

Un Estudio sobre Propagación de Ondas en la Cóclea.

Vanesa Magar Brunner

A Aurora.

Agradecimientos:

Al departamento de matemáticas y mecánica en general, por las facilidades prestadas para la elaboración de este trabajo así como por su apoyo incondicional siempre que fue necesario. En particular:

A Catherine García, por abrirme el camino que une a la física, a las matemáticas y a la biología;

A Gilberto Flores, por ayudarme a salir adelante en momentos de oscuridad, por discutir conmigo puntos importantes del desarrollo, y más que nada por su amistad;

A Jorge Ize, por revisar desde la puntuación hasta las talachas, por enseñarme muchas de las cosas que sé desde que entré a la facultad, y -por que no- por hacernos trabajar a ambos hasta ahora;

A Antonmaría Minzoni, por las discusiones que ayudaron considerablemente a darle coherencia a la tesis y por sus aportaciones para la redacción de la última parte.

Al departamento de sociología por prestarme el scanner y por enseñarme a usarlo, lo que me permitió darle un toque artístico a esto.

A Ramón Peralta-Fabi, por ser la primera persona que me habló de fluidos, lo que ha dado un rumbo muy especial a mi vida. También por sus consejos y por su apoyo tanto sobre esta tesis como sobre mi futuro académico.

A Julio Herrera por su comprensión y por su confianza.

A Pedro Miramontes por consentirme en tiempos de crisis.

A todos mis maestros por hacer posible, en pequeña o gran medida, la culminación de cinco años de estudios.

Al personal de la biblioteca del IIMAS por su paciencia, por conserguirnos los artículos que necesitábamos, y por tener siempre la sonrisa en la boca.

A Fundación UNAM por ofrecerme su apoyo económico en más de una ocasión.

A mi familia por aguantarme, por ayudarme, y por mantenerme durante tantos años.

A mis compañeros y amigos, por hacer el trayecto menos difícil. A Alizarine y a Mariel por noches enteras de pláticas, las cuales no se han repetido por mucho tiempo. A la banda, por lo que compartimos, por todo lo que aprendí con ellos y por ser parte de mí en la mayor parte de la carrera. Al equipo ciclista por darme una excusa para descansar los sábados y por los deliciosos helados que nos ganábamos después de eso. A Pablo por ofrecerme su ayuda y por soñar todos los días que me iba a Cambridge con él. A Lupita por ultravitaminarme para que no muriera en el intento. A mi mamá por hacerme de desayunar cuando no dormía en toda la noche. A Leonel y a Carlos por que sin ellos no sé que hubiera hecho, no sólo desde el punto de vista académico... Y a mi asesor gastronómico, por estar vivo.

Addenda:

Una persona no mencionada en la lista de agradecimientos y a quien quiero especialmente incluir es a Ramón Peralta-Fabi, por ser la primera persona que me habló de fluidos, lo que ha dado un rumbo muy especial a mi vida académica. También quisiera agradecerle sus correcciones de la primera versión de esta tesis, así como sus consejos y su apoyo tanto durante la carrera como en lo concerniente a mis estudios futuros.

Otra omisión bastante triste fue que olvidé mandar a la imprenta el capítulo 5, cuyo título es:

Resumen, conclusiones y perspectivas.

Este capítulo ha sido incluido entre el capítulo 4 y el apéndice A, correspondiendo a las páginas 92-A, 92-B, 92-C y 92-D de este trabajo.

Contenido

Introducción	7
1 Planteamiento del problema.	9
2 FLUJO ACÚSTICO	13
2.1 Introducción.	13
2.2 Sistemas de referencia y movimiento medio	14
2.3 Ecuaciones de conservación: Aproximación lineal.	17
2.3.1 Ecuación de conservación de masa.	17
2.3.2 Ecuación de conservación de momento.	18
2.3.3 Aplicación de las ecuaciones lineales: onda sonora.	19
2.4 Ecuación de Navier-Stokes: Fluido newtoniano.	25
2.4.1 Tensor de rapidez de deformación.	25
2.4.2 Ecuación constitutiva para fluidos newtonianos.	25
2.4.3 Fluido incompresible.	27
2.4.4 Atenuación debida al coeficiente de viscosidad.	28
2.5 Flujo medio y periodicidad.	32
2.5.1 Definición del promedio.	32
2.5.2 Ecuaciones de movimiento.	33
2.5.3 Interpretación física del término $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} (\overline{\rho \mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_k})$.	36
2.6 Flujo acústico.	38
2.6.1 Ecuaciones para movimientos de flujo lentos.	38
2.6.2 Ley de flujo de Rayleigh.	39
3 BIOMECÁNICA COCLEAR.	47
3.1 Anatomía y fisiología del oído interno.	48

3.2	Resultados experimentales.	50
3.2.1	Propiedades mecánicas de los fluidos cocleares.	50
3.2.2	Rigidez de la membrana basilar.	50
3.2.3	Experimento de William S. Rhode.	52
4	Descripción cualitativa y modelo de la cóclea.	67
4.1	Modelo cualitativo de propagación de ondas.	67
4.2	El sistema hidroelástico y sus propiedades dispersivas.	74
4.3	Efectos viscosos.	79
4.4	El flujo medio.	85
5	Resumen, conclusiones y perspectivas.	95
A	Flujo acústico en la cóclea.	99
A.1	Distribución local.	101
A.1.1	Solución fundamental.	101
A.1.2	Solución en términos de la función de Green.	106
A.1.3	Solución asintótica.	109
A.2	Movimientos localmente bidimensionales. Capa límite.	112
A.2.1	Ecuaciones de movimiento para el flujo externo.	112
A.2.2	Atenuación de la velocidad dentro de la capa límite.	114
A.3	Flujos medios de McIntyre.	115
A.3.1	Flujo externo.	115
A.3.2	Flujo interno.	117
A.4	Flujo medio debido al esfuerzo de Reynolds.	120
B	Relación de dispersión, velocidad de grupo.	125
C	Ondas en un canal; Consideraciones generales.	131
	BIBLIOGRAFÍA.	145

Introducción

El propósito de este trabajo es plantear, con cierto grado de detalle, un modelo esquemático del proceso de transmisión del impulso mecánico en la membrana del tímpano al movimiento de las ondas ciliares que se encuentran sobre la membrana basilar y que son responsables de la transducción de esta señal mecánica en una señal eléctrica.

Para poder formular el problema son necesarios varios resultados de mecánica de fluidos así como múltiples observaciones y resultados experimentales relacionados con la anatomía del oído interno.

Por esta razón, dedicamos el primer capítulo a la presentación de las ideas no elementales de mecánica de fluidos que se necesitan. En el segundo capítulo describimos la fisiología del oído interno; también presentamos algunas evidencias experimentales importantes para describir el comportamiento de éste órgano. En efecto, fue la evidencia experimental la que permitió a J. Lighthill (cuyo trabajo exponemos) cambiar radicalmente de punto de vista en el enfoque del problema [L.4] y dar una explicación coherente de muchos fenómenos que antes -hace apenas unos 10 años- resultaban inexplicables o paradójicos.

En el tercer capítulo presentamos el modelo físico y matemático del proceso. Aquí enfatizamos en el modelo y en la explicación clara de los tres mecanismos -dispersión, viscosidad y no linealidad- que intervienen. La interacción de estos tres mecanismos genera el movimiento de las células ciliares en lugares específicos de la membrana basilar; dichos lugares dependen de la frecuencia del estímulo. En la presentación del modelo hemos sacrificado algunos detalles matemáticos que el lector interesado podrá seguir en las referencias una vez que queden claros los procesos físicos y las aproximaciones involucradas.

En este trabajo hemos hecho una aproximación muy severa que pudiera parecer inconsistente con la conclusión. Esta aproximación es la bidimensionalidad del flujo de capa límite que usamos en todos los cálculos. Discutimos este punto fundamental en el apéndice A, el cual es parte integrante de este trabajo. En los apéndices B y C completamos algunos detalles necesarios para el desarrollo.

Finalmente, presentamos las conclusiones y los problemas que hasta la fecha siguen abiertos en torno a este problema.

Capítulo 1

Planteamiento del problema.

Las características principales de la estructura del oído humano fueron descubiertas durante los siglos XVI y XVII, aunque los detalles más finos de su estructura no vieron la luz sino hasta finales del siglo XVIII. Los primeros dibujos que representan aproximadamente al oído tal y como se conoce hoy en día fueron hechos por Politzer en el año de 1873.

Fué también durante el siglo XVII cuando surgieron los primeros cuestionamientos acerca de cómo es que se propagan las ondas sonoras en el oído. El patrón de vibración de la partición coclear (se le llama partición coclear al conjunto formado por la membrana basilar y las estructuras que se encuentran sobre de ella, incluyendo a la membrana tectoria) ha sido el problema central durante más de un siglo. Debido a la ausencia de evidencia experimental sobre las propiedades mecánicas de la membrana basilar, muchos de los modelos creados eran puramente especulativos.

La obtención de esta evidencia experimental requería del desarrollo de instrumentos para realizar mediciones directas de la elasticidad de la partición y de la forma de las ondas viajeras que se propagan sobre la membrana basilar.

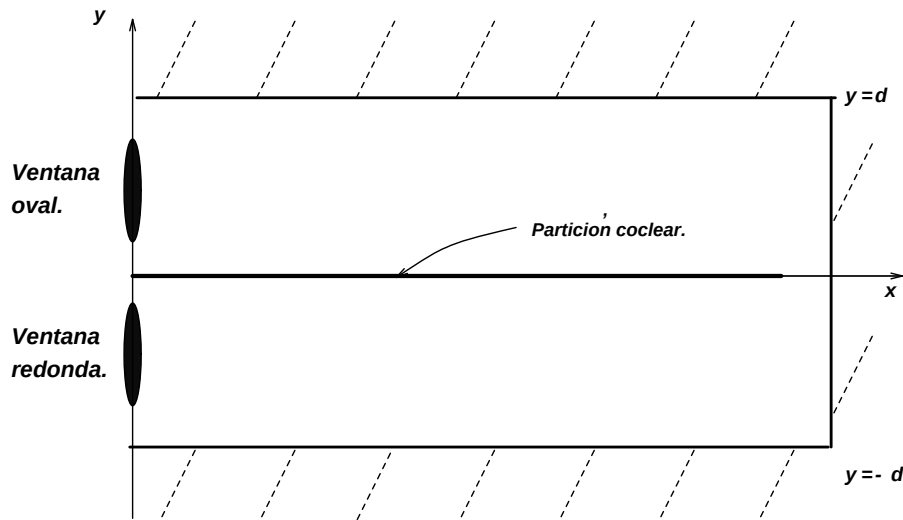
Esto fue posible hasta este siglo, y muchos de los resultados experimentales fueron obtenidos por von Békésy. Békésy fue el primero en observar la discriminación de frecuencias realizada por la cóclea, lo que se conoce como principio de posición. También midió algunas de las propiedades de los fluidos cocleares así como de la rigidez de la membrana basilar. Algunos de los resultados que obtuvo siguen siendo válidos hoy en día. Sin embargo, algunos fisiólogos experimentales de la segunda mitad de este siglo han esclarecido algunos problemas relacionados con la rigidez de la membrana basilar [V.1] y con el mecanismo de propagación de ondas [R.1]. Estos resultados han permitido determinar cómo varían los parámetros esenciales (la densidad y la viscosidad del fluido y la rigidez de la membrana) y esto ha sido de vital importancia en la elaboración de un modelo sobre propagación de ondas en la cóclea, como veremos a continuación.

Mencionamos anteriormente que uno de los problemas en la modelación del oído interno en el siglo pasado se debía a la falta de resultados experimentales pero además tales modelos pueden descartarse debido a algunas de sus suposiciones, relacionadas con la rigidez de la cóclea. Por ejemplo, Helmholtz modela a la membrana basilar como una serie de resortes, y donde el fluido que la rodea disminuye la frecuencia natural de esta serie de “resonadores”. Hoy en día se sabe que la rigidez de la membrana en la dirección longitudinal es casi nula, por lo que este modelo no es válido. Otro tipo de modelos tomaban en cuenta los problemas hidrodinámicos y consideraban que la partición coclear sólo jugaba el papel de una membrana de rigidez conocida. Este último enfoque es similar al que consideraremos en este trabajo, pues aquí estudiaremos la interacción entre las propiedades mecánicas de la partición coclear y las del fluido que la rodea. Sin embargo, una diferencia importante consiste en la forma en que modelaremos a la membrana basilar. En efecto, basándonos en evidencias experimentales recientes, veremos que la membrana basilar no se comporta como una membrana en el sentido elástico de la palabra, sino como una placa cuya rigidez depende únicamente de la coordenada longitudinal. Otro de los problemas en modelación es el de determinar los parámetros importantes del mecanismo que se quiere describir. Unas de las simplificaciones más importantes en nuestro modelo se relaciona con la forma espiral de la cóclea. Hasta el momento no se ha podido determinar si esta forma tiene alguna importancia; aunque se cree que la forma se debe únicamente a una economización del espacio. Este argumento se basa en el hecho de que en algunos animales la cóclea está estirada. Otra de las características geométricas que posiblemente se deba también a una economización del espacio es la disminución del diámetro de la cóclea en el sentido longitudinal de la membrana; despreciaremos también esta característica.

Por otro lado, si consideramos una sección transversal de la cóclea, vemos que ésta se encuentra dividida en tres conductos. Dos de estos conductos se encuentran separados por la membrana de Reissner, cuyo espesor es muy pequeño. Como las propiedades mecánicas de los fluidos cocleares son las mismas independientemente del conducto en que se encuentren, podemos considerar a la cóclea como dos conductos estirados y divididos por la partición coclear. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 1, donde hemos supuesto que la membrana basilar divide a la cóclea en dos conductos cuyas áreas transversales son idénticas.

