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx dy dz + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx dy dz \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + \frac{dM_1}{dt} = 0, \end{aligned}$$

donde M_1 es la masa total de la radiación. La conservación de masa nos permite entonces encontrar el par de ecuaciones

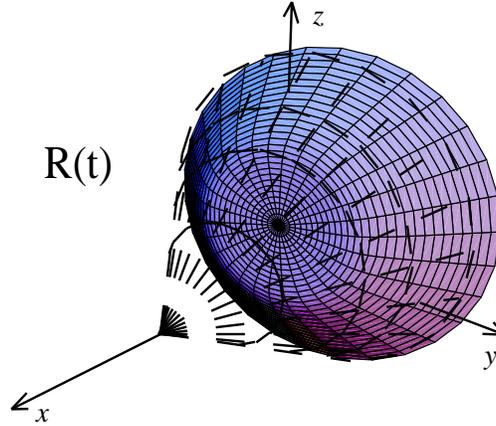
$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{\kappa} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} + a = 0, \quad (3.20a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + \frac{dM_1}{dt} = 0. \quad (3.20b)$$

Considerando la forma que adopta la radiación, se hace ahora la suposición hecha antes para dos dimensiones: la radiación se acumula formando una región en el espacio donde u es constante, con un valor distinto de cero; que es la estructura análoga al *'flat shelf'* de dos dimensiones. Supondremos que esta estructura se forma justo detrás de la onda principal y dentro de la cáustica; se mueve de manera rígida con ella. Al igual que en dos dimensiones, la evolución de la onda principal tendrá el aspecto del avance de una estructura con un perfil de amplitud acampanado (en tres dimensiones esto corresponde a tener una región en ese número de dimensiones con una amplitud máxima al centro y que decae en todas direcciones) y una estructura con amplitud constante adherida detrás de ella (es decir; una región tridimensional con amplitud constante).

Consideramos entonces que la estructura de amplitud constante se forma en una región dentro de la cáustica y que tiene por frontera a una superficie $S(t)$; consideramos que esta estructura avanza a la misma velocidad que la onda principal, esto es, a la velocidad $V(t)$. Ver Fig. 3.6. A la región por delante de esta estructura plana la llamamos $R(t)$ y calculamos ahora el cambio de la masa en dicha región. Si escribimos a la superficie $S(t)$ como $x = \tilde{x}(y, z, t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} u dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} u_t dx dy dz - V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \Big|_{x=\tilde{x}(y,z,t)} dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z \right] dx dy dz \\ &\quad - V \int_{S(t)} u dy dz \end{aligned}$$

Fig. 3.6: La región $R(t)$.

$$= - \int_{S(t)} \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx} + u_{yy}, u_{xy}, u_{xz} \right) \cdot \hat{n} dS - V \int_{S(t)} u dy dz,$$

después de recordar que u satisface la ecuación ZK en tres dimensiones. Usando la notación usual, \hat{n} es el vector normal a la superficie $S(t)$.

Usando las ideas aplicadas antes en dos dimensiones, tomamos a $u = u_\infty = cte.$ sobre una porción de la superficie $S(t)$ y detrás de ella. No es posible pedir que u sea constante en toda la región atrás de la superficie $S(t)$, ni tampoco sobre la superficie completa, es imperativo que tienda a cero en infinito. Además, tomaremos $|u_\infty| \ll 1$ y también $|u_{xx}| \ll 1$, $|u_{yy}| \ll 1$ y $|u_{zz}| \ll 1$ sobre dicha curva. Si $u = u_\infty$ sobre una porción de $S(t)$ que tiene una proyección sobre el plano $x = 0$ (o cualquiera paralelo a él) de área A , tendremos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy dz \approx -V \int_{S(t)} u dy dz \approx -VAu_\infty.$$

Entonces A es un parámetro que toma en cuenta el tamaño de la región donde u es constante y es el análogo del parámetro l , introducido en el tratamiento bidimensional.

Si hacemos algunas aproximaciones adicionales, podremos relacionar esto con las ecuaciones obtenidas antes

$$\int_{R(t)} u dx dy dz \simeq \int_{R(t)} u_0 dx dy dz \simeq \int_{\mathbb{R}^3} u_0 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}}.$$

De manera que

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + VAu_\infty = 0. \quad (3.21)$$

- Ecuación correspondiente a la conservación de momento

Seguimos el mismo procedimiento que en el caso de la masa y obtenemos una segunda ecuación a partir de la conservación del momento. Calculando el cambio de la cantidad de momento en la región $R(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx dy dz \\ &\quad - V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x=\tilde{x}(y,z,t)} dy dz. \end{aligned}$$

Mediante la forma diferencial de la conservación del momento, ecuación (3.6), nos queda

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \right)_x + (uu_{xy})_y + (uu_{xz})_z \right] dx dy dz \\ &\quad - V \int_{S(t)} \frac{1}{2} u^2 dy dz = \int_{S(t)} \left(\frac{1}{3} u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2, uu_{xy}, uu_{xz} \right) \cdot \hat{n} dS \\ &\quad - V \int_{S(t)} \frac{1}{2} u^2 dy dz, \end{aligned}$$

usando el teorema de la divergencia. Recordando que $u = u_{\infty}$ en una región por detrás de $S(t)$ y también sobre una porción de dicha superficie, donde u_{∞} es pequeño; si sobre $C(t)$ las derivadas u_{xx} , u_{xy} , u_{xz} , u_x , u_y y u_z también lo son, podemos aproximar

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \approx -VA \frac{1}{2} u_{\infty}^2.$$

Como en el caso de la masa, hacemos la aproximación

$$\int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \simeq \int_{R(t)} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \simeq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}},$$

de manera que tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}} = -VA \frac{1}{2} u_{\infty}^2. \quad (3.22)$$

Como en dos dimensiones, se conserva la expresión encontrada para la velocidad en el caso sin radiación, ecuación (3.15).

Escribimos el sistema completo que gobierna la evolución de la onda principal

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{\kappa} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} + a = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + VAu_\infty = 0 \quad (3.23b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}} + VA \frac{1}{2} u_\infty^2 = 0, \quad (3.23c)$$

$$V - \frac{4\sqrt{6}}{27} a + 5\kappa = 0. \quad (3.23d)$$

Reducimos esto a solamente dos ecuaciones

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{8} \right) \frac{a^2}{\kappa} - \frac{3}{2} a = 0, \quad (3.24a)$$

$$\left(\frac{4\sqrt{6}}{27} a - 5\kappa \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} + \frac{2\sqrt{2}\pi^{3/2}}{A} \left(\frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} \right)^2 = 0. \quad (3.24b)$$

El sistema (3.24) se puede resolver numéricamente para a y κ pero la falta de resultados numéricos directamente de ZK hace que dicha tarea tenga poco propósito.