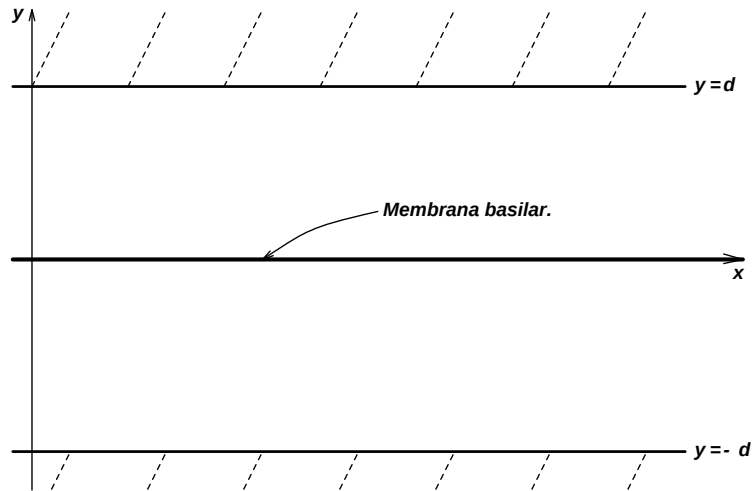
Hasta el momento no hemos considerado a la partición coclear. Esta partición se compone de la membrana basilar, del órgano de Corti y de la membrana tectoria. La mayoría de los modelos suponen que estas tres estructuras se mueven en fase. Como el movimiento de la partición se debe a las características mecánicas de la membrana basilar, en nuestra aproximación consideraremos que la partición se compone únicamente de dicha membrana. Finalmente, en este trabajo no estudiaremos el efecto del helicotrema, por lo que supondremos que la membrana basilar se encuentra sobre el semiplano $y = 0$, $0 \leq x < \infty$, como se ilustra en la figura 1.2.

Antes de pasar a un estudio mas detallado, debemos aclarar que supondremos el problema bidimensional, es decir, en el plano longitudinal que se muestra en la figura 1.2. Esta aproxi-



Corte longitudinal de la cóclea con algunas de las simplificaciones del modelo. Estas simplificaciones consisten en: 1. Considerar a la partición coclear como la membrana basilar y 2. Suponer que el diámetro de la cóclea es constante de la base hasta la punta.

Figura 1.1: Corte longitudinal de la cóclea.



Tercera simplificación del modelo; aquí se supone que la cóclea es infinita en la dirección longitudinal y para x positivas.

Figura 1.2: tercera simplificación del modelo.

mación puede parecer muy severa, pero la justificaremos en el apéndice A.

Hasta el momento sólo hemos discutido las simplificaciones geométricas que nos llevaron a modelar al sistema en la forma en que se mostró en la figura 1.2. Ahora consideramos el problema del acoplamiento entre la membrana basilar y el fluido que la rodea. La viscosidad del fluido juega un papel muy importante en el mecanismo, pues permite que la energía transportada por la onda se disipe en la posición del punto característico, correspondiente a la frecuencia de dicha onda. Una manera de formular el problema del acoplamiento es resolver las ecuaciones de Stokes (las cuales describimos con detalle en el capítulo 4) para el fluido junto con las condiciones de frontera en las que interviene la membrana. Debido a que los efectos de la viscosidad se encuentran confinados cerca de la membrana basilar, el movimiento cerca de las fronteras sólidas es muy pequeño y no afecta al comportamiento en la región de interés. Las soluciones de la ecuación de Stokes tienen la ventaja de ser válidas en toda la región ocupada por el fluido. Para determinar el movimiento generado cerca del punto característico, incluiremos los efectos no lineales en la ecuación de Stokes y ésto nos permitirá evaluar el flujo medio generado por la disipación de energía de la onda en esa región. Este flujo medio es responsable, a su vez, de la aparición de un flujo medio de volumen en la dirección transversal de la cóclea. En el capítulo III desarrollaremos el método anterior y daremos una expresión para el flujo medio de volumen.

Otro método consiste en usar la aproximación de capa límite en la región donde se disipa la energía. Este método tiene varias desventajas pues sólo es válido en regiones donde exista, efectivamente, una región donde los efectos de la viscosidad esten confinados. Sin embargo, nos interesa encontrar el flujo acústico cuando la energía se disipa, y en esta región el número de onda es muy grande. Por esta razón el método aproximado sólo es válido cuando el número adimensional $\kappa = k\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2}$, que es igual a la escala del número de onda entre la escala del ancho de la capa límite, es pequeño. En el apéndice A desarrollamos éste método para calcular el flujo acústico cerca del punto crítico, para el problema de propagación de ondas. En el siguiente capítulo estudiaremos los conceptos de mecánica de fluidos necesarios para la formulación del problema.

Capítulo 2

FLUJO ACÚSTICO

2.1 Introducción.

Se pueden distinguir tres casos de interacción entre un fluido y una onda acústica, cuando éstos se encuentran en un mismo sistema. Los diferentes tipos de interacción dependen de cual de los dos elementos es preponderante o si tienen la misma importancia. En el caso que nos interesa, es decir, el de flujo acústico, se generan movimientos en el fluido debido a la propagación de una onda sonora en el medio.

Antes de poder plantear modelos en los que este fenómeno aparece, debemos de aclarar ciertos conceptos importantes, como lo son los movimientos medios lagrangianos y eulerianos, el flujo de momento o el esfuerzo de Reynolds, entre otros. De hecho, el flujo acústico se debe a la acción del esfuerzo de Reynolds; es exclusivamente la disipación de energía acústica la que permite la existencia de gradientes de flujo de momento. Por lo tanto, cuando en un sistema en el que interactúen un fluido y una onda acústica exista algún mecanismo de disipación de energía, aparecerá un flujo acústico.

En este capítulo estudiaremos estos conceptos de mecánica de fluidos necesarios para la formulación del problema de propagación de ondas en la cóclea. Estos conceptos incluyen, como dijimos anteriormente, mecanismos de propagación de ondas y de disipación de energía para fluidos compresibles e incompresibles. En el caso de la cóclea despreciaremos los efectos de la compresibilidad del fluido pues éstos no son importantes en la región de interés. Sin embargo, es importante señalar la existencia de estos mecanismos de disipación. También determinaremos las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales nos permiten mostrar explícitamente la contribución de los efectos no lineales - el esfuerzo de Reynolds - sobre el comportamiento del fluido.

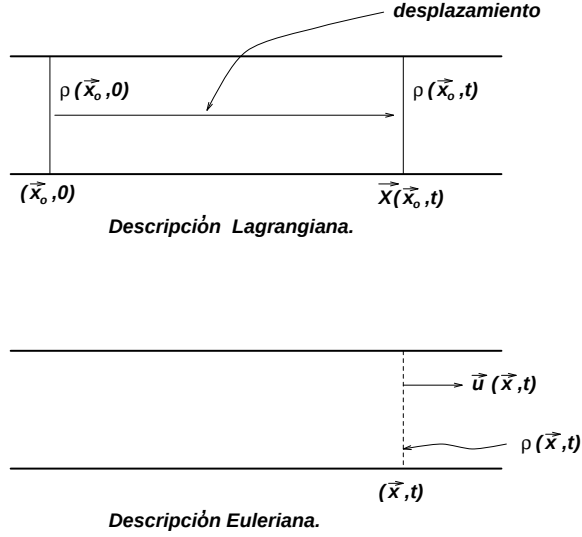


Figura 2.1: Esquema ilustrativo de las diferencias entre las descripciones lagrangiana y euleriana.

2.2 Sistemas de referencia lagrangiano y euleriano. Efecto sobre el movimiento.

Las dos maneras de describir el movimiento de un fluido son la lagrangiana y la euleriana. En el primer caso, consideramos un elemento de volumen en el fluido y establecemos cual es su posición en $t = 0$; después definimos una función que determine su posición final. Esta función depende del tiempo y de la posición inicial. Por lo tanto, en la descripción lagrangiana determinamos la trayectoria de partículas de fluido. En este sistema de referencia todas las variables (i.e., la posición $\vec{X}$, la densidad ρ , etc.) especifican alguna propiedad, al tiempo t , de la porción del fluido que se encontraba en la posición $\vec{X}_o$ inicialmente. Esta descripción permite ver lo que le sucede al fluido mientras se mueve. Así, si $d\rho/dt$ es negativo, entonces el fluido se está expandiendo. Es por ello que se reserva la notación de derivada total, d/dt , para el marco lagrangiano. El problema con esta descripción es que el sistema de coordenadas $(\vec{X}_o, t)$ se mueve con el fluido, por lo que es difícil deducir su comportamiento en una posición y a un tiempo determinados. En el caso de la descripción euleriana, consideramos cierta posición y cierto tiempo fijos y vemos que sucede con el fluido que pasa por ese punto. Aquí las variables consideradas son función de la posición $\vec{X}$ y del tiempo t y corresponden a diferentes porciones del fluido que pasa por el punto $(\vec{X}, t)$. Esta descripción facilita el cálculo de la variación espacial de alguna variable al tiempo t , la cual podría también medirse a partir de una fotografía tomada en ese instante [M.1, pp.234-235]. En dinámica de fluidos, la descripción más usada es la euleriana, debido a que las dificultades matemáticas son menores. En la figura 2.1 se muestran las diferencias entre estos dos enfoques.

Para comparar estos dos métodos y determinar si existen diferencias entre ellos, vamos a ilustrarlos con un ejemplo clásico y sencillo, el de la onda plana propagándose en la dirección x . El campo de velocidades (sistema de referencia euleriano) estaría dado por

$$u = u_o \cos[\omega(t - c^{-1}x)]. \quad (2.1)$$

El promedio de la velocidad en un punto fijo sería cero, debido a que el promedio de $\cos[\omega(t - c^{-1}x)]$, sobre un periodo, es cero. Por otro lado, de la ecuación anterior, vemos que para un punto inicial x_o la velocidad sería

$$u(x_o, t) = u_o \cos[\omega(t - c^{-1}x_o)],$$

la cual nos da la ecuación que satisface u en las coordenadas lagrangianas. Como dentro de este marco la posición X es tal que $dX/dt = u$, entonces

$$X(x_o, t) = u_o \omega^{-1} \sin[\omega(t - c^{-1}x_o)] + x_o.$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento (posición y velocidad) dentro del sistema euleriano, debemos de preguntarnos cuál es el desplazamiento $X - x_o$ de la porción de fluido que se encontraba en x al tiempo t . Pero como $x = (X - x_o) + x_o$, entonces

$$x = x_o + u_o \omega^{-1} \sin[\omega(t - c^{-1}x_o)].$$

Además, podemos aproximar a $u(x)$ alrededor de x_o , a primer orden, por

$$u(x) = u(x_o) + (x - x_o) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_o} = u(x_o) - c^{-1} u_o^2 \sin^2(\omega t - kx_o).$$

Entonces, si $x \approx x_o$, tenemos que

$$u(x) \approx u(x_o) - c^{-1} u_o^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_E = \text{velocidad en el sistema euleriano de coordenadas,} \\ u(x_o, t) &= u_L = \text{velocidad en el sistema lagrangiano de coordenadas.} \end{aligned}$$

Vemos que si nos restringimos a los términos de primer orden la velocidad sería la misma en cualquiera de los dos sistemas de referencia. Sin embargo, el término de segundo orden muestra que estas velocidades son en realidad distintas; esto es importante cuando queremos estudiar la forma de la energía de algún sistema, pues los términos de la energía son términos de segundo orden. Al término que caracteriza a la diferencia de las velocidades en los sistemas de referencia lagrangiano y euleriano se le llama “velocidad de McIntyre”, (u_M). Para el caso de una onda sonora, deducimos que

$$u_M = u_L - u_E = c^{-1} u_o^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (2.3)$$

Como el promedio con respecto a un periodo de $\sin^2(\omega t - kx)$ es $1/2$, la velocidad media de u_M es

$$\bar{u}_M = \overline{u_L - u_E} = \bar{u}_L - \bar{u}_E = \bar{u}_L = \frac{1}{2}c^{-1}u_o^2. \quad (2.4)$$

Este ejemplo ilustra claramente que la velocidad media puede cambiar mucho dependiendo del sistema de referencia que estemos considerando. También muestra que su diferencia, la velocidad media de McIntyre, puede ser del orden de alguna de ellas.

Un cambio sumamente importante relacionado con el sistema de referencia concierne a los cambios con respecto al tiempo de las variables del problema. En el sistema lagrangiano, la derivada total d/dt de alguna propiedad f del fluido se expresa como [M.1]

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Como se vió antes, $\partial f/\partial t$ es el cambio de f en un punto fijo x , mientras el fluido fluye por este punto. $\partial f/\partial t$ incluye el cambio temporal de f en el fluido en movimiento, así como el cambio de f en x si f difiere según el punto. La ecuación anterior es fácilmente generalizable a más dimensiones. Usando regla de la cadena, uno obtendría la relación

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f \quad (2.6)$$

entre la derivada total y el cambio temporal de f en un punto fijo. Si f es la velocidad, tenemos

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}. \quad (2.7)$$

En la aproximación a primer orden (cuando $\vec{u}$ es pequeño), despreciamos el término $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ (debido a que este término es cuadrático) de la ecuación (2.7), y las derivadas temporales de la velocidad no dependen del sistema de referencia. Sin embargo, tanto la energía acústica como la intensidad son de segundo orden y por ello es indispensable considerar el término $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ dentro de las ecuaciones de conservación. Finalmente, cuando el fluido se mueve como un todo con respecto al observador, su velocidad puede ser grande y la magnitud de $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ comparable (componente a componente) a la de alguno de los otros dos términos de (2.7).

En la siguiente sección estudiaremos las aproximaciones lineales de las ecuaciones de conservación. Estas ecuaciones nos llevarán a estudiar la relación entre la velocidad media de McIntyre y la disipación de la energía del fluido que satisfaga dichas ecuaciones.

2.3 Ecuaciones de conservación: Aproximación lineal.

2.3.1 Ecuación de conservación de masa.

Como su nombre lo indica, esta ecuación expresa la conservación de masa y también se le conoce como *ecuación de continuidad*. Supondremos que no existen fuentes de masa, por lo que si M es la masa dentro de un elemento de volumen V de fluido, tenemos

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0.$$

Supongamos que el volumen V es un volumen fijo arbitrario. Entonces el cambio temporal de la masa total es igual a la porción de fluido que sale por la frontera de V (flujo de masa), es decir

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS = - \text{flujo de masa}.$$

Usando ahora el teorema de la divergencia, deducimos que

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] \, dV = 0.$$

Debido a que el volumen que consideramos es arbitrario, el integrando debe de ser cero, por lo que la ecuación anterior se reduce a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación anterior es la forma más usual de la ecuación de continuidad. Esta ecuación es válida independientemente de las propiedades del fluido considerado.