3.2 Evolución de una onda localizada gobernada por una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov

3.2.1 Las leyes de conservación de la ecuación ZK generalizada

Completando ahora el caso de tres dimensiones, consideramos primero las leyes de conservación de la ecuación generalizada de Zakharov-Kuznetsov, gZK. La ecuación gZK en tres dimensiones para la función $u = u(x, y, z, t)$ es

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \quad p > 0. \quad (3.25)$$

Siguiendo el procedimiento varias veces usado, encontraremos ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de las leyes de conservación, las cuales aproximan la evolución de una onda principal Gaussiana. Las ecuaciones que se hallen en esta sección serán una generalización a las obtenidas antes en el caso de tres dimensiones y $p = 1$; de esto se podrá determinar el comportamiento de la onda principal para distintos valores de p . Dados los resultados que se hallaron en el caso de dos dimensiones y $p \neq 1$, esperamos que exista un intervalo para

p en el que sea posible un comportamiento de tipo solitón. Tal vez habrá valores de p para los cuales la onda crezca infinitamente y esperamos también que para valores grandes de p no ocurrirá un balance entre la dispersión y el efecto de la no linealidad, por lo que la onda principal tendrá una amplitud que tienda a cero.

La conservación de masa

Al igual que en los casos anteriores, la masa de la onda en tres dimensiones se define como

$$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz$$

y se exige que u decaiga lo suficientemente rápido cuando $x, y, z \rightarrow \pm\infty$ para obtener un valor finito. Escribimos la forma diferencial de la conservación de masa, a partir de la ecuación gZK (3.25)

$$u_t + \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z = 0. \quad (3.26)$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

y la versión integral de la conservación de masa es

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz = 0. \quad (3.27)$$

La conservación de momento

El momento de la onda es

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx dy dz, \quad (3.28)$$

mientras que la versión diferencial de la conservación de momento se escribe como

$$\left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{p+2} u^{p+2} + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \right)_x + (uu_{xy})_y + (uu_{xz})_z = 0. \quad (3.29)$$

Como siempre, de la versión diferencial de la conservación de una cantidad se sigue la conservación de la misma. Con (3.28) y (3.29) tenemos

$$\frac{dP}{dt} = 0,$$

de manera que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz = 0. \quad (3.30)$$

3.2.2 Sistema de ecuaciones obtenido a partir de las leyes de conservación

Ahora obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describan la evolución de una onda principal gobernada por la ecuación gZK en tres dimensiones.

Como antes, proponemos una solución a la ecuación gZK que se compone de dos partes: la primera es una estructura localizada la cual se representa por una función $u_0(x, y, z, t)$, como se ha manejado ya, esta es la llamada onda principal; una segunda parte que es la radiación desprendida por la onda principal y que denotamos por $u_1(x, y, z, t)$. Nuevamente, la condición inicial para $u(x, y, z, t)$ es justamente $u_0(x, y, z, 0)$, al inicio no hay radiación. Consideramos primero el caso en que se ignora a la radiación.

Sistema de ecuaciones sin tomar en cuenta a la radiación

Solamente para recordar al lector la notación usada, proponemos como solución de la ecuación gZK en tres dimensiones

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0,$$

a $u(x, y, t) = u_0(x, y, z, t) + u_1(x, y, z, t)$, con u_0 dado por

$$u_0(x, y, z, t) = a(t)e^{-\kappa(t)((x-\xi(t))^2+y^2+z^2)}. \quad (3.31)$$

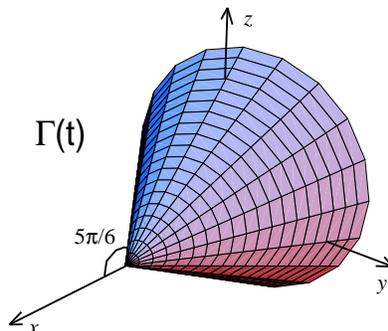
Una vez más, $V(t) \equiv \dot{\xi}$ es la velocidad de la onda principal y depende del tiempo. Usando las leyes de conservación se llegará a un sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$ que nos dirá cómo evoluciona $u_0(x, y, z, t)$. Encontramos la primera de las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la conservación de masa.

- Ecuación correspondiente a la conservación de la masa

Recordamos simplemente que la radiación desprendida por la onda principal se encuentra confinada en la región dentro de la superficie cáustica $x < \xi$, $(y^2 + z^2) < \frac{\xi-x}{\sqrt{3}}$, que tiene forma cónica y la llamamos $\Gamma'(t)$, igual que en el caso tratado antes. Dicha región se muestra en la Fig. 3.7.

El cambio de la masa de la onda en la región $\Gamma(t)$, tomando en cuenta que $u(x, y, z, t)$ satisface la ecuación gZK es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}}^{\infty} u dx dy dz \\ &= - \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z \right] dx dy dz \end{aligned}$$

Fig. 3.7: La región $\Gamma(t)$.

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} V dydz.$$

Como en la región $\Gamma(t)$ se cumple $u_1 \simeq 0$ entonces en $\Gamma(t)$ es cierto que $u \simeq u_0$ y nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u dx dy &\simeq \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy \simeq -V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dy dz \\ &- \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.32)$$

Evaluando cada una de las integrales de arriba y tomando en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito, encontraremos la primera ecuación diferencial buscada.

La masa total en la región $\Gamma(t)$ se encontró en la sección 3.1.2:

$$\int_{\Gamma(t)} u_0 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{a}{\kappa^{3/2}},$$

de igual forma, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u|_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dy dz = \frac{\pi a}{4 \kappa}$$

también se calculó en la sección 3.1.2.

La última integral requerida es

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} + u_{0yy} + u_{0zz} \right]_{\xi - \sqrt{3}(y^2+z^2)^{1/2}} dy dz. \end{aligned}$$

Usando $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0yy} = (4a\kappa^2y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$ y $u_{0zz} = (4a\kappa^2z^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma(t)} \left[\left(\frac{u_0^{p+1}}{p+1} + u_{0xx} \right)_x + (u_{0xy})_y + (u_{0xz})_z \right] dx dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a^{p+1}}{p+1} e^{-(p+1)\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} + (4a\kappa^2 3(y^2 + z^2) - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} \right. \\ & \quad \left. + (4a\kappa^2 y^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} + (4a\kappa^2 z^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa(3y^2+3z^2+y^2+z^2)} \right] dy dz \\ &= \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi}{4(p+1)^2} \frac{a^{p+1}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Los valores de las tres integrales calculadas se sustituyen en (3.32) de lo que se obtiene

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = \frac{1}{2(p+1)^2} \frac{a^2}{\kappa} - \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} - a. \quad (3.33)$$

Esta es la primera ecuación diferencial ordinaria que involucra a $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$; generalizando a (3.10).