Finalmente, si suponemos que $\vec{u} \cdot \nabla \rho$ es pequeño en comparación con los otros términos (este término es de orden ϵ^2), obtenemos una primera aproximación de la ecuación de continuidad, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

En este caso, hemos supuesto que podemos escribir a la velocidad y a la densidad como desarrollos en forma de potencias de un parámetro pequeño, ϵ , de modo que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \epsilon \vec{u}_o, \quad \text{y} \\ \rho &= \rho_o + \epsilon \rho_1. \end{aligned}$$

2.3.2 Ecuación de conservación de momento.

Si $\vec{P}$ es el momento total contenido dentro del elemento de volumen V introducido en la sección anterior y $\vec{F}^T$ es la fuerza que ejerce el resto del fluido sobre nuestro elemento de volumen,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{u}) dV = \vec{F}^T,$$

la cual es simplemente la segunda ley de Newton. Siguiendo un razonamiento análogo al de la sección anterior podemos deducir que

$$\int_V \left\{ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \vec{u}) \vec{u}] \right\} dV = \vec{F}^T,$$

donde $\nabla \cdot [(\rho \vec{u}) \vec{u}]$ es el flujo de momento (por unidad de volumen) que sale a través de la frontera de V . Para aproximar las ecuaciones al caso lineal suponemos que la fuerza total que se ejerce sobre nuestro elemento de fluido se compone únicamente por la presión p , la cual es una fuerza superficial, por unidad de área, y normal a la superficie S de la región C ocupada por el elemento de fluido. En ese caso, la fuerza total se reduce a

$$\vec{F}^T = \int_S \vec{T}^T dS = \int_S [(-p \mathbf{I}) \cdot \hat{n}] dS, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unitaria, y $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de C , dirigido hacia el exterior de dicha región. Una deducción de la forma de $\vec{F}^T$ para este caso puede verse, por ejemplo, en la referencia [C.2, p.15]. La integral de superficie de la ecuación (2.9) puede transformarse en una integral de volumen, por lo que la fuerza total queda como

$$\vec{F}^T = \int_V \nabla \cdot (-p \mathbf{I}) dV = - \int_V \nabla p dV.$$

Introduciendo la forma integral de la fuerza total en la segunda ecuación de esta sección, obtenemos

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \vec{u}) \vec{u}] dV = - \int_V \nabla p dV,$$

y como V es arbitrario, obtenemos una ecuación diferencial de conservación de momento

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \vec{u}) \vec{u}] = - \nabla p. \quad (2.10)$$

Por otro lado, en el caso lineal se desprecia el segundo término de la parte izquierda de la ecuación (2.10) por ser cuadrático, suponiendo que es más pequeño que el primero. Del mismo modo, podemos depreciar el término $\vec{u} \partial \rho / \partial t$. Entonces nos queda una ecuación vectorial muy sencilla, dada como

$$\rho_o \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = - \nabla p,$$

dado que ρ puede escribirse como $\rho_e + \rho_o$, donde $\rho_e = \rho - \rho_o$, es despreciable con respecto a ρ_o en el caso de la aproximación lineal.

2.3.3 Aplicación de las ecuaciones lineales: onda sonora.

En la sección 2.3.2 obtuvimos las aproximaciones lineales de las ecuaciones de conservación de masa y de momento, las cuales son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad y \quad (2.11)$$

$$\rho_o \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (2.12)$$

respectivamente. Si aplicamos el operador divergencia a la ecuación (2.12) y le restamos la derivada con respecto a t de la ecuación (2.11), obtenemos

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho_o}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla \rho_o \approx \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2},$$

por lo que, en la aproximación lineal, obtenemos la ecuación

$$\nabla^2 p - \frac{\partial^2 \rho_o}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13)$$

Lo que queremos ahora es ver la relación entre p y ρ , para eliminar alguna de estas variables de la ecuación (2.13). Sabemos que la presión depende únicamente de la densidad en el caso particular de una onda sonora, pues en la aproximación lineal se desprecian los términos $\frac{\partial \rho_o}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}$ y $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \nabla \rho_o$. Podemos entonces desarrollar a $p = p(\rho)$ alrededor de la posición en reposo, la cual estaría dada por $p(\rho_o) = p_o$. Como estamos considerando una perturbación pequeña, al desarrollar a la presión en serie de Taylor alrededor del punto (ρ_o, p_o) , podemos despreciar los términos de segundo orden o mayores. Es decir estamos exigiendo a la presión una dependencia explícita con respecto ρ sin depender de ninguna otra propiedad. Esta condición se satisface si estamos en un proceso barótropro. En consecuencia la presión $p(\rho)$ se puede aproximar por

$$p = p_o + (\rho - \rho_o) \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_o}.$$

Dado que es un proceso adiabático definimos a la *velocidad local del sonido* como

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (2.14)$$

En particular si $\rho = \rho_o$ entonces $c_o^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_o}$. Además definimos también a p_e como la presión en exceso con respecto a la presión hidrostática p_o , y a ρ_e como a la densidad en exceso con respecto a la densidad en reposo ρ_o . Tanto ρ_o como p_o son constantes, por lo que

$$\nabla^2 p = \nabla^2 p_e = c_o^2 \nabla^2 \rho_e = c_o^2 \nabla^2 \rho, \quad y$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} = c_o^{-2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2} = c_o^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.13) y lo anterior, obtenemos dos ecuaciones del mismo tipo, tanto para p_e como para ρ_e :

$$c^2 \nabla^2 \rho_e - \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} = 0, \quad y \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 p_e - c^{-2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2} = 0, \quad (2.16)$$

respectivamente. En efecto, estas ecuaciones son del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 f = 0,$$

la cual es la conocida ecuación de onda y donde la velocidad de propagación de dicha onda sería c_o . Finalmente, podemos hacer una última simplificación de las ecuaciones lineales de conservación (2.11) y (2.12). Esto se logra considerando que ρ_e es mucho menor que ρ_o , y como $\rho = \rho_e + \rho_o$, podemos escribir a las ecuaciones antes mencionadas como

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad y \quad (2.17)$$

$$\rho_o \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p_e. \quad (2.18)$$

Utilizaremos las ecuaciones (2.17) y (2.18) para ilustrar el principio de conservación de la energía para el caso de ondas sonoras.

Conservación de energía en ondas sonoras.

Multipliquemos a la ecuación (2.17) por $c^2 \rho_e$. Como $p_e = c^2 \rho_e$ y $\rho_e \partial_t \rho_e = (1/2) [\partial_t (\rho_e^2)]$ (donde ∂_t =parcial con respecto a t), obtenemos una ecuación equivalente dada por

$$\frac{c^2}{2\rho_o} \frac{\partial (\rho_e^2)}{\partial t} + p_e \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.19)$$

Además, multipliquemos a cada una de las tres ecuaciones (2.18) por la componente correspondiente del vector velocidad y sumémoslas. De este modo obtenemos la ecuación

$$\frac{\rho_o}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) p_e = 0, \quad (2.20)$$

Sumando las ecuaciones (2.19) y (2.20) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c^2}{2\rho_o} \rho_e^2 + \frac{1}{2} \rho_o |\vec{u}|^2 \right] + \nabla \cdot (p_e \vec{u}) = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es una ecuación de conservación de energía. De hecho, vemos de inmediato que $\frac{1}{2}\rho_o|\vec{u}|^2$ es la aproximación lineal de la densidad de energía cinética. Además, $c^2\rho_e^2/2\rho_o$ es una aproximación de la densidad de energía potencial. Esta energía puede evaluarse calculando el trabajo necesario para comprimir al fluido hasta alcanzar ese estado. Se le da el nombre de trabajo de expansión al que realiza un sistema contra las fuerza ejercida por la presión externa ρ_{ext} . Esta presión está distribuida uniformemente, es decir $\delta W = p_{ext} dV$, donde V es el volumen (considerado como variable). En el caso de un proceso de expansión cuasiestático, p_{ext} es siempre igual a la presión p dentro del sistema y $\delta W = p dV$. Por lo tanto el trabajo elemental que realizan los cuerpos sobre el sistema es $-p dV$. En consecuencia el trabajo total necesario para que el sistema -el cual ocupa, inicialmente, un volumen V_o - ocupe un volumen V_1 se expresa como la integral simple

$$W = - \int_{V_o}^{V_1} p_e dV,$$

en la cual el volumen es la variable de integración, y como la masa considerada es constante,

$$\rho V = \rho_o V_o \Rightarrow dV = - \frac{\rho_o V_o}{\rho^2} d\rho.$$

Por otra parte, para pequeñas perturbaciones $\rho^2 \approx \rho_o^2$, por lo que

$$dV \approx - \frac{V_o}{\rho_o} d\rho.$$

Por lo tanto

$$W = - \int_{V_o}^{V_1} p_e dV \approx \frac{c^2 V_o}{\rho_o} \int_{\rho_o}^{\rho_1} (\rho - \rho_o) d\rho,$$

pues $p_e = c^2 \rho_e = c^2 (\rho - \rho_o)$. Entonces

$$W \approx \frac{c^2 V_o}{\rho_o} \left[\frac{\rho^2}{2} - \rho_o \rho \right]_{\rho_o}^{\rho_1} = \frac{c^2 V_o}{2\rho_o} \rho_e^2.$$

Entonces, si e_k es la densidad de energía cinética y e_p la de energía potencial, la ecuación (2.21) puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_k + e_p) = -\nabla \cdot (p_e \vec{u}).$$

Vemos que el cambio temporal de la densidad total de energía es igual al opuesto de la divergencia del vector $p_e \vec{u}$. Por la ecuación anterior, este vector representa al flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo. Al valor medio de dicho vector se le llama *intensidad de energía acústica* y se denota por $\vec{I} = \overline{p_e \vec{u}}$. Por valor medio seguimos entendiendo el promedio sobre un periodo temporal. Como $p_e = c^2 \rho_e$, la ecuación (2.21) muestra que el valor medio del flujo de energía acústica es igual al valor medio del flujo de masa multiplicado por c^2 .

Finalmente, la ecuación 2.17 y la aproximación a primer orden de $\vec{u}$ nos permiten ver que, para el caso de ondas sonoras -recordemos que las ondas sonoras son ondas longitudinales, por lo que podemos reducirnos al caso unidimensional-, el promedio temporal de u satisface la ecuación

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(x_o, t) dt - \frac{1}{T \rho_o} \int_0^T \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \left[\int_0^t u(x_o, \tau) d\tau \right] dt.$$

En la ecuación anterior, el término del lado izquierdo es simplemente la velocidad media euleriana $\overline{u_E}$, mientras que el primer término del lado derecho es la velocidad media lagrangiana $\overline{u_L}$. Por otra parte,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \left[\int_0^t u(x_o, \tau) d\tau \right] dt = \frac{1}{T} \left\{ \rho_e \left[\int_0^t u(x_o, \tau) d\tau \right] \right\}_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T u(x_o, t) dt.$$

El primer término del lado derecho se hace cero debido a que $u(x_o, t)$ es una función periódica de periodo T (así la definimos); el segundo término es la intensidad de la energía acústica I . Entonces, el desarrollo anterior nos permite deducir que

$$\overline{u_L} = \overline{u_E} + \rho_o^{-1} c^{-2} I.$$

Podemos generalizar este resultado a más dimensiones, lo que nos permite escribir

$$\overrightarrow{u_L} = \overrightarrow{u_E} + \rho_o^{-1} c^{-2} \vec{I}, \quad (2.22)$$

donde $\overrightarrow{u_E}$ es la velocidad euleriana promedio. Concluimos entonces que la diferencia entre las velocidades en el sistema de referencia lagrangiano y euleriano puede escribirse, en general, como

$$\rho_o^{-1} c^{-2} \vec{I} = \text{velocidad lagrangiana media} - \text{velocidad euleriana media}. \quad (2.23)$$

En el ejemplo de la onda plana visto anteriormente, $\vec{I}$ se convierte en un escalar, y de las ecuaciones (2.4) y (2.23), deducimos que en esta situación

$$I = \overline{p_e u} = \frac{1}{2} \rho_o c u_o^2. \quad (2.24)$$

Este resultado es muy importante, pues muestra que la diferencia de las velocidades medias lagrangiana y euleriana es un mecanismo de disipación de energía media, puesto que ¹

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (e_k + e_p)} = -\rho_o^{-1} c^{-2} \nabla \cdot (\overrightarrow{u_L} - \overrightarrow{u_E}).$$

En la siguiente sección estudiaremos algunos de los mecanismos de disipación y veremos el efecto que tienen sobre el mecanismo de propagación de la energía.

¹Recordemos que si promediamos con respecto al tiempo, podemos intercambiar el orden de las derivadas espaciales y de dicho promedio.

Mecanismos de atenuación de energía en ondas sonoras.

Uno de los mecanismos de atenuación de energía puede deducirse de la aproximación lineal usada en la sección anterior. Esto proviene del hecho que la presión puede depender no sólo de la densidad, sino también de cambios temporales de ésta en un punto dado. Dentro de la aproximación lineal consideramos el desarrollo de Taylor a primer orden de la presión. En este caso

$$p - p_o = c^2(\rho - \rho_o), \quad (2.25)$$

con $\delta = \text{constante}$. Ahora queremos incluir en la ecuación (2.25) algún término que pueda ser una fuente de disipación de la energía. En ondas sonoras consideramos un proceso barótrope, es decir, que la presión depende únicamente de la densidad del fluido en el que se propaga. Además, queremos que la fórmula para p siga siendo una aproximación lineal. por lo anterior deducimos que podemos sumarle a la ecuación (2.25) un término del tipo $\delta \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Definiremos entonces a p_e como

$$p - p_o = c^2(\rho - \rho_o) + \delta \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Si consideramos el caso unidimensional, las ecuaciones (2.17) y (2.18), son de la forma

$$\begin{aligned} \rho_o \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_e}{\partial x} &= 0, \quad y \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

donde x es la dirección de propagación y u la velocidad.