- Ecuación correspondiente a la conservación del momento

Ahora se considera la conservación del momento. Asumiendo que la amplitud de u_1 es pequeña, se asumirá que u_1^2 y $u_0 u_1$ son despreciables comparados con u_0^2 en el espacio \mathbb{R}^3 , por lo que el momento se puede tomar como

$$P = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u^2 dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy.$$

La ecuación $\dot{P} = 0$ es ahora

$$\dot{P} \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\kappa^{3/2}} = 0.$$

La segunda ecuación del sistema deseado es:

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = 0 \quad (3.34)$$

y es idéntica a la ecuación obtenida para $p = 1$.

- Ecuación correspondiente a la consideración del momento en x del momento de la onda. El momento en x del momento de la onda en todo \mathbb{R}^3 es

$$\int_{\mathbb{R}^3} x \frac{1}{2} u^2 dx dy dz$$

y hemos visto que podemos utilizar esta cantidad para cerrar el sistema de ecuaciones. Despreciando a u_1^2 y $u_0 u_1$ con respecto a u_0^2 en todo el espacio, el cambio de la cantidad de arriba es

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \simeq \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz.$$

Con la conservación del momento en forma diferencial, ecuación (3.6), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dt} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \\ & \simeq - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right)_x \right. \\ & \quad \left. + (u_0 u_{0xy})_y + (u_0 u_{0xz})_z \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \\ & \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

después de integrar por partes y tomar en cuenta que u_0 y sus derivadas se anulan al infinito. Evaluamos ahora las integrales anteriores. Hemos visto ya la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz,$$

al escribir el factor de x dentro de la primera integral como $x - \xi + \xi$ y notando que el integrando es impar con respecto a $x - \xi$. La segunda integral se había calculado antes y tiene por valor

$$\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}}.$$

Encontramos ahora el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz,$$

sustituyendo $u_{0x} = -2a\kappa(x - \xi)e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0y} = -2a\kappa y e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$, $u_{0z} = -2a\kappa z e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$ y $u_{0xx} = (4a\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a\kappa) e^{-\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)}$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2} u_0^{p+2} + u_0 u_{0xx} - \frac{1}{2} u_{0x}^2 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 - \frac{1}{2} u_{0z}^2 \right) dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a^{p+2}}{p+2} e^{-(p+2)\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} + (4a^2\kappa^2(x - \xi)^2 - 2a^2\kappa) e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} 4a^2\kappa^2(x - \xi)^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} - \frac{1}{2} 4a^2\kappa^2 y^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} 4a^2\kappa^2 z^2 e^{-2\kappa((x-\xi)^2+y^2+z^2)} \right) dx dy dz = \frac{a^{p+2}}{p+2} \left(\frac{\pi}{(p+2)\kappa} \right)^{3/2} \\ & \quad + 4a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} - 2a^2\kappa \frac{1}{(2\kappa)^{3/2}} \frac{8\Gamma(1/2)^3}{8} \\ & \quad - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} \\ & \quad - 2a^2\kappa^2 \frac{1}{(2\kappa)^{5/2}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2} \frac{4\Gamma(1/2)^2}{4} \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{(p+2)^{5/2}} \frac{a^{p+2}}{\kappa^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(3/2) \Gamma(1/2)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(1/2)^3 - 3 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \Gamma(3/2) \Gamma(1/2)^2 \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{(p+2)^{5/2}} \frac{a^{p+2}}{\kappa^{3/2}} - \frac{5\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{a^2}{\kappa^{1/2}}. \end{aligned}$$

Usamos los valores de las integrales anteriores y obtenemos así la tercera ecuación del sistema para $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} \frac{a^{p+2}}{\kappa^{3/2}} - 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}}. \quad (3.35)$$

Se tienen ahora tres ecuaciones para las tres funciones del tiempo $a(t)$, $\kappa(t)$ y $\xi(t)$, estas ecuaciones son

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{4(p+1)^2} \frac{a^{p+1}}{\kappa} + \frac{V}{2} \frac{a}{\kappa} + a = 0, \quad (3.36a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = 0, \quad (3.36b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi a^2}{\kappa^{3/2}} - \frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} \frac{a^{p+2}}{\kappa^{3/2}} + 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} = 0. \quad (3.36c)$$

De la ecuación (3.36b) se obtiene una relación entre $a(t)$ y $\kappa(t)$

$$\frac{a^2}{\kappa^{3/2}} = \frac{a_0^2}{\kappa_0^{3/2}}, \quad (3.37)$$

nuevamente usando a a_0 y κ_0 como los valores de las funciones $a(t)$ y $\kappa(t)$ al tiempo $t = 0$.

Con (3.36b) y (3.36c) se obtiene

$$\frac{d\xi}{dt} = V = \frac{\kappa^{3/2}}{a^2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} \frac{a^{p+2}}{\kappa^{3/2}} - 5 \frac{a^2}{\kappa^{1/2}} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} a^p - 5\kappa,$$

la velocidad de la onda principal está dada por

$$V = \frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} a - 5\kappa. \quad (3.38)$$

Si utilizamos (3.38) en (3.36a) se obtiene la ecuación

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} = - \left(\frac{2\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} - \frac{1}{2(p+1)^2} \right) \frac{a^{p+1}}{\kappa} + \frac{3}{2} a. \quad (3.39)$$

Tenemos ahora dos ecuaciones (3.36b) y (3.39) para $a(t)$ y $\kappa(t)$.