La densidad total de energía e_t ya se determinó anteriormente y es

$$e_t = e_k + e_p = \frac{c^2}{2\rho_o}(\rho - \rho_o)^2 + \frac{1}{2}\rho_o u^2. \quad (2.27)$$

Usando ahora las ecuaciones de conservación, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_t}{\partial t} &= -c^2(\rho - \rho_o) \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [(p - p_o)u] + [p_e - c^2\rho_e] \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Pero ahora

$$p_e = c^2\rho_e - \rho_o\delta \frac{\partial u}{\partial x},$$

por lo que aquí la parcial con respecto al tiempo de la densidad total de energía es

$$\frac{\partial e_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p_e u) - \rho_o\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (2.28)$$

De lo anterior concluimos que en este caso existe una tasa de disipación de energía por unidad de volumen, dada por el segundo término de la ecuación (2.28). La constante δ , definida en la ecuación (2.26), toma en cuenta varios efectos de disipación, como por ejemplo la viscosidad del fluido, o la conducción de calor dentro del mismo [L.2, pp.78-80]. Por otro lado, la disipación es proporcional al cuadrado del gradiente de velocidades. Esto implica que los máximos de disipación ocurren cuando el gradiente de la velocidad es muy grande; esto a su vez hace que el gradiente tienda a disminuir, por lo que las irregularidades del mismo se suavizan. Por esta razón es usual llamar a δ *difusividad del sonido*. Otra consecuencia importante debida a la forma del término de disipación concierne a las ondas sinusoidales. Supongamos que tenemos una onda de este tipo. Si e_d es la porción de energía disipada, entonces, a partir de la ecuación (2.1), deducimos que

$$-\frac{\partial e_d}{\partial t} = \rho_o \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \rho_o \delta u_o^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin^2[\omega(t - c^{-1}x)],$$

cuyo promedio es simplemente

$$\frac{1}{2} \rho_o \delta u_o^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2. \quad (2.29)$$

Por otro lado, la energía total media ² es

$$\overline{e_t} = \overline{\rho_o u^2} = \rho_o u_o^2 \overline{\cos^2[\omega(t - c^{-1}x)]} = \frac{1}{2} \rho_o u_o^2. \quad (2.30)$$

La porción de densidad de energía que se disipa por unidad de tiempo es la ecuación (2.29) divididos por la ecuación (2.30) y por lo tanto es igual a $\delta(\omega/c)^2$. Además, el periodo de una onda sinusoidal es $2\pi/\omega$, de donde concluimos que la porción de energía disipada en cada periodo es

$$\frac{2\pi\omega\delta}{c^2}. \quad (2.31)$$

En esta sección hemos estudiamos el efecto de mecanismos de disipación de la energía para el caso de ondas sonoras. Vimos que esta disipación depende del cuadrado del gradiente de velocidades. Esto indica que si existe un punto en el cual la onda es tal que el gradiente de velocidades es muy grande, la disipación de la energía también aumenta y suaviza el comportamiento de la onda, de modo a que su amplitud disminuye. Veremos que podemos llegar a conclusiones similares para el caso de propagación de ondas en un fluido incompresible. Para ello estudiaremos el caso del fluido newtoniano. En dicho caso, los efectos disipativos debidos a la compresibilidad del fluido son, a su vez, despreciables con respecto a otros mecanismos de disipación, como lo es la viscosidad. En la siguiente sección estudiaremos las ecuaciones de conservación para el caso de un fluido newtoniano incompresible.

²Ver apéndice C.

2.4 Ecuación de Navier-Stokes: Fluido newtoniano.

Como dijimos en la sección anterior, la ecuación (2.8) de conservación de masa sigue siendo válida para todo fluido; en particular, para el fluido newtoniano, el cual estudiaremos después de definir al tensor de rapidez de deformación.

2.4.1 Tensor de rapidez de deformación.

Este tensor se define como

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

y se puede dividir en la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. De la definición de e_{ij} deducimos que

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

Se puede demostrar que la parte simétrica de e_{ij} representa al campo de los esfuerzos cortantes con respecto al tiempo, mientras que la parte antisimétrica representa a la rapidez de rotación de un elemento de fluido alrededor de sus ejes ³ [C.2, p.23].

2.4.2 Ecuación constitutiva para fluidos newtonianos.

Se le llama *ecuación constitutiva*⁴ a la relación que existe entre el tensor de esfuerzos al que se encuentra sometido el fluido y el tensor de rapidez de deformación. Para el caso lineal, supusimos que el tensor de esfuerzos, al que definiremos como τ_{ij} , era igual a $-p\delta_{ij}$. En efecto, se puede demostrar [C.2, p.15] que la fuerza total por unidad de área, $\vec{T}$, puede escribirse como $\vec{T} = \hat{n} \cdot \tau$. En el caso general el tensor τ no es isótropo, sino que posee una componente p_{ij} , cuyos elementos fuera de la diagonal son distintos -o cuando menos uno de ellos- de cero. La forma de τ depende del fluido considerado. De ahora en adelante consideraremos únicamente fluidos newtonianos. Muchos de los fluidos más comunes, como el aire o el agua, pertenecen a este grupo. Para estos fluidos el tensor de esfuerzos satisface las siguientes condiciones [C.2, p.24]:

1. Cuando el fluido está en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión que ejerce el fluido es la presión termodinámica.

³La rotación se efectúa en sentido antitrigonométrico.

⁴Otra ecuación constitutiva es la que relaciona al flujo de calor con la temperatura. En este trabajo consideraremos que la temperatura del sistema es constante, por lo que el flujo de calor es idénticamente cero.

2. τ_{ij} depende linealmente del tensor e_{kl} y no depende de ninguna otra variable.
3. Como durante la rotación de un cuerpo rígido no aparecen esfuerzos cortantes, aquí supondremos que para un fluido newtoniano se satisface esta propiedad.
4. Las propiedades del fluido son isótropas, es decir, no hay direcciones preferenciales.

La condición 1 implica que τ_{ij} es de la forma

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + p_{ij},$$

donde p_{ij} se define como el *tensor de esfuerzos cortantes* y donde p es la presión termodinámica. Por otro lado, debido a la condición 3, la parte antisimétrica del tensor de esfuerzos debe anularse, pues esta parte representa esfuerzos cortantes debidos a rotaciones. Entonces, si

$$p_{ij} = \sum_{k,l} \beta_{ijkl} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right),$$

las condiciones 3 y 4 indican β_{ijkl} debe ser un tensor simétrico e isótropo. Un tensor de rango cuatro, con estas características, puede escribirse como (una demostración detallada de esto se encuentra en la referencia [F.2, pp.170-171])

$$\beta_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

En efecto, todo tensor isótropo puede escribirse como una combinación lineal de los tensores $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ y $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$, pues estos tres últimos tensores son isotrópos de rango cuatro. Como además β_{ijkl} es un tensor simétrico, el coeficiente de término de β_{ijkl} que multiplica a $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ debe de ser cero. Reemplazando el valor de β_{ijkl} en la expresión de p_{ij} , tenemos

$$p_{ij} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right),$$

lo cual se reduce a

$$p_{ij} = \lambda\delta_{ij} \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

Vemos que p_{ij} es una función lineal del tensor de rapidez de deformación e_{kl} . Esto es una consecuencia de la condición 2.

Finalmente, la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano es de la forma

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij} \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.32)$$

El tensor de esfuerzos de la ecuación (2.32) tiene dos términos correspondientes a esfuerzos normales; uno de ellos se relaciona con la presión ejercida sobre algún elemento de fluido por el fluido que lo rodea, mientras que el segundo se debe a flujos de masa en la dirección normal. El último término considera rotaciones del fluido que estamos estudiando. Entonces, cuando el coeficiente μ es importante, el fluido deja de ser irrotacional e interviene la vorticidad del fluido dentro de la descripción del sistema.

Coeficientes de viscosidad.

Definimos a la presión mecánica p_m sobre el fluido como el promedio de las componentes normales del tensor de esfuerzos, es decir:

$$-p_m = -\bar{p} = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}).$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.32),

$$-p_m = -\bar{p} + (\lambda + (2/3)\mu) \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

Cuando el fluido es incompresible la divergencia de la velocidad es cero y la presión mecánica es igual a la presión hidrodinámica. En ese caso el único coeficiente de viscosidad que aparece en la ecuación (2.32) es μ , y lo llamaremos simplemente como *viscosidad*. Este coeficiente no puede determinarse analíticamente, sino empíricamente [C.2, p.26]. Como dijimos antes, este coeficiente cobra importancia sólo cuando el fluido no es irrotacional. A continuación veremos algunas propiedades de los fluidos incompresibles.

2.4.3 Fluido incompresible.

Como dijimos antes, en este caso la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{2.33}$$

debido a que la densidad es constante.

En la sección 2.3.2 vimos que la ecuación de conservación de momento se escribía como

$$\int_V \left\{ \frac{\partial(\rho_o \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_o \vec{u}) \vec{u}] \right\} dV = \vec{F}^T.$$

Sin embargo, ahora la fuerza total se compone de una fuerza volumétrica y de una fuerza superficial dependiente del tensor de esfuerzos τ dado por la ecuación (2.32), de modo que

$$\vec{F}^T = \int_V \rho_o \vec{F} dV + \int_S \tau \cdot \hat{n} dS = \int_V \rho_o \vec{F} dV + \int_V \nabla \cdot \tau dV = \int_V [\rho_o \vec{F} + \nabla \cdot \tau] dV.$$

Por lo tanto la ecuación de conservación de momento toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_o u_j) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_o u_j u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \rho_o F_j.$$

Además, si usamos el resultado (2.33) esto se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_o u_j) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_o u_j u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \sum_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho_o F_j. \quad (2.34)$$

Finalmente, como ρ_o es constante, obtenemos la ecuación de conservación de momento para fluidos newtonianos incompresibles, dada como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F}, \quad (2.35)$$

donde $\nu = \mu/\rho_o$ es la *viscosidad cinemática*. A la ecuación (2.35) se le conoce como *ecuación de Navier-Stokes*.

2.4.4 Atenuación debida al coeficiente de viscosidad.

Capas límite.

Las *capas límite* son capas delgadas vecinas a la superficie de un cuerpo sólido sumergido en un fluido, o también a las fronteras que delimitan la región donde se encuentra este fluido. La característica más importante de estas capas límite es que en esta región del fluido se deben de considerar efectos debidos a la viscosidad pues es allí donde dichos efectos son grandes; esto se debe a que en dicha región los gradientes de la velocidad también son importantes. Fuera de la capa límite podemos considerar que el fluido se comporta como un fluido ideal. Entonces, si tenemos un flujo medio definido en todo el espacio, y si fuera de la capa límite este flujo es irrotacional al tiempo $t = 0$, esta característica se mantendrá en la región externa a la capa límite. De hecho, cuando consideramos el caso lineal, la ecuación de conservación de momento era

$$\rho_o \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p_e,$$

por lo que si calculamos el rotacional de la igualdad anterior, tenemos

$$\rho_o \left[\nabla \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] = -\nabla \times \nabla p_e = 0,$$

independientemente del valor de p_e .

Si definimos a la *vorticidad* del fluido como $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u}$ ⁵, entonces de la ecuación anterior se deduce que

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = 0, \quad (2.36)$$

y que por ende $\vec{\Omega}$ no depende del tiempo. Al flujo irrotacional que se encuentra fuera de la capa límite se le llama *flujo externo*[C.2, p.268]. Por el contrario, dentro de la capa límite el flujo no puede considerarse como irrotacional; en dicha región los gradientes de velocidad deben de ser grandes. Esto se debe a que la velocidad relativa entre la frontera y el fluido es cero, y que la velocidad debe pasar de este valor al valor que toma en la capa límite, cuyo espesor es pequeño. Lo anterior se refleja en la ecuación satisfecha por la vorticidad en la capa límite, es decir

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \nu \nabla^2 \Omega.$$

En consecuencia, $\vec{\Omega}$ depende del tiempo. Al flujo dentro de la capa límite se le denomina *flujo interno*.

Atenuación de la energía dentro de la capa límite

En la sección anterior se estudiamos un mecanismo de atenuación de energía en ondas sonoras. Sin embargo, este tipo de atenuación es pequeño comparado con la atenuación debida a la viscosidad del fluido. Vemos que en las ecuaciones de Navier-Stokes para la conservación de momento, la viscosidad aparece como el coeficiente de $\nabla^2 \vec{u}$. Anteriormente definimos a la viscosidad cinemática ν como μ/ρ_o . Además, sabemos que una ecuación del tipo

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{u}$$

se conoce como ecuación de calor. En nuestro caso, la existencia de ν en las ecuaciones se debe a los esfuerzos viscosos dentro del fluido. Entonces, estos esfuerzos disipan energía únicamente en la región donde la viscosidad sea importante, es decir, dentro de la capa límite. Esto se debe a que, si tenemos una velocidad $\vec{u}$ de la forma

$$u = U(y) \exp [i (\omega t - kx)],$$

⁵En la literatura a la vorticidad se le denota usualmente por $\vec{\omega}$, pero aquí la denotaremos de este modo para no confundirla con la frecuencia angular.

entonces U es solución de la ecuación

$$\nu U'' - (k^2 - i\omega)U = 0,$$

por lo que

$$U(y) = A \exp \left\{ -\sqrt{\frac{k^2 - i\omega}{\nu}} y \right\},$$

cuando u está acotada en infinito. De la relación anterior vemos que la amplitud de la velocidad dentro de la capa límite decae como $\exp \left[-\sqrt{k^2/\nu - i\omega/\nu} y \right]$ que depende, como veremos, del ancho de la capa límite, así como del número de onda k^2 dividido por la viscosidad cinématica. Esto hace que el decaimiento de U sea muy grande en regiones donde la viscosidad entra en juego. En general, esta viscosidad es pequeña. Esto hace que el decaimiento de U sea aún más abrupto. También debemos constatar que en regiones donde la viscosidad interviene y donde el número de onda es además grande, el decaimiento es aún mayor, por lo que en estas regiones la disipación de la energía debida a la viscosidad es máxima.

Como dijimos antes, la fase de U depende del ancho de la capa límite. Siguiendo el razonamiento de Lighthill [L.2, p.129-131], determinaremos el ancho de esta capa límite para el caso de un movimiento periódico, de frecuencia ω , en un fluido que se encuentra en la región $y > 0$ y tal que la frontera en $y = 0$ sea una frontera sólida. Supondremos también que el gradiente de presiones en la dirección x , $\partial p_e / \partial x$, oscila con respecto al tiempo con la misma frecuencia que $\vec{u}$ y es independiente de y . Por último, ρ y μ se tomarán como constantes. Además, suponemos que la componente x de la velocidad, u , depende únicamente de las coordenadas y y t . Consideraremos a las fuerzas externas como despreciables con respecto a la fuerza debida a la viscosidad y que el término $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ es pequeño (por ser de orden cuadrático). La ecuación de conservación de momento en la dirección x está entonces dada como

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

debido a que $u = u(y; t)$. Debemos resolver la ecuación anterior junto con la condición de frontera $u = 0$ en $y = 0$.

Suponemos además que tanto u como $\partial p_e / \partial x$ son proporcionales a $\exp(i\omega t)$, de modo a que pueden expresarse como

$$\begin{aligned} u &= u_o(y) \exp(i\omega t), \text{ y} \\ \frac{\partial p_e}{\partial x} &= \frac{\partial p_o(x)}{\partial x} \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

donde la solución física del problema es la parte real de estas expresiones. De las ecuaciones (2.37) obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para $u_o(y)$ dada por

$$\mu \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} - \rho i \omega u_o(y) = \frac{\partial p_o(x)}{\partial x}. \quad (2.37)$$

Las condiciones de frontera son

$$u_o(0) = 0, \text{ y} \quad (2.38)$$

$$u_o(y) \text{ finito cuando } y \rightarrow \infty. \quad (2.39)$$

La solución de la ecuación (2.37), con las condiciones de frontera (2.38) y (2.39), se escribe como

$$u_o(y) = A(x) \exp\left(-\sqrt{i\omega/\nu} y\right) + B(x) \exp\left(\sqrt{i\omega/\nu} y\right) + C(x), \quad (2.40)$$

donde $A \exp\left(-\sqrt{i\omega/\nu} y\right) + B \exp\left(\sqrt{i\omega/\nu} y\right)$ es la solución general de la ecuación homogénea, mientras que $C(x)$ es una solución particular de la ecuación (2.37). Por la condición de frontera (2.39) es necesario que $B = 0$. Por otro lado, una solución particular de la ecuación (2.37) es $C(x) = i\rho^{-1}\omega^{-1}\partial p_o/\partial x$. Usando esta solución particular y por la condición de frontera (2.38), deducimos que $A = -i\rho^{-1}\omega^{-1}\partial p_o/\partial x$. Finalmente, lo anterior nos permite concluir que

$$u_o(y) = i\rho^{-1}\omega^{-1}\frac{\partial p_o}{\partial x} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{i\omega/\nu} y\right)\right]. \quad (2.41)$$

Cuando y crece estamos fuera de la capa límite. Entonces la solución tiende al valor

$$u_{ex}(y) = i\rho^{-1}\omega^{-1}\frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad (2.42)$$

el cual debe de coincidir con el valor que toma la velocidad en la región donde el fluido de supone ideal (irrotacional, incompresible e inviscido). De las ecuaciones (2.41) y (2.42), vemos que

$$u_o = \left[1 - \exp\left(-\sqrt{i\omega/\nu} y\right)\right] u_{ex}. \quad (2.43)$$

En la figura 2.2 se muestran las gráficas de las partes real -la cual es la solución física del problema- e imaginaria de u_o/u_{ex} . De la ecuación (2.43) inferimos que

$$\begin{aligned} \text{parte real de } u_o = \Re(u_o) &= \left[1 - \exp\left(-\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\right] y \\ \text{parte imaginaria de } u_o = \Im(u_o) &= \exp\left(-\frac{Y}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right), \text{ con } Y = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

El ancho δ de la capa límite se puede definir tomando un valor de y arbitrario, a partir del cual $(u_o - u_{ex})/u_{ex}$ sea razonablemente pequeño. Por ejemplo, podemos definir al ancho de

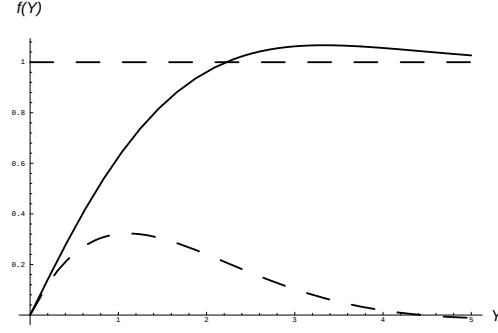


Figura 2.2: **Capa límite:** Un movimiento oscilatorio se modifica a distancias pequeñas de la frontera por un factor $1 - \exp\left(-\sqrt{i\omega/\nu} y\right)$. La variable Y corresponde a $y(\frac{\omega}{\nu})^{1/2}$. La parte real corresponde a la línea continua, y la imaginaria a la línea punteada [L.2, p.93].

capa límite de modo a que $(u_o - u_{ex})/u_{ex}$ sea menor a 3% [L.2, p.131]. Esto se logra tomando a dicho ancho como

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \quad (2.44)$$

Sin embargo, la arbitrariedad en la elección de δ se reduce al coeficiente de proporcionalidad, es decir, a la elección del valor y a partir del cual consideraremos que el fluido es ideal. Pudimos, por ejemplo, haber tomado a δ simplemente como $\sqrt{\nu/\omega}$.

2.5 Superposición de un flujo medio estacionario y de un movimiento periódico.

En esta sección veremos como se modifican las ecuaciones de Navier-Stokes cuando consideramos la superposición de un movimiento medio estacionario y de un movimiento periódico. Veremos que las ecuaciones que se obtienen son equivalentes a las que se obtendrían si estudiáramos el problema del régimen turbulento permanente [H.2, p.7]. Antes de determinar las ecuaciones de movimiento, vamos a ver las propiedades de los promedios temporales.

2.5.1 Definición del promedio.

Sea una propiedad A del fluido. Entonces el promedio temporal de dicha propiedad es

$$\overline{A}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, \tau) d\tau, \quad (2.45)$$

donde T es el periodo de A . En este trabajo hemos usado ya dicho promedio para el caso de movimientos periódicos (ver 2.2). A continuación enunciaremos las propiedades de los promedios [H.2, p.7]:

Propiedades de los promedios:

Sean $A = \overline{A} + a$ y $B = \overline{B} + b$. Entonces

1. $\overline{A} = \overline{\overline{A} + a} = \overline{\overline{A}} + \overline{a}$, y por lo tanto $\overline{a} = 0$;
2. $\overline{B} = \overline{\overline{B} + b} = \overline{\overline{B}} + \overline{b}$, y por lo tanto $\overline{b} = 0$;
3. $\overline{\overline{A} \overline{B}} = \overline{\overline{A} \overline{B}} = \overline{A} \overline{B}$;
4. $\overline{\overline{A} b} = \overline{\overline{A} b} = \overline{A} \overline{b} = 0$;
5. $\overline{\overline{B} a} = \overline{\overline{B} a} = 0$; y finalmente
6. $\overline{AB} = \overline{(\overline{A} + a)(\overline{B} + b)} = \overline{A} \overline{B} + \overline{ab}$.

2.5.2 Ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones generales de conservación siguen siendo válidas para un fluido donde se superponen un flujo medio y un movimiento periódico. Sin embargo, en este caso se separan a las variables en la suma de su valor medio y de una fluctuación alrededor de este valor; esta fluctuación sería el movimiento periódico. Consideraremos el caso de un fluido newtoniano, incompresible, y tal que su viscosidad sea constante. Entonces las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones (2.33) y (2.35), es decir

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \text{ y} \quad (2.46)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F}. \quad (2.47)$$

Para un fluido incompresible $\rho = \overline{\rho} = \text{constante}$. Proponemos a $\vec{u}$ y a p como

$$\vec{u} = \overline{\vec{u}} + \vec{u}', \quad \text{y} \quad (2.48)$$

$$p = \overline{p} + p', \quad (2.49)$$

con $\overline{\vec{u}'} = 0$ y $\overline{p'} = 0$. Esto se cumple independientemente de que los movimientos sean cuasi-periódicos o no. Cuando tenemos perturbaciones periódicas o cuasi-periódicas, se cumplen las

siguientes igualdades para derivadas de los promedios [S.1, art.38]:

$$\overline{\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t}} = 0, \quad (2.50)$$

$$\overline{\frac{\partial p'}{\partial t}} = 0. \quad (2.51)$$

$$(2.52)$$

Además para cualquier perturbación se cumple

$$\overline{\nabla^2 \vec{u}'} = 0.$$

Ecuación de Continuidad.

Si reemplazamos en la ecuación de conservación de masa (2.47) el valor para u dado en la ecuación (2.48) y promediamos sobre un periodo, podemos intercambiar el orden de integración y el de derivación (la derivada parcial es una derivada espacial). Además, usando las propiedades de los promedios antes mencionadas,

$$\sum_i \overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i}} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\bar{u}_i + u'_i}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_i = 0. \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la divergencia del valor medio de la velocidad, denotada como $\bar{u}_i$, también se anula cuando consideramos una perturbación o una variación de u_i alrededor de su valor medio.

Conservación de Momento: Ecuación de Reynolds.

Sea A el lado izquierdo de la ecuación (2.47). Reemplazemos el valor de $\vec{u}$ en dicha ecuación. Obtenemos

$$A = \rho_o \frac{\partial (\vec{\bar{u}} + \vec{u}')}{\partial t} + \rho_o \left[(\vec{\bar{u}} + \vec{u}') \cdot \nabla \right] (\vec{\bar{u}} + \vec{u}').$$

Si desarrollamos primero esto para obtener una suma de productos y promediamos después, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \overline{\frac{\rho \partial \vec{\bar{u}}}{\partial t}} + \overline{\frac{\rho \partial \vec{u}'}{\partial t}} + \overline{\rho (\vec{\bar{u}} \cdot \nabla) \vec{\bar{u}}} \\ & + \overline{\rho (\vec{\bar{u}} \cdot \nabla) \vec{u}'} + \overline{\rho (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'} + \overline{\rho (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{\bar{u}}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ahora bien, como supusimos que la densidad es constante, tenemos que

$$\overline{\frac{\rho_o \partial \vec{u}'}{\partial t}} = \rho_o \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = 0.$$

El primer término de la ecuación (2.54) es simplemente $\overline{\rho_o \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}$, debido a que tanto $\rho_o = \bar{\rho}$ como $\vec{u}$ son valores promedio. Por otro lado, si usamos la última de las propiedades de los promedios y el hecho de que el promedio temporal conmuta con las derivadas espaciales, tenemos que

$$\overline{\rho_o (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}} = \rho_o (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho_o \overline{(\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'}.$$

Análogamente, usando las demás propiedades vemos que los últimos tres términos de la ecuación (2.54) se anulan. Entonces,

$$\bar{A} = \rho_o \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] + \rho_o \overline{(\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'}. \quad (2.55)$$

Sea B el lado derecho de la ecuación (2.47). El promedio sobre un periodo de B es más sencillo de determinar que el anterior. De hecho, dicho promedio es

$$\bar{B} = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{F}. \quad (2.56)$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.56) son iguales, es decir,

$$\rho_o \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho_o \vec{F} - \rho_o \overline{(\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'}. \quad (2.57)$$

Por otro lado, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, y usando la última propiedad de los promedios, así como la ecuación (2.53), tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\vec{u} (\nabla \cdot \vec{u})} &= \overline{\vec{u} (\nabla \cdot \vec{u})} + \overline{\vec{u}' (\nabla \cdot \vec{u}')} \\ &= \overline{\vec{u}' (\nabla \cdot \vec{u}')} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que podemos sumar el término

$$-\rho_o \overline{\vec{u}' (\nabla \cdot \vec{u}')} = 0$$

del lado derecho de la ecuación (2.56). Es entonces claro que podemos escribir a la ecuación de Navier-Stokes, para el caso en que un movimiento medio se superpone a un movimiento periódico, como

$$\rho_o \left[\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \sum_k \bar{u}_k \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_k} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 \vec{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho_o \bar{F}_i - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho_o u'_i u'_k} \right). \quad (2.57)$$

Cuando el flujo medio es estacionario, el primer término del lado izquierdo de la ecuación (2.57) se anula.

2.5.3 Interpretación física del término $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} (\overline{\rho u'_i u'_k})$.