Obtenemos ahora una ecuación para la función $a(t)$ exclusivamente. Usando (3.37) y (3.39)

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a_0^2}{\kappa_0^{3/2}} \frac{1}{a} = - \left(\frac{2\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} - \frac{1}{2(p+1)^2} \right) \frac{a_0^{4/3}}{\kappa_0} a^{p-1/3} + \frac{3}{2} a,$$

o despejando a \dot{a}

$$\dot{a} = \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} \frac{\kappa_0^{3/2}}{a_0^2} \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} - \frac{1}{2(p+1)^2} \right) \frac{a_0^{4/3}}{\kappa_0} a^{p+5/3} - \frac{3}{2} a^3 \right]. \quad (3.40)$$

Podemos escribir la ecuación en forma general

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(g(p) a^{p+5/3} - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^3 \right), \quad (3.41)$$

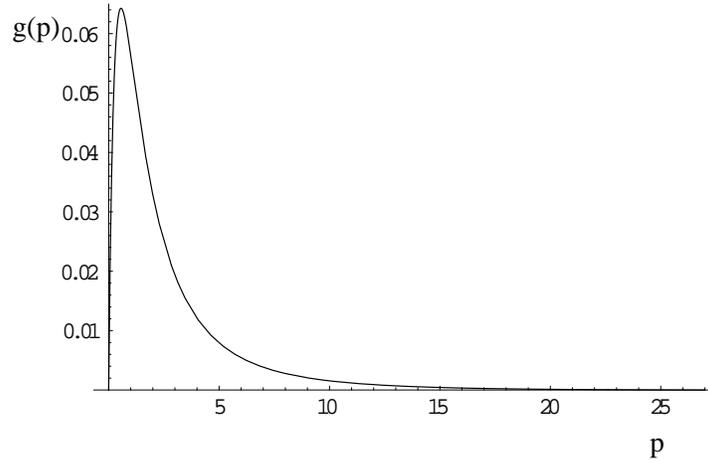


Fig. 3.8: La función $g(p)$. Aunque no se aprecia bien a esta escala, $g(p)$ se anula en $p \approx 25.61$ y es negativa a partir de ese valor.

con $g(p) = \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} - \frac{1}{2(p+1)^2}\right)$ y $\beta = \frac{3}{2}\pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} > 0$, de la misma forma que en la sección 3.1.2. Como se requiere por consistencia con esa sección, tenemos que $g(1) = \alpha$ y corroboramos de esta manera lo correcto de estos nuevos cálculos.

La función $g(p)$ determina en gran medida el comportamiento de a y de \dot{a} . Para entender el comportamiento de dicha función mostramos su gráfica en la Fig. 3.8. la función $g(p)$ tiene dos ceros: en $p = 0$ y en $p \simeq 25.61$. Entre los dos ceros, $0 \leq p < 25.61$, $g(p)$ es positiva y se torna negativa para $25.61 < p$. Para valores de p positivos y crecientes tenemos que $g(p) \rightarrow 0$. De esta manera, el comportamiento de esta nueva función es completamente análogo al de la función introducida en dos dimensiones, $g(p)$. Esto nos brinda un comportamiento similar para el caso de tres dimensiones, con muy ligeras variantes.

Como en el caso de dos dimensiones, es conveniente escribir a la ecuación (3.41) en las dos formas

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(g(p) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a^{4/3-p} \right) a^{p+5/3}, \quad \text{si } 0 \leq p \leq 4/3,$$

$$\dot{a} = \frac{\kappa_0^{1/2}}{a_0^{2/3}} \left(g(p) a^{p-4/3} - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} \right) a^3, \quad \text{si } 4/3 \leq p.$$

Vemos que el comportamiento de la amplitud es totalmente dependiente del valor de p que se tenga. Analizamos los diversos casos por separado, dependiendo del intervalo en que se encuentre el valor de p . Cuando tenemos $0 \leq p < 4/3$ tenemos los puntos de equilibrio $a = 0$ y otro más que es $a = \left(\frac{a_0^{4/3} g(p)}{\kappa_0 \beta} \right)^{\frac{1}{4/3-p}}$. Por la disposición de signos en la ecuación

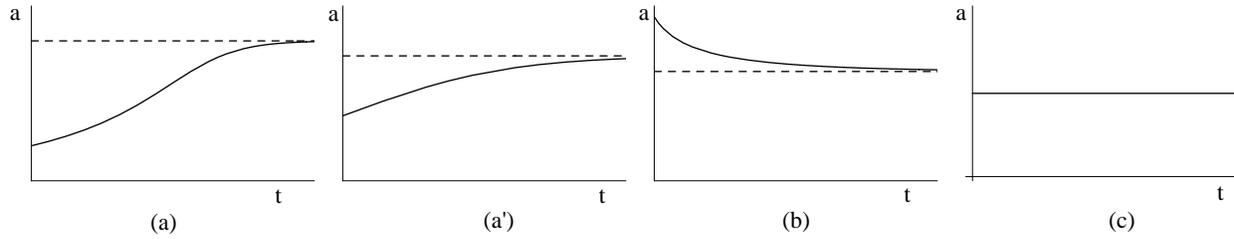


Fig. 3.9: Tipos de curvas solución para $0 \leq p < 4/3$. Las curvas tipo (a) se dividen en dos dependiendo de la ocurrencia de un cambio de concavidad. El punto de equilibrio se muestra con una línea punteada.

diferencial, vemos que cualquier onda con una amplitud inicial distinta de cero adoptará la amplitud dada por este último punto de equilibrio de manera asintótica conforme crece el tiempo. Por la misma razón, la evolución de la amplitud ocurre de forma monótona. Como en el caso $p = 1$, existe un punto especial a^* que corresponde al caso en que la condición inicial y el punto de equilibrio coinciden. Esto ocurre cuando $g(p) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} a_0^{4/3-p} = 0$, o de

manera explícita si $a_0 = a^* \equiv \left(\frac{\beta \kappa_0}{g(p)} \right)^{1/p}$. Si esto ocurre, la amplitud de la onda principal permanecerá constante para todo tiempo.

El cambio de concavidad es ahora $a = \left(\frac{a_0^{4/3} g(p) 3p+5}{\kappa_0 \beta 9} \right)^{\frac{1}{4/3-p}}$, el cual es menor que el punto de equilibrio y se reduce a la expresión adecuada si escogemos $p = 1$. Según la condición inicial y como el punto de cambio de concavidad es menor al de equilibrio, las soluciones que son crecientes pueden efectuar un cambio de concavidad o no. Usamos la misma notación que en el caso de dos dimensiones y dividimos los diferentes tipos de soluciones en tres: (a) soluciones siempre crecientes, (b) soluciones siempre decrecientes o (c) soluciones que permanecen constantes. De todo esto se deduce que para $0 < p < 4/3$, la onda principal siempre se aproxima a una onda con forma y velocidad permanente; es decir, tiene un carácter de tipo solitón. Las curvas solución se muestran de forma esquemática en Fig. 3.9.

Cuando $p = 4/3$ es posible que ocurran dos comportamientos distintos, dependiendo de si $g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}}$ es positivo a negativo. El único punto de equilibrio es $a = 0$ y la única variación posible es si la solución es siempre creciente o siempre decreciente. No hay posibilidad de que exista un punto especial $a^* \neq 0$, tal que $a(t) = a^*$, tampoco es posible tener cambios de concavidad. Como en dos dimensiones, este valor umbral es de especial interés, ya que permite integrar la solución y encontrar $a(t)$ de forma explícita. En el caso $g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} > 0$ es posible que la amplitud se vaya a infinito en un tiempo finito, como veremos enseguida. Las curvas solución se muestran de manera esquemática en la Fig. 3.10, mostrando ambos casos.

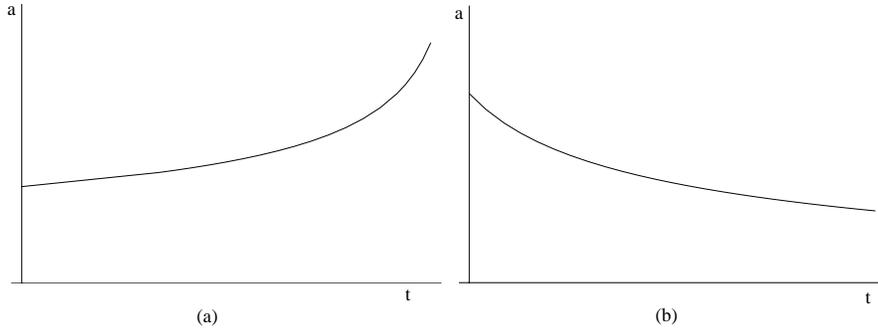


Fig. 3.10: Tipo de curvas solución para $p = 4/3$. Caso (a), $g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} > 0$. Caso (b), $g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} < 0$.

La ecuación diferencial cuando $p = 4/3$ se integra de manera sencilla. El resultado es

$$a(t) = \frac{a_0}{\left(1 - 2a_0^{4/3} \kappa_0^{1/2} \left(g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}}\right) t\right)^{1/2}},$$

con $g(4/3) = \pi^{-1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{(4/3+2)^{5/2}} - \frac{1}{2(4/3+1)^2}\right) \approx 0.0196556$. Es por esto que en el caso de amplitud creciente, $g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}} > 0$, tendremos una singularidad en la amplitud al tiempo

$$t = \frac{1}{2a_0^{4/3} \kappa_0^{1/2} \left(g(4/3) - \beta \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}}\right)^{-1}}.$$

Como la amplitud $a(t)$ y la razón de decaimiento espacial, $\kappa(t)$, están relacionadas de acuerdo a $a^2 \kappa^{-3/2} = a_0^2 \kappa_0^{-3/2}$, una singularidad en una de estas funciones implica un comportamiento similar en la segunda. Si en el caso $p = 4/3$ la amplitud se va a infinito para tiempo finito, la función $\kappa(t)$ efectuará el mismo tipo de comportamiento. Tendremos una onda cuya altura crece indefinidamente, a la vez que su ancho tiende a cero.

Cuando se satisface $4/3 < p < 25.61$, existe nuevamente un punto especial a^* ; de tal forma que si la amplitud tiene ese valor en $t = 0$, entonces permanecerá constante para todo tiempo futuro. Dicho punto se calcula pidiendo $\dot{a}(0) = 0$ y está dado por $a^* \equiv \left(\frac{\beta}{g(p)} \kappa_0\right)^{1/p}$.

Hay dos puntos de equilibrio $a = 0$ y $a_{\text{eq}} = \left(\frac{\beta}{g(p)} \frac{\kappa_0}{a_0^{4/3}}\right)^{\frac{1}{p-4/3}}$. Como ha ocurrido anteriormente, el valor a^* divide los tipos de comportamiento, si $a_0 > a^*$ entonces la solución crece de forma

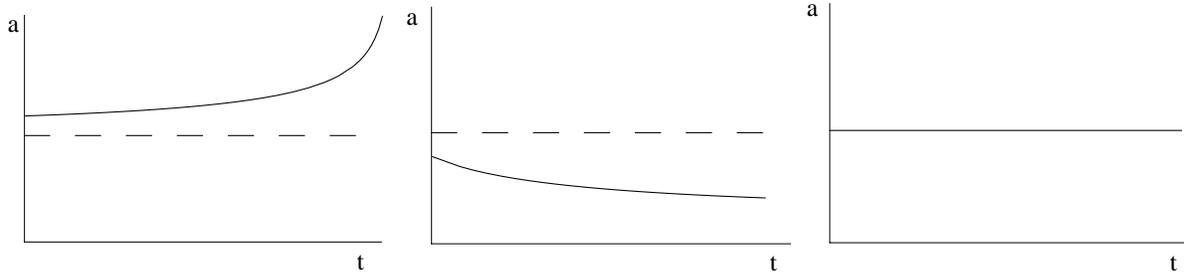


Fig. 3.11: Los tres tipos de curvas solución para $4/3 < p < 25.61$. El punto que separa el tipo de comportamiento, a^* , se muestra con línea punteada.

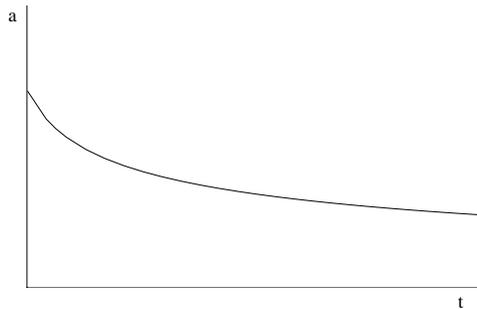


Fig. 3.12: Curva solución típica para $25.61 < p$.

monótona sin llegar nunca al equilibrio. Esto se debe a que si $a^* < a_0$ entonces $a_{\text{eq}} < a_0$, de forma que el punto de equilibrio está por debajo de la condición inicial y no puede ser alcanzado por una solución creciente. Las ondas que comiencen con condiciones iniciales por arriba de a^* crecen hasta tener una amplitud infinita; mientras que ondas que comiencen con amplitudes iniciales menores tienden a cero, por un argumento análogo. La última posibilidad es que $a_0 = a^*$ de lo que resulta una amplitud constante para cualquier tiempo. En este rango de valores de p no hay posibilidad de un comportamiento de tipo solitón, ya que las ondas no adquieren una forma fija en el tiempo. Las curvas solución se muestran de manera esquemática en la Fig. 3.11.