Antes (ecuación (2.33)) habíamos obtenido el tensor de esfuerzos para el caso de un fluido newtoniano. Para el caso incompresible este tensor es

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

y la ecuación de Navier-Stokes en función de τ_{ij} es

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho F_i \\ &= \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i. \end{aligned}$$

Vemos que podemos incluir el término extra, es decir, el término $-\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u'_i u'_k})$, dentro del tensor de esfuerzos τ_{ij} . En ese caso dicho tensor se define como

$$\tau_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j}, \quad (2.58)$$

en el que hemos suprimido el término $\partial \bar{u}_j / \partial x_i$ debido a que

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \left[\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Por lo tanto, $\overline{\rho u'_i u'_j}$ representa el esfuerzo debido a la perturbación $\vec{u}'$. Como Reynolds fue el primero en escribir la ecuación para un fluido -para el caso de un fluido turbulento- en la forma (2.57), a este tensor se le conoce como *Esfuerzo de Reynolds* [H.2, p.22]. Este esfuerzo tiene componentes normales ($i = j$) y tangenciales ($i \neq j$). Consideremos que el flujo medio se anula, por lo que el movimiento se debe a los esfuerzos de Reynolds. Entonces, como $\rho u'_1$ es el momento en la dirección x_1 , $(\rho u'_1)u'_1$ es el flujo de momento en la misma dirección, y el flujo medio es simplemente $\overline{(\rho u'_1)u'_1}$. consideremos un elemento de volumen tal y como se muestra en la figura 2.3. Si dS_1 es el elemento de superficie perpendicular al plano (x_2, x_3) , el flujo medio de momento a través de dS_1 es $\overline{(\rho u'^2_1)} dS_1$; por lo tanto, en la expresión para τ_{11} aparece el término $-\overline{(\rho u'^2_1)}$, pues dicho término corresponde a la reacción del medio sobre el elemento de volumen. Consideremos ahora el caso en que $i \neq j$. En este caso la componente j del flujo medio a través de dos superficies perpendiculares a la dirección x_i es

$$J_j(x_i + h) = \overline{\rho u'_i(x_i + h) u'_j(x_i + h)} S$$

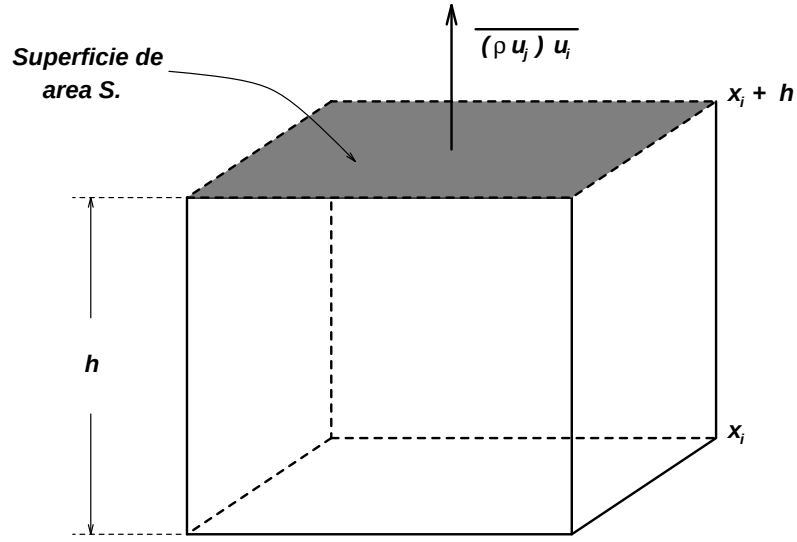


Figura 2.3: Esfuerzos de Reynolds en un elemento de volumen. El área de la base de este elemento es S y su altura es h . También se muestra el flujo medio de la componente ρu_j del momento en la dirección u_i .

si estamos en la superficie superior, y

$$J_j(x_i) = \overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)} S$$

cuando consideramos a la cara inferior del cubo. Si h es pequeño, podemos desarrollar en serie de Taylor la primera expresión y restarle la segunda, obteniendo así

$$J_j(x_i + h) - J_j(x_i) = S \left[\overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)} + \frac{\partial \overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)}}{\partial x_i} h + \cdots - \overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)} \right],$$

por lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta J_j}{h} = S \frac{\partial \overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)}}{\partial x_i}.$$

La relación anterior no es sino la fuerza, en la dirección x_i , debida al flujo medio pasando a través de la superficie de nuestro elemento de volumen. Esta fuerza provoca una reacción igual y opuesta en dicho elemento. Definimos, entonces, a la fuerza extra -debida al exfuerzo de Reynolds- por unidad de área como

$$F_j = - \sum_i \frac{\partial \overline{\rho u'_i(x_i) u'_j(x_i)}}{\partial x_i}. \quad (2.59)$$

2.6 Flujo acústico.

2.6.1 Ecuaciones para movimientos de flujo lentos.

Para determinar el flujo acústico, debemos de encontrar $(\bar{u})_{ex}$, la velocidad media del fluido fuera de la capa límite, debida a la propagación de una onda sonora dentro del medio. Esta velocidad media se determina a partir de las ecuaciones

$$\sum_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.60)$$

$$\rho_o \sum_j \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho_o F_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \quad (2.61)$$

que son las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes para la velocidad media $\bar{u}$ cuando el fluido es incompresible.

Una manera de calcular $\bar{u}$ es suponer que el término de la izquierda, en la ecuación (2.61), es mucho menor que los términos de la derecha. Para que esta aproximación sea válida, es necesario suponer que el flujo de momento $\bar{\vec{u}}$ a través de la superficie S de una región fija arbitraria sea muy pequeño; es decir

$$\rho_o \int_S (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} dS \approx 0,$$

por lo que

$$\rho_o (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \approx 0.$$

Esto equivale a considerar que la dinámica del flujo medio está -casi exclusivamente- determinada por los esfuerzos viscosos [S.1, p.77-78]. Además, las ecuaciones (2.60) y (2.61) forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ y $\bar{p}$. A esta aproximación se la llama aproximación RNW, pues Rayleigh, Nyborg y Westervelt [L.3, p.403] la usaron para determinar movimientos medios debidos a un término F_i de forzamiento. Otra aproximación consiste en despreciar los términos debidos a fuerzas inerciales (como la gravedad, la cual se considera para el caso de ondas en agua profunda, que estudiamos en el apéndice C), pues, como se dijo antes, la fuerza debida a los esfuerzos de Reynolds es la que determina el tipo de movimiento. Por otro lado, si consideramos al flujo externo, donde la viscosidad es despreciable, entonces la ecuación (2.61) toma la forma

$$(F_i)_{inv} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = 0. \quad (2.62)$$

Vemos que esta fuerza se equilibra con el gradiente de presiones (el cual no varía dentro o fuera de la capa límite, pues no depende de la viscosidad del fluido, parámetro que determina la diferencia entre los flujos externo e interno), y que la ecuación (2.61) puede escribirse como

$$(F_i) - (F_i)_{inv} + \mu \nabla^2 \overline{u_i} = 0. \quad (2.63)$$

Por lo tanto, sólo la diferencia entre F_i -dentro de la región donde μ es importante- y $(F_i)_{inv}$ es capaz de inducir un flujo acústico. Usaremos las ecuaciones (2.60) y (2.63) para determinar $(\overline{u_i})_{ex}$. Este flujo acústico depende del tipo de perturbación u'_i y de como se modifica -por efectos disipativos- dentro de la capa límite. Calcularemos aquí el flujo acústico para casos en los que es aplicable la ley de flujo de Rayleigh, la cual se define a continuación.

2.6.2 Ley de flujo de Rayleigh.

La ley de flujo de Rayleigh se aplica a dos tipos de flujos medios [L.3, p.414]:

1. Al flujo acústico resultante de una onda sonora estacionaria que se disipa dentro de la capa límite, debido al efecto de la viscosidad.
2. Al flujo acústico resultante de la vibración de una frontera que delimita a un fluido inicialmente en reposo (a este flujo también se le llama flujo acústico, a pesar de no estar presente una onda sonora en el sistema).

Como dijimos anteriormente, consideramos que el flujo acústico se debe a la atenuación de la energía dentro de la capa límite, por ser los mecanismos de atenuación en dicha región mucho más importantes que otros. Esto se debe a que la viscosidad del fluido es la que provoca la disipación de la energía y la viscosidad es importante sólo cerca de la frontera. Supondremos, a continuación, que esta frontera se encuentra en $y = 0$. También consideraremos el caso bidimensional. Calcularemos el flujo acústico cerca de la frontera. Para ello supondremos que la velocidad de la perturbación u' es periódica con respecto al tiempo fuera de la capa límite. Después construiremos la velocidad dentro de la capa usando los resultados obtenidos en la sección 2.4.4. Deduciremos entonces la forma de la velocidad v' dentro de la capa límite por medio de la ecuación de continuidad.

En el caso 2, el fluido adquiere una velocidad media después de cierto tiempo, durante el cual la onda que se propaga sobre la frontera transmite una cantidad importante de momento -así como de energía- al fluido que se encuentra en contacto con esta frontera. Los casos 1 y 2 son en realidad el mismo, pues basta una transformación de ejes coordenados para pasar de uno a otro. Si $U(x)$ es la velocidad fuera de la capa. Entonces, la velocidad

$$u'_{ex} = U(x) \exp(i\omega t) \quad (2.64)$$

provoca, en ambos casos, el mismo tipo de flujo acústico en la frontera de la capa límite. Por otro lado, dentro de esta región, la velocidad u'_{ex} se atenúa por un factor dependiente de la distancia a la frontera. Dicho factor se determinó anteriormente para el caso de una onda viajera (ver 2.4.4). Entonces, por analogía a ese caso, podemos escribir a la velocidad dentro de la capa límite como

$$u' = u'_{ex} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\}, \quad (2.65)$$

donde u'_{ex} está ahora dado por la ecuación (2.64). La ecuación (2.65) nos permite determinar la componente vertical v' de la velocidad.

Consideremos primero el caso 2). En ese caso el fluido es incompresible, por lo que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo, si determinamos la velocidad vertical v' usando la ecuación de continuidad anterior y la ecuación (2.65) para u' , obtenemos un resultado que nos lleva a concluir que v' crece con y , lo cual no es posible debido a que la velocidad vertical fuera de la capa límite debe de ser finita. Por otra parte, en el caso 1) debemos de considerar al fluido como compresible, pues de lo contrario no se propagaría una onda sonora en el medio (la velocidad de esta onda sonora sería infinita). Pero podemos encontrar condiciones sobre las perturbaciones que nos den un resultado coherente para ambos casos. Tomemos entonces la ecuación de continuidad dada como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Supondremos que

1. $\nabla \rho \approx 0$;
2. ρ es función de x y de t únicamente, por lo que $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ es independiente de y ;
3. Como dijimos antes, estamos tratando el caso bidimensional;
4. La velocidad $\vec{u}$ puede separarse en una velocidad media $\vec{\bar{u}}$ y en una perturbación $\vec{u}'$, cuya componente horizontal u' está dada por la ecuación (2.65) cuando estamos dentro de la capa límite.

Ahora bien, por la ecuación de continuidad y por las condiciones 1 y 2, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] = \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{u}) = 0.$$

Promediamos la ecuación anterior con respecto al tiempo. Entonces

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{u})} = \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{\bar{u}}),$$

ya que $\vec{\bar{u}}'$ es nulo. Lo anterior nos induce a concluir que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{u}') = 0,$$

por lo que dentro de la capa límite la velocidad vertical v' debe de ser solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial x \partial y} = -\frac{du'_{ex}}{dx} \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \exp \left[-\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} &= +\frac{du'_{ex}}{dx} \exp \left[-\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] + A(x) \\ \Rightarrow v' &= -\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{du'_{ex}}{dx} \exp \left[-\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] + A(x)y + B(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, pedimos que $v' = 0$ en $y = 0$, por lo que

$$B(x) = +\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{du'_{ex}}{dx},$$

y que v'_{ex} esté acotada cuando y es grande, por lo que $A(x) = 0$. Por lo tanto, concluimos que

$$v' = +\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{du'_{ex}}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\}. \quad (2.66)$$

Podemos encontrar el flujo acústico a partir de las ecuaciones (2.59), (2.65) y (2.66), pues

$$F_x = -\rho_o \left[\left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} \right) \right]. \quad (2.67)$$

En efecto, el flujo acústico se relaciona con la coordenada tangencial del esfuerzo de Reynolds [L.3], por lo que determinaremos únicamente la velocidad $(\bar{u})_{ex}$. Antes de calcular F_x , demostraremos que el promedio temporal de la parte real de dos variables tales que se puedan escribir como un factor complejo multiplicando a $\exp(i\omega t)$, es igual a la mitad de la parte real del producto de una de las variables y del complejo conjugado de la otra. Sean

$$\begin{aligned} u' &= (A + Bi) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)], \quad y \\ v' &= (C + Di) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Entonces

$$u'_R v'_R = [A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)] [C \cos(\omega t) - D \sin(\omega t)],$$

con $u'_R = \Re(u')$ y $v'_R = \Re(v')$, por lo que

$$\overline{u'_R v'_R} = \frac{1}{2} (AC + BD).$$

Sea ahora v'^* el complejo conjugado de v' . Multiplicando a u' por v'^* , obtenemos

$$\begin{aligned} u' v'^* &= \{[A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)] + i[B \cos(\omega t) + A \sin(\omega t)]\} \times \\ &\quad \{[C \cos(\omega t) - D \sin(\omega t)] - i[D \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)]\}, \end{aligned}$$

y de lo anterior deducimos que

$$\frac{1}{2} (u' v'^*)_R = \frac{1}{2} (AC + BD),$$

lo cual nos permite concluir que

$$\overline{u'_R v'_R} = \frac{1}{2} (u' v'^*)_R,$$

con $(u' v'^*)_R = \Re(u' v'^*)$. En el caso que nos interesa, los valores de A , B , C y D , en las ecuaciones anteriores, son

$$A = U [1 - \exp(-ay) \cos(ay)], \quad (2.69)$$

$$B = U \exp(-ay) \sin(ay), \quad (2.70)$$

$$C = \frac{1}{2a} \frac{dU}{dx} [1 - \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay)], \quad y \quad (2.71)$$

$$D = \frac{1}{2a} \frac{dU}{dx} [\exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay) - 1], \quad (2.72)$$

donde $a = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}$, por lo que

$$\overline{u'^2_R} = \frac{1}{2} (A^2 + B^2) = \frac{1}{2} U^2 [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)], \quad (2.73)$$

y

$$\overline{u'_R v'_R} = \frac{1}{4a} U \frac{dU}{dx} [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)]. \quad (2.74)$$

Además, suponemos que los cambios de $\bar{u}$ son muy pronunciados en la dirección y mientras que en la dirección x son más suaves, por lo que

$$\nabla^2 \bar{u} \approx \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}.$$

Entonces, usando esta aproximación y las ecuaciones (2.63) y (2.67), tenemos que

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \nu^{-1} \left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right)_{ex} + \frac{\partial \overline{u'_R v'_R}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \overline{u'_R v'_R}}{\partial y} \right)_{ex} \right]. \quad (2.75)$$

Podemos determinar $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}(x, \xi)$ como

$$\begin{aligned} \int^\xi \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}(x, \eta) d\eta &= \nu^{-1} \int^\xi \left[\frac{\partial^2 \overline{u'^2_R}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \overline{u'^2_R}}{\partial x^2} \right)_{ex} \right] (x, \eta) d\eta + \\ &+ \nu^{-1} \left[\overline{u'_R v'_R} - \left(\overline{u'_R v'_R} \right)_{ex} \right] (x, \xi). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Esto se debe a que queremos que $\bar{u}$ esté acotada y si tuvieramos además una constante del lado derecho de la ecuación (2.76), obtendríamos términos de la forma αy al integrar dos veces, y este término no está acotado cuando y crece. Usando la ecuación (2.73), vemos que

$$\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} = U \frac{dU}{dx} [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)].$$

$\left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right]_{ex}$ es simplemente el valor que toma $\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x}$ cuando $y \rightarrow \infty$, es decir

$$\left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right]_{ex} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right] = U \frac{dU}{dx}.$$

Entonces

$$\left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right]_{ex} = U \frac{dU}{dx} [-2 \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)]. \quad (2.77)$$

Pero

$$\int^\xi -2 \exp(-a\eta) \cos(a\eta) + \exp(-2a\eta) d\eta = -\frac{\exp(-2a\xi)}{2a} + \frac{\exp(-a\xi)}{a} [\cos(a\xi) - \sin(a\xi)],$$

por lo que

$$\int^\xi \left[\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2_R}}{\partial x} \right)_{ex} \right] (x, \eta) d\eta = U \frac{dU}{dx} \left\{ -\frac{\exp(-2a\xi)}{2a} + \frac{\exp(-a\xi)}{a} [\cos(a\xi) - \sin(a\xi)] \right\}. \quad (2.78)$$

Además, vemos de la ecuación (2.74) que

$$\left[\overline{u'_R v'_R} - \left(\overline{u'_R v'_R} \right)_{ex} \right] (x, \xi) = \frac{1}{4a} U \frac{dU}{dx} [-2 \exp(-a\xi) \cos(a\xi) + \exp(-2a\xi)]. \quad (2.79)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.76) queda como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}(x, \xi) = \nu^{-1} U \frac{dU}{dx} \left\{ \frac{\exp(-a\xi) \cos(a\xi)}{2a} - \frac{\exp(-a\xi) \sin(a\xi)}{2a} - \frac{\exp(-2a\xi)}{4a} \right\}. \quad (2.80)$$

A la ecuación (2.80) volvemos a integrarla, esta vez entre la frontera ($y = 0$) y en un punto arbitrario dentro de la capa límite. Por la condición de adherencia en la frontera, tenemos que $\bar{u}(x, 0) = 0$, y así

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = \nu^{-1} U \frac{dU}{dx} \left\{ -\frac{1}{4a} \int_0^y \exp(-2a\xi) d\xi - \frac{1}{a} \int_0^y \exp(-a\xi) \sin(a\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a} \int_0^y \exp(-a\xi) \cos(a\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el término entre corchetes es igual a

$$\frac{\exp(-2ay)}{8a^2} + \frac{3 \exp(-a\xi) \sin(a\xi)}{4a^2} + \frac{\exp(-a\xi) \cos(a\xi)}{4a^2} - \frac{3}{8a^2}.$$

Además, cuando consideramos al flujo externo, ese término se reduce a

$$-\frac{3}{8a^2}.$$

Por lo tanto,

$$[\bar{u}(x, y)]_{ex} = -\frac{3\nu^{-1}}{8a^2} U \frac{dU}{dx},$$

y como $a = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}$, obtenemos finalmente

$$\bar{u}_{ex} = -\frac{3}{4\omega} U \frac{dU}{dx}. \quad (2.81)$$

A la velocidad $\bar{u}_{ex}$ se le denota también como $\bar{u}_s$, por ser una velocidad de deslizamiento (“slip velocity”). Es importante constatar que $\bar{u}_s$ no depende del coeficiente de viscosidad. Por lo tanto, aunque este coeficiente de atenuación sea muy pequeño, el flujo acústico asociado con dicha atenuación no cambia. En caso de que se consideren otros mecanismos de disipación de energía acústica, dichos mecanismos pueden tener el efecto de aumentar la velocidad del flujo medio. Sin embargo, suponemos que la mayor contribución al flujo acústico se debe a la atenuación de la energía debida al efecto de la viscosidad sobre el medio.

En este capítulo hemos desarrollado algunos aspectos sobre mecánica de fluidos. De estos aspectos el más importante es el efecto de una perturbación sobre un flujo medio. Esta perturbación aparece en la ecuación de conservación de momento del flujo medio $\vec{u}$ en la forma de un término no lineal conocido como esfuerzo de Reynolds. La componente tangencial del esfuerzo

de Reynolds es la que se relaciona con la generación de un flujo de momento en la dirección de propagación de la onda, es decir, en la dirección x ; esto nos permitió calcular únicamente la componente en x del flujo acústico $\bar{u}$. Por otra parte, estudiamos diversos mecanismos de disipación de energía. De estos mecanismos, el más importante es el debido al efecto de la viscosidad sobre la onda que se propaga en la frontera del fluido (para el caso en que el fluido está en reposo y que la perturbación proviene del movimiento de la frontera que delimita al fluido). En el tercer capítulo veremos que en el caso de la cóclea los fenómenos no lineales, así como la disipación de energía, también interactúan para generar un flujo acústico cerca de la frontera oscilante del sistema, es decir, cerca de la membrana basilar. Para ello es necesario que estudiemos algunas de las propiedades de los fluidos que se encuentran dentro del sistema auditivo, así como las propiedades mecánicas de la membrana basilar. Dedicaremos el siguiente capítulo a este estudio, basándonos en algunos experimentos realizados durante este siglo y que aclaran el papel que juega la membrana basilar en el mecanismo de propagación de ondas en la cóclea.

Capítulo 3

BIOMECÁNICA COCLEAR.

En el capítulo anterior vimos algunos conceptos sobre fluidos que nos permitirán, posteriormente, explicar el mecanismo de propagación de ondas en la cóclea. Este sistema se compone no sólo de dos tipos de fluidos -cuyas propiedades mecánicas son iguales- sino también de una frontera flexible: la membrana basilar. Antes de entrar en detalles sobre experimentos que nos permiten entender el papel jugado por la membrana basilar en el proceso de propagación de la onda, expondremos en la primera sección las características anatómicas y fisiológicas del oído interno. A continuación describimos someramente la anatomía del oído externo y del oído medio, así como el mecanismo de transmisión de las ondas sonoras desde la oreja hasta la membrana que une al oído medio con el interno.

El aparato auditivo del hombre es doble y está situado a ambos lados de la cabeza. El oído externo se compone de la oreja y del conducto auditivo externo. La presión del aire -debida a la propagación de una onda sonora en este medio- en el tubo auditivo externo hace vibrar a la membrana timpánica (ver figura 3). Esta membrana separa al oído externo del oído medio, el cual está constituido por una cadena de huesecillos -el *martillo*, el *yunque* y el *estribo*- y de un conducto que comunica con la cavidad nasal llamado *trompa de Eustaquio*. Debido a que el martillo se encuentra adherido a la membrana timpánica, las vibraciones de dicha membrana se transmiten mecánicamente a la cadena de huesecillos; en particular, al estribo. Este huesecillo se encuentra adherido -gracias a un ligamento- a otra membrana que separa al oído medio del interno. Por la forma de esta membrana, se le da el nombre de *ventana oval*.

A continuación describiremos al oído interno y también veremos ciertas propiedades de los fluidos así como de las estructuras que lo componen. La importancia de esta descripción reside en que el mecanismo de propagación de ondas en el oído interno y su efecto sobre el movimiento de los fluidos dentro del mismo son la parte central de este trabajo.

3.1 Anatomía y fisiología del oído interno.

Al oído interno se le conoce también como *laberinto*. Consta de un *laberinto membranoso* cerrado, lleno de un líquido llamado *endolinfa* (ver figura 3.2). Sobre porciones de su pared se encuentran ubicados receptores nerviosos, cuya función varía según su posición dentro del laberinto. El laberinto membranoso se divide, además, en tres partes que se diferencian no sólo por su aspecto sino también por su función. Estas tres partes son: los *canales semicirculares*, el *vestíbulo*, y el *caracol*. El vestíbulo se compone a su vez del *utrículo* y del *sáculo*; comunica por arriba con los canales semicirculares y por abajo con el caracol. Sin embargo, el canal de Hensen (figura 3.2), el cual conecta al sáculo con el caracol, se encuentra a menudo obliterado en el adulto (ver [F.1, p.685]).

Tanto el vestíbulo como los canales semicirculares forman parte del órgano del equilibrio, por lo que su estudio está fuera del contexto de este trabajo. Para saber detalles sobre su anatomía o su funcionamiento, consultar por ejemplo las referencias [F.1, pp.689-691] y [Q.1, pp.485-486]. Antes de considerar la anatomía del caracol, es importante mencionar que el laberinto membranoso se encuentra totalmente encapsulado por el laberinto óseo, cuya forma es similar a la del laberinto membranoso (ver figura 3.3). El vestíbulo corresponde, por ejemplo, a la parte del laberinto óseo que encapsula al utrículo y al sáculo [F.1, p.685]. Los laberintos óseo y membranoso se encuentran conectados a través de vasos sanguíneos y nervios. Se puede ver de la figura 3.3 que la cavidad entre estos dos laberintos, en la región del vestíbulo y del caracol, se encuentra llena de un líquido. Este líquido es llamado *perilinf*.

El caracol, o “cóclea”, constituye el órgano auditivo. Ascende desde su base dando dos vueltas y media y va estrechándose conforme se enrosca en torno a un eje. Sin embargo, la forma espiral de la cóclea no se encuentra en todos los animales. Por ejemplo, el órgano auditivo del oso hormiguero [B.2, p.407] está totalmente estirado. Por ello, esta forma no se considera en la mayoría de los modelos, y pocos autores la han considerado como esencial (Una excepción sería un artículo de Huxley [H.3], en el cual el autor estudia los posibles efectos que podría tener esta característica sobre el problema de la resonancia en la cóclea). En la figura 3.4 se muestra un corte transversal de la cóclea, desde un punto de vista macroscópico. Se ve que del laberinto óseo parte una lámina ósea que atraviesa parcialmente a la sección transversal. En el espacio entre esta lámina ósea, y el punto diametralmente opuesto al punto de partida de dicha lámina, se encuentra la llamada *membrana basilar* (24. en la figura 3.3). Al conducto que queda debajo de la membrana basilar se le da el nombre de *rampa timpánica*, debido a que está en comunicación con el tímpano a través de la *ventana redonda*. Como el ancho de la lámina espiral es mayor en la base del caracol que en la punta, la membrana basilar es -inversamente- más delgada cerca de la base que en la punta del caracol [L.6, p.2]. Por otro lado, de la lámina ósea parte otra membrana, la *membrana de Reissner* o *membrana vestibular*, la cual forma un ángulo agudo con la membrana basilar (figura 3.4). Estas dos membranas se encuentran conectadas a través de la *estría vascular*, una membrana adherida a la pared de

la cóclea. Estas tres membranas se juntan poco antes de llegar a la punta del caracol. Por lo tanto, corresponden a la parte coclear del laberinto membranoso. Por encima de la membrana de Reissner, se encuentra la *rampa vestibular*, la cual comunica con el vestíbulo a través del conducto de Hensen. Al espacio que queda libre entre el punto de unión de las tres membranas y el laberinto óseo se le conoce como *helicotrema* (ver figura 3.3). La estría vascular produce la endolinfa, de modo que la composición química de este fluido es distinta a la de la perilinfa. Sin embargo, las propiedades mecánicas de ambos líquidos son las mismas [L.6, p.2]. Además, la membrana de Reissner es muy delgada, por lo que podemos suponer que se mueve con los fluidos que la rodean [L.6, p.2]. Debido a estas propiedades tanto de los fluidos cocleares como de la membrana de Reissner, desde un punto de vista macroscópico uno puede suponer que la cóclea es únicamente un tubo dividido en dos partes, cuyas áreas transversales son aproximadamente iguales, separadas por una superficie flexible, es decir, por la membrana basilar y los órganos que se encuentran encima de ella. Al conjunto de la membrana y de estas estructuras se le da el nombre de *partición coclear*. En la figura 1 mostramos un esquema de la cóclea vista macroscópicamente. También vemos la idealización de la cóclea como dos tubos separados por la partición coclear. Desde un punto de vista microscópico, es importante señalar que sobre la membrana se encuentra el campo receptor del órgano auditivo [F.1, p.687], el *órgano de Corti*.

Por la forma de este órgano (figura 3), se crean a ambos lados de éste dos surcos espirales a lo largo de la membrana basilar. El surco interno se encuentra del lado de la lámina ósea, de la cual parte otra membrana llamada *membrana tectoria*. La membrana tectoria cubre al surco interno y se adosa sobre la parte superior del órgano de Corti. El órgano de Corti se compone de dos tipos de células: *células de sostén* y *células ciliares receptoras*. El hecho de que la composición química dentro del conducto coclear sea diferente a la de la perilinfa es importante para el mantenimiento de las células ciliares. De la figura 3, vemos que hay cuatro células ciliares en cada corte transversal de la cóclea. Una de estas es una célula interna, y su función es la de transducir la señal coclear en una señal eléctrica, la cual se traslada a través del sistema nervioso hacia el cerebro. Las células externas, por el contrario, reciben señales del sistema nervioso central y no poseen la capacidad de transducir las señales del medio que las rodea. Esta diferencia, tanto espacial como funcional, entre las células interna y externas, es un descubrimiento bastante reciente (ver por ejemplo [L.6, p.3]). De hecho, el papel de las células externas consiste en amplificar señales acústicas de poca amplitud. Es por esta razón que el comportamiento de la membrana basilar es muy distinto según si se hacen experimentos en animales vivos o en cadáveres. Dejaremos aquí las consideraciones micromecánicas de la cóclea, a pesar de la importancia que tienen. Para un análisis detallado, referirse al artículo antes mencionado [L.6]. Nos concentraremos a continuación en un estudio macroscópico de algunas propiedades mecánicas importantes para la propagación de ondas en la cóclea.