La última posibilidad es que p se sitúe en el rango $25.61 < p$, donde $g(p)$ es negativa. De esto se sigue que \dot{a} también es negativa y la amplitud de la solución siempre decae a cero, sin importar su condición inicial. Dado a que no hay más que el punto de equilibrio $a = 0$, no existe un punto especial a^* para el cual corresponda una variación inicial nula, $\dot{a}(0) = 0$ y que deje a la amplitud constante para todo tiempo. Esta misma condición de la ecuación diferencial impide la ocurrencia de cambios de concavidad. La Fig. 3.12 muestra este tipo de comportamiento.

Del presente análisis se puede concluir que sólo es posible el comportamiento de tipo solitón cuando $0 < p < 4/3$; considerando, por supuesto, la aproximación que nos brindan las leyes de conservación.

Sistema de ecuaciones al tomar en cuenta a la radiación

Deseamos ahora tomar en cuenta el efecto de la radiación sobre la evolución de la onda principal. Siguiendo el desarrollo llevado a cabo para dos dimensiones, usamos nuevamente las leyes de conservación sin despreciar necesariamente a u_1 con respecto a u_0 en la región dentro de la superficie cáustica. Adoptaremos la suposición de que u_1 es constante en una región en una región tridimensional por detrás de la onda principal ('flat shelf' en dos dimensiones).

- Ecuaciones correspondientes a la conservación de masa

Como se ha visto, una vez que se incorpora el efecto de la radiación, de la conservación de masa resultan dos ecuaciones diferenciales. La primera de ellas se obtuvo antes y se basa en que sabemos que la radiación está confinada dentro de la superficie cáustica. Esta ecuación se obtuvo integrando la forma diferencial de la conservación de masa fuera de la superficie cáustica, en la región que antes llamamos $\Gamma(t)$, despreciando a u_1 con respecto a u_0 .

La segunda resulta de considerar la conservación de la masa en todo el espacio. De esta ley de conservación sabemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz = 0,$$

si escribimos a $u(x, y, t)$ como $u = u_0 + u_1$ resulta

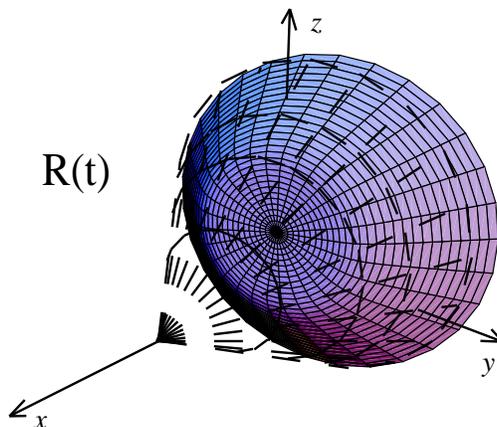
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx dy dz + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx dy dz \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + \frac{dM_1}{dt} = 0, \end{aligned}$$

denotando a la masa total de la radiación como M_1 . La conservación de masa nos proporciona las dos ecuaciones

$$\pi^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{d}{dt} \frac{a}{\kappa^{3/2}} - \frac{1}{4(p+1)^2} \frac{a^{p+1}}{\kappa} + \frac{V a}{2 \kappa} + a = 0, \quad (3.42a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + \frac{dM_1}{dt} = 0. \quad (3.42b)$$

Se hace ahora la suposición acerca de la forma de la radiación: suponemos que ésta se acumula formando una región en el espacio donde u es constante, con un valor pequeño pero

Fig. 3.13: La región $R(t)$.

distinto de cero. Como antes, supondremos que esta estructura se forma justo detrás de la onda principal, en la región dentro de la cáustica y que se mueve de manera rígida con ella, como si estuviera adherida.

Consideramos que la estructura de amplitud constante se forma en una región dentro de la cáustica que tiene por frontera a una superficie $S(t)$, además esta estructura avanza a la misma velocidad que la onda principal, $V(t)$. Ver Fig. 3.13. La región por delante de esta estructura la llamamos $R(t)$, como en el caso $p = 1$ y calculamos ahora el cambio de la masa en dicha región. Si la superficie $S(t)$ se puede escribir como la función $x = \tilde{x}(y, z, t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy dz &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} u dx dy dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} u_t dx dy dz - V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \Big|_{x=\tilde{x}(y,z,t)} dy dz \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} \right)_x + (u_{xy})_y + (u_{xz})_z \right] dx dy dz - V \int_{S(t)} u dy dz \\
 &= - \int_{S(t)} \left[\frac{1}{p+1} u^{p+1} + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right] dy dz - V \int_{S(t)} u dy dz,
 \end{aligned}$$

usando que u satisface la ecuación gZK en tres dimensiones. Usamos la notación usual, con \hat{n} como vector normal a la superficie $S(t)$.

Tomamos a $u = u_{\infty} = cte.$ sobre una porción de la superficie $S(t)$ y detrás de ella. Una vez más, no es posible pedir que u sea constante en toda la región atrás de la superficie $S(t)$, ni tampoco sobre la superficie completa, ya que se debe pedir que tienda a cero en infinito. Tomaremos $|u_{\infty}| \ll 1$ y también $|u_{xx}| \ll 1$, $|u_{yy}| \ll 1$ y $|u_{zz}| \ll 1$ sobre dicha curva. Si $u = u_{\infty}$ sobre una porción de $S(t)$ que tiene una proyección sobre el plano $x = 0$ de área A ,

tendremos que

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} u dx dy dz \approx - \int_{S(t)} \frac{1}{p+1} u^{p+1} dy dz - V \int_{S(t)} u dy dz \approx -A \frac{1}{p+1} u_{\infty}^{p+1} - V A u_{\infty}.$$

El parámetro A toma en cuenta el tamaño de la región donde u es constante y es el análogo del parámetro l , introducido en el tratamiento bidimensional. Nótese que además hemos conservado el término que lleva un factor de u_{∞}^{p+1} , debido a que no es despreciable en el caso en que $p \sim 0$.

Con algunas aproximaciones adicionales, podremos relacionar esto con las ecuaciones obtenidas antes

$$\int_{R(t)} u dx dy dz \simeq \int_{R(t)} u_0 dx dy dz \simeq \int_{\mathbb{R}^3} u_0 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}}.$$

De manera que

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + A \frac{1}{p+1} u_{\infty}^{p+1} + V A u_{\infty} = 0. \quad (3.43)$$

- Ecuación correspondiente a la conservación de momento

Con el mismo procedimiento, obtenemos una segunda ecuación a partir de la conservación del momento. Calculando el cambio de la cantidad de momento en la región $R(t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx dy dz - V \int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x=\tilde{x}(y,z,t)} dy dz.$$

Usando la forma diferencial de la conservación del momento, ecuación (3.6), nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{x}(y,z,t)}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{p+2} u^{p+2} + u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \right)_x \right. \\ & \left. + (u u_{xy})_y + (u u_{xz})_z \right] dx dy dz - V \int_{S(t)} \frac{1}{2} u^2 dy dz \end{aligned}$$

Recordando que $u = u_{\infty}$ en una región por detrás de $S(t)$ y también sobre una porción de dicha superficie, donde u_{∞} es pequeño; si sobre $C(t)$ las derivadas u_{xx} , u_{xy} , u_{xz} , u_x , u_y y u_z también lo son, podemos aproximar

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \approx - \int_{S(t)} \frac{1}{p+2} u^{p+2} dy dz - V \int_{S(t)} \frac{1}{2} u^2 dy dz \approx -A \frac{1}{p+2} u_{\infty}^{p+2} - V A \frac{1}{2} u_{\infty}^2.$$

Como en el caso de la masa, hacemos la aproximación

$$\int_{R(t)} \frac{1}{2} u^2 dx dy dz \simeq \int_{R(t)} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz \simeq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy dz = \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}},$$

de manera que tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}} + A \frac{1}{p+2} u_\infty^{p+2} + V A \frac{1}{2} u_\infty^2 = 0. \quad (3.44)$$

Como en dos dimensiones, se conserva la expresión encontrada para la velocidad en el caso sin radiación, ecuación (3.15).

De esta forma, el sistema de ecuaciones resultante es

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a}{\kappa^{3/2}} + A \frac{1}{p+1} u_\infty^{p+1} + V A u_\infty = 0, \quad (3.45a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\pi^{3/2} a^2}{4\sqrt{2}\kappa^{3/2}} + A \frac{1}{p+2} u_\infty^{p+2} + V A \frac{1}{2} u_\infty^2 = 0, \quad (3.45b)$$

$$V - \frac{4\sqrt{2}}{(p+2)^{5/2}} a + 5\kappa = 0, \quad (3.45c)$$

el cual puede ser resuelto numéricamente.

Conclusiones

En la Sección 1.6 vimos que la evolución de estructuras coherentes gobernadas por la ecuación ZK no está comprendida. Lo mismo ocurre para las generalizaciones de la ecuación ZK en que se considera un término no lineal distinto o en que se introduce un término no homogéneo. A partir de las soluciones numéricas del doctor N. F. Smyth se observó cómo ocurre la evolución de una estructura coherente en el caso de una condición inicial Gaussiana. El notar el cambio de amplitud, ancho y el desplazamiento de la onda nos motivó a utilizar las leyes de conservación de la ecuación Zakharov-Kuznetsov para entender dicha evolución a través de una solución modulada a través de tres funciones del tiempo que representan justamente la amplitud, el ancho y el desplazamiento antes mencionado. Se han encontrado sistemas de ecuaciones ordinarias aproximados para estas tres funciones del tiempo que indican la evolución de una onda inicialmente Gaussiana. Lo anterior se hizo en dos y tres dimensiones espaciales; además de considerar dos situaciones distintas: una ignorando la radiación cedida por la onda con forma de campana y otra en la que se toma en cuenta el efecto de la radiación. La aparición de una ecuación (mZK) con una no linealidad distinta a la de ZK nos llevó a considerar la misma situación para una ecuación donde la no linealidad generaliza tanto a la de ZK como a la de mZK. A esta ecuación la llamamos gZK.

En el caso de dos dimensiones se compararon las soluciones obtenidas de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con una solución numérica directa de la ecuación ZK, en los casos sin radiación y en el que se le toma en cuenta. Para el caso sin radiación, el ajuste encontrado no es bueno y como se ha mencionado antes, esto no es sorpresa alguna ya que se trata de un modelo simplificado en extremo.

En el caso en que se incorpora la radiación, en principio no se obtiene un buen ajuste tampoco; sin embargo, al considerar una expresión más general para la velocidad de la onda principal incorpora un nuevo parámetro libre que permite lograr un muy buen ajuste entre la solución numérica directa y la solución que brinda el sistema de ecuaciones.

Posteriormente, se considera una generalización a la ecuación Zakharov-Kuznetsov, con un término no lineal modificado. Ignorando a la radiación y después incorporándola, se llega nuevamente a una pareja de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que de hecho generalizan a los de ZK. Con lo anterior, se determinan las condiciones que debe cumplir el término no lineal para que se produzcan o no ondas de forma permanente.

Por último se trata el caso de tres dimensiones. Se sigue el tratamiento de antes y se obtienen sistemas de ecuaciones que aproximan la evolución de una onda con condición inicial Gaussiana, primero sin radiación y luego incorporándola. Para la ecuación gZK, obtenida al considerar una generalización del término no lineal de ZK, se hallan las condiciones requeridas para que ondas inicialmente Gaussianas adquieran forma permanente, o bien evolucionen de manera distinta a ésta.

Una futura extensión a este trabajo puede seguir varias líneas. Una de ellas está relacionada con la obtención de más resultados numéricos. Solamente se contó con este tipo de resultados para el caso de la ecuación ZK en dos dimensiones, mientras que en el presente trabajo se analizó también el caso correspondiente en tres dimensiones, así como la ecuación gZK en dos y tres dimensiones. La obtención de resultados numéricos para la ecuación ZK en tres dimensiones es algo extremadamente complicado y hasta el presente impráctico debido a la cantidad de cálculos requeridos. Es por eso que la extensión inmediata debe darse en relación de la ecuación gZK en dos dimensiones. Ya que se han obtenido soluciones modulacionales para este caso, es de gran interés la obtención de resultados numéricos en el caso sin radiación y con ella, con el propósito de hacer las comparaciones con los sistemas de ecuaciones ordinarias obtenidos en cada situación.

Otra extensión de gran interés sería el considerar la evolución de una estructura coherente de la ecuación ZK con un término no homogéneo. Vimos en la Sección 1.6 que existen simulaciones numéricas de este tipo, cuya evolución es un total misterio. Obtener una aproximación a esta situación para una comparación con la solución numérica es de gran interés.