3.2 Resultados experimentales.

3.2.1 Propiedades mecánicas de los fluidos cocleares.

Mencionamos en la sección anterior que la perilinfa y la endolinfa tienen una composición química distinta, pero que sus propiedades mecánicas (viscosidad y densidad) son las mismas. También se señalamos que estas propiedades mecánicas no se alteran según si se miden *in vivo* o varias horas después de la muerte. Békésy [B.2, p.434] determinó los valores de dichas propiedades, obteniendo 0.0197 Poise ($1 \text{ Poise} = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$) para la viscosidad y 1.034 kg m^{-3} para la densidad. El valor dado para la viscosidad es el correspondiente a la temperatura corporal normal, es decir, a una temperatura de 37° C . Para el caso del agua a 40° C , la viscosidad es de $0.644 \times 10^{-2} \text{ Poise}$, y la densidad es de 0.9923 kg m^{-3} . Vemos que la densidad del agua es comparable a la densidad de los fluidos cocleares, mientras que su viscosidad es aproximadamente la tercera parte. Aún cuando es difícil comparar los valores antes mencionados, debido a que no corresponden exactamente a la misma temperatura, lo anterior nos permite afirmar que las propiedades mecánicas de los fluidos cocleares son parecidas a las del agua.

3.2.2 Rigidez de la membrana basilar.

Para poder determinar el tipo de ondas que se propagan sobre la membrana basilar, es importante determinar las características de la tensión a la que está sometida dicha membrana. Para ello debemos determinar la razón entre la deformación longitudinal y la transversal. Si la tensión fuera isótropa, la deformación resultante tendría una forma circular. Si, por el contrario, la tensión es mayor en una dirección y menor en la dirección perpendicular a la anterior, entonces la deformación es elíptica. Al realizar este experimento en cadáveres, Békésy [B.2, p.472] encontró que cerca de la punta de la cóclea (es decir, cerca del helicotrema) la deformación era circular, aún cuando la presión sobre la membrana no se ejercía en un punto cercano al eje central de la misma. Cerca de la base la deformación era de forma elíptica y su eje mayor correspondía con el eje longitudinal de la membrana. La razón entre el eje longitudinal y el transversal era a lo más de $2 : 1$ [B.2, p.473]. Por lo tanto, Békésy concluyó que la parte más flexible de la membrana tenía las mismas propiedades elásticas en cualquier dirección, y consideró que esto se cumplía sobre la membrana en general, pues la parte más flexible es la parte importante dentro del estudio de propagación de ondas en la cóclea. Por otro lado, Békésy observó que empezando a hacer mediciones media hora después de la muerte y durante las siguientes cuatro horas no se detectaban cambios en la posición del máximo de la amplitud del desplazamiento, por lo que concluyó que las propiedades elásticas debían de ser las mismas antes o después de la muerte.

El mismo experimento fue realizado por L. Voldřich en cócleas de conejillos de Indias [V.1,

p.331-335]. En este experimento, las propiedades elásticas de la membrana basilar se empezaron a analizar quince minutos después de la muerte de los animales [V.1, p.332]. Voldřich también analizó la forma de la deformación en cócleas de animales muertos 24 horas antes del experimento, así como en cócleas conservadas en distintas sustancias, las cuales podrían -presumiblemente- modificar las propiedades elásticas. Los resultados que obtuvo contradicen los obtenidos por Békésy para el caso de cócleas frescas. En efecto, para cócleas frescas Voldřich no sólo obtuvo el mismo patrón de deformación a todo lo largo de la membrana, sino que la deformación era altamente anisótropa: cuando apoyaba la aguja sobre la membrana basilar, obtenía una deformación en forma de una banda muy delgada y orientada en el sentido transversal. El ancho de la banda dependía del radio de la aguja utilizada; esto implica que la deformación no se extiende en dirección longitudinal o espiral (ver figura 3.6), lo cual es importante a la hora de plantear un modelo de propagación de ondas en la cóclea. El patrón de deformación es idéntico al que se obtendría deformando un conjunto de fibras paralelas delgadas con un pequeño objeto punzante (ver figura 3.7). Además, cuando se quitaba la aguja, la membrana basilar regresaba a su posición original. Para cócleas no frescas o conservadas en alguna sustancia nociva, Voldřich obtuvo una impresión circular similar a la obtenida por Békésy, es decir, cuando las propiedades elásticas de la membrana son homogéneas. Finalmente, si se rompía la membrana con la aguja, la ruptura se volvía invisible en el caso de membranas frescas. En cambio, en las otras se observaba una ruptura de forma circular.

Trataremos de explicar las razones por las cuales Békésy no obtuvo una deformación elíptica. Según Voldřich, Békésy usó cadáveres humanos para sus experimentos [V.1, p.334]. Estos cadáveres no podían ser muy frescos, pues como Voldřich cita, Békésy los obtenía en hospitales y por lo tanto debían de tener más de 24 horas. Sin embargo, Békésy trató de observar, por medio de un microscopio, si cambiaba la forma o el aspecto de los tejidos de la partición coclear cuando se sacrificaba a un conejillo de Indias. Békésy no detectó cambio post-mortem alguno de los tejidos de la membrana basilar, mas no parece que haya efectuado el experimento de la aguja en animales recién sacrificados. Finalmente, Voldřich mostró que la solución utilizada por Békésy para preservar los tejidos cambia las propiedades físicas de los mismos. Por lo tanto, aunque no queda claro en el libro de Békésy si usó cadáveres o conejillos de Indias para el experimento de la aguja, el resultado que habría obtenido debería ser el mismo (ver figura 3.8) debido a las sustancias que usaba para preservar sus cócleas.

Los resultados de Voldřich nos permiten deducir algunas características del mecanismo de propagación de ondas en la cóclea. Para empezar, suponemos que la deformación de la membrana basilar obtenida experimentalmente por Voldřich es igual a la deformación de la misma cuando una onda sonora se transmite mecánicamente a los fluidos cocleares. Vimos que la membrana basilar puede modelarse por un sistema de fibras paralelas. Si la membrana basilar en reposo se encuentra sobre el plano $y = 0$, entonces cada una de estas fibras -o por lo menos su eje si las suponemos cilíndricas- se encontraría en una $x = \text{constante}$. Definimos a s como la rigidez de la membrana basilar. Entonces, s es una función de x solamente, es decir

$$s = s(x). \quad (3.1)$$

El hecho que la deformación de la membrana sea casi nula en el sentido longitudinal de la misma se refleja en la independencia entre el número de onda y la rigidez. Además, la ecuación (3.1) nos muestra que la membrana basilar oscila -en dirección y - por secciones delgadas y separadas entre sí, cuyo movimiento es independiente del de las secciones vecinas. Esto permite que el volumen de fluido necesario para deformar cada sección sea menor al que se requiere cuando la rigidez depende de otras variables. Hasta ahora sólo hemos establecido, a partir de los experimentos de Voldřich, que la rigidez depende únicamente de la posición sobre la dirección longitudinal de la membrana. Sin embargo, también podemos determinar su comportamiento cualitativo a partir de algunas características anatómicas de la membrana basilar. Mencionamos, en la sección 3, que la membrana basilar dividía -junto con la lámina espiral ósea- a la cóclea en dos conductos ¹. Se ha observado que la membrana basilar es más delgada en la base que en la punta; el ancho de la membrana varía gradualmente de 0.1 mm en la base a 0.5 mm en la punta, a lo largo de 35 mm , aproximadamente [L.6, p.2]. También se ha determinado que su espesor decrece conforme nos acercamos a la punta. En la figura 3.9 se muestran de manera esquemática las variaciones de las dimensiones de la membrana basilar, así como la idealización de ésta como un conjunto de fibras paralelas. Los dos factores antes mencionados contribuyen a que la rigidez de la membrana disminuya de la base a la punta de la cóclea, siendo esta disminución de casi cuatro ordenes de magnitud [L.6]. Como veremos más adelante, el hecho que s sólo dependa de x y que además disminuya conforme nos alejamos de la base del caracol tiene una consecuencia importante sobre el mecanismo de discriminación de frecuencias, o lo que se conoce como “*principio de posición*”. Para analizar cualitativamente este principio, así como para mostrar evidencias de que las ondas cocleares son dispersivas, estudiaremos a continuación algunos resultados obtenidos por William S. Rhode [R.1, pp.1218-1231].

3.2.3 Experimento de William S. Rhode.

Para analizar las vibraciones de la membrana basilar en monos araña, Rhode utilizó la técnica Mössbauer. Este procedimiento consistía en implantar una fuente de rayos gamma sobre la membrana, en un punto cercano a la base de la cóclea. El procedimiento quirúrgico permitía que las fuentes fueran implantadas a una distancia entre sí de menos de 2 mm , en la dirección x , por lo que correspondían aproximadamente a la misma posición sobre la cóclea. Rhode colocó una segunda fuente sobre el tímpano, en el punto de contacto entre este último y el martillo y obtuvo movimientos sinusoidales de estas fuentes excitando al oído del mono con una onda sonora monotonal. Debemos señalar que el movimiento de la membrana basilar en sí no es significativo, sino el movimiento de la misma en relación con el estímulo. Por ello, si η_{MB} y η_m son el desplazamiento de la membrana basilar y del martillo, respectivamente, y si

$$\eta_{MB} = a_{MB} \cos(\omega t + \theta_{MB}) \quad y \quad (3.2)$$

$$\eta_m = a_m \cos(\omega t + \theta_m), \quad (3.3)$$

¹Cuando nos limitamos al estudio macroscópico.

las variables significativas son a_{MB}/a_m , la razón entre las amplitudes, y $\theta_{MB} - \theta_m$, la diferencia entre las fases. A a_{MB}/a_m se le llama “razón entre señales de entrada y de salida” (Input-Output ratio) de la función de transferencia de la membrana basilar. Los resultados obtenidos por Rhode muestran que el desplazamiento de la membrana varía como función de la frecuencia, de la posición de la fuente sobre la membrana, y de la intensidad del estímulo. Aquí nos limitaremos al estudio de la dependencia de η_{MB} con la frecuencia y con la posición.

Si consideramos que la posición es constante (así como la intensidad del estímulo), podemos graficar a_{MB}/a_m y $\theta_d = \theta_{MB} - \theta_m$ como funciones de la frecuencia $\omega/2\pi$ en kHz . En las figuras 3.10 y 3.2.3 se muestran los resultados obtenidos por Rhode en los casos en los que le fue posible hacer mediciones para frecuencias suficientemente altas.

La figura 3.10 corresponde a a_{MB}/a_m en dB -es decir, $20 \log(a_{MB}/a_m)$ - como función de la frecuencia ($\omega/2\pi$), la cual se muestra a escala logarítmica. Esta figura muestra las características importantes de la razón a_{MB}/a_m . La más importante de estas características es una frecuencia para la cual se obtiene un máximo de la razón a_{MB}/a_m . Este máximo se encuentra en $(\omega/2\pi) \approx 7 kHz$. También observamos que para frecuencias menores de $6 kHz$, la relación entre a_{MB}/a_m es una función lineal de la frecuencia. Sin embargo, cerca de la frecuencia característica, la pendiente de la curva aumenta drásticamente, pasando a un valor medio de $24 dB$ por octava. Para frecuencias también cercanas, pero mayores a la característica, a_{MB}/a_m decae linealmente a un valor constante. Este decaimiento es muy abrupto. La asimetría de esta figura es una evidencia del papel que juega la membrana basilar en la discriminación de frecuencias. En efecto, el punto máximo es el correspondiente a la frecuencia característica para esa posición sobre la membrana. Esta frecuencia es la frecuencia de resonancia de ese punto. El valor máximo de a_{MB}/a_m corresponde a ese punto. Como para frecuencias mayores a_{MB}/a_m decae rápidamente, deducimos que las frecuencias características mayores corresponden a posiciones sobre la membrana que se encuentran todavía más cerca de la base. Frecuencias menores a $6 kHz$ se encuentran todavía lejos de su posición de resonancia, por lo que la respuesta obtenida es lineal en ese intervalo de frecuencias, además de que su amplitud es menor que la obtenida cerca de la frecuencia característica. La diferencia de fases $\theta_d = \theta_{MB} - \theta_m$, también permite deducir propiedades importantes de la cóclea. La figura 3.2.3 muestra que para frecuencias menores de $0.03 kHz$, θ_d es aproximadamente constante e igual a $\pi/2$. Esto se debe a que en el límite de frecuencias bajas, θ_{MB} es también la fase de las fluctuaciones de presión, así como la fase de la velocidad de la ventana oval. Por lo tanto, en este límite, θ_{MB} es también la fase de la velocidad del martillo. Pero esta última está $\pi/2$ más adelante que la fase del desplazamiento del mismo, pues como

$$\eta_m = a_m \cos(\omega t + \theta_m),$$

$$u_m = \omega a_m \sin(-\omega t - \theta_m) = \omega a_m \cos\left(\omega t + \theta_m + \frac{\pi}{2}\right).$$

Por lo tanto, para bajas frecuencias debe cumplirse la relación $\theta_d = \pi/2$. Para frecuencias menores de $5.5 kHz$, θ_d es una función lineal de $(\omega/2\pi)$, pero su pendiente disminuye después, conforme nos acercamos por la izquierda a la frecuencia característica. Este comportamiento

es muy importante pues muestra el carácter dispersivo de las ondas cocleares. Rhode consideró que la velocidad de propagación de la onda se mantenía casi constante hasta la frecuencia característica [R.1, p.1228], por lo que las ondas no eran dispersivas. Sin embargo, aunque la pendiente de θ_d es menor (su valor absoluto aumenta) para frecuencias mayores a dicha frecuencia, también disminuye después de 5.5 kHz , es decir, para frecuencias menores a la característica y cercanas a ésta. Si en cada punto de la membrana basilar la onda tuviera una velocidad definida independiente de la frecuencia, entonces la fase de las vibraciones de la membrana sería una función del tipo

$$\theta_{MB} = \theta_m + \frac{\pi}{2} - \omega \tau,$$

donde τ es el tiempo fijo en el que la onda viaja desde la base hasta el punto donde se encuentra la fuente [L.6, p.6]. La relación anterior sólo se cumple para $\omega/2\pi \leq 5.5\text{ kHz}$, por lo que cerca del punto de máximo desplazamiento, la frecuencia debe de depender del número de onda. Para frecuencias mayores y cercanas a la característica, la disminución de la pendiente también debe de atribuirse al efecto de dispersión. El hecho de que la pendiente disminuya nos induce a pensar que la velocidad de propagación (velocidad de fase) disminuye cuando nos acercamos al punto de resonancia.

Unas características que no se han discutido hasta ahora corresponden al comportamiento para altas frecuencias. Este comportamiento se observó siempre que fue