Un par de líneas de investigación adicionales son: la consideración de ondas localizadas en dos dimensiones que no posean simetría circular y el considerar un sistema de dos ecuaciones del tipo ZK para dos funciones u y v que se encuentran acopladas. En el primer caso, bajo ciertas condiciones la onda coherente podría partirse en dos o más ondas coherentes individuales o de manera inversa tender a alguna configuración de equilibrio estable. El segundo caso mencionado puede surgir en la modelación de ondas en las interfases de un fluido estratificado, donde una onda en una de las interfases afecta a otra onda en una segunda interfaz.

Bibliografía

- [1] Alexander, J.C., Pego, R.L. y Sachs, R.L. *On the transverse instability of solitary waves in the Kadomtsev-Petviashvili equation*, *Phys. Lett. A.*, **226**, pp. 187-192 (1997).
- [2] Allen, M.A. y Rowlands, G. *Determination of the growth rate for the linearized Zakharov-Kuznetsov equation*, *J. Plasma Phys.*, **50**, pp. 413-424 (1993)
- [3] Bradley, R.M. *Electromigration-induced propagation on metal surfaces*, *Phys. Rev. E.*, **60**, pp. 3736-3740 (1999).
- [4] Bradley, R.M. *Transverse instability of solitons propagating on current-carrying metal thin films*, *Physica D.*, **158**, pp. 216-232 (2001).
- [5] Cairns, R.A. *Plasma physics*. Blackie & Son (1985).
- [6] Chen, F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion, Vol I*. Second edition. Plenum Press (1984).
- [7] Dendy, R.O. et al. *Plasma physics*. Cambridge University Press (1993).
- [8] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. y Morris, H.C. *Solitons and nonlinear wave equations*. Academic Press (1982).
- [9] Drazin, P.G. y Johnson, R.S. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press (1989).
- [10] Frycz, P. y Infeld, E. *Self-focusing of nonlinear ion-acoustic waves and solitons in magnetized plasmas. Part 3. Arbitrary-angle perturbations, period doubling*, *J. Plasma Phys.*, **41**, pp. 441-446 (1989).
- [11] Frycz, P. y Infeld, E. *Spontaneous transition from flat to cylindrical solitons*, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, pp. 384-385 (1989).
- [12] Goldston, R.J. *Introduction to plasma physics*. Institute of Physics Publishing (1995).

- [13] Ikezi, H., Taylor, R.J. y Baker, D.R. *Formation and interaction of ion-acoustic solitons*, *Phys. Rev. Lett.*, **25** pp. 11-14 (1970).
- [14] Ikezi, H. *Experiments on ion-acoustic solitary waves*, *Phys. Fluids*, **16** pp. 1668-1675 (1973).
- [15] Infeld, E. *Self-focusing of nonlinear ion-acoustic waves and solitons in magnetized plasmas*, *J. Plasma Phys.*, **33**, pp. 171-182 (1985).
- [16] Infeld, E. y Frycz, P. *Self-focusing of nonlinear ion-acoustic waves and solitons in magnetized plasmas. Part 2. Numerical simulations, two soliton collisions*, *J. Plasma Phys.*, **37**, pp. 97-106 (1987).
- [17] Infeld, E. y Rowlands, G. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press (1990).
- [18] Infeld, E. y Frycz, P. *Nonlinear waves: change of structure and collapse*, *Physica D.*, **52**, pp. 129-141 (1987).
- [19] Kath, W.L. y Smyth, N.F. *Soliton evolution and radiation loss for the Korteweg-de Vries equation*, *Phys. Rev. E* **51**(1), pp. 661-670. (1995).
- [20] Kath, W.L. y Smyth, N.F. *Soliton evolution and radiation loss for the nonlinear Schrödinger equation*, *Phys. Rev. E* **51**(2), pp. 1484-1492. (1995).
- [21] Laedke, E.W. y Spatschek, K.H. *Limitations of two dimensional model equations for ion-acoustic waves*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, pp. 719-722 (1981).
- [22] Laedke, E.W. y Spatschek, K.H. *Growth rates of bending KdV solitons*, *J. Plasma Phys.*, **28**, pp. 469-484 (1982).
- [23] Lamb, G.L. *Elements of soliton theory*. John Wiley and Sons (1980).
- [24] Minzoni, A.A y Smyth, N.F. *Evolution of lump solutions for the KP equation*, *Wave Motion* **24**, pp. 291-305 (1996).
- [25] Montgomery, D. *Evolution of a nonlinear ion acoustic wave*, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, pp.1465-1466 (1967).
- [26] Moussa, M.H.M. *Similarity solutions to non-linear partial differential equation of physical phenomena represented by the Zakharov-Kuznetsov equation*, *Int. J. of Eng. Sci.*, **39**, pp. 1565-1575 (2001).
- [27] Newel, A.C. *Solitons in mathematics and physics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (1985).

- [28] Nozaki, K. *Vortex solitons of drift waves and anomalous diffusion*, *Phys. Rev. Lett.*, **46**, pp. 184-187 (1981).
- [29] Petviashvili, V. y Pokhotelov, O. *Solitary waves in plasmas and in the atmosphere*. Gordon and Breach Science Publishers (1992).
- [30] Sagdeev, R.Z. *Cooperative phenomena in collisionless plasmas*, *Rev. Plas. Phys.*, V. 4 , Consultants Bureau Enterprises, (1966).
- [31] Shivamoggi, B.K. *Introduction to nonlinear fluid-plasma waves*, Kluwer Academic Publishers, (1988).
- [32] Schott, L. *Emission of nonlinear ion acoustic waves from a magnetized boundary*, *Phys. Fluids*, **23**, pp. 147-152 (1980).
- [33] Sipicic, R. y Benney, D.J. *Lump interactions and collapse in the modified Zakharov-Kuznetsov equation*, *Stud. Appl. Math.*, **105**, pp. 385-403 (2000).
- [34] Smyth, N.F. y Worthy, A.L. *Solitary wave evolution for the mKdV equations*, *Wave Motion*, **21**(3), pp. 263-275 (1995).
- [35] Taylor, R.J., Baker, D.R. e Ikezi, H. *Observation of collisionless electrostatic shocks*, *Phys. Rev. Lett.*, **24**, pp. 206-209 (1970).
- [36] Washimi, H. y Taniuti, T. *Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude*, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, pp. 996-998 (1966).
- [37] Whitham, G.B. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and Sons (1974).
- [38] Zakharov, V.E. y Kuznetsov, E.A. *Three-dimensional solitons*, *Sov. Phys. JETP*, **39**, pp. 285-286 (1974).
- [39] Zhuk, V.I. y Popov, S.P. *Soliton solutions of the two-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation*, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **38**, pp.122-135 (1998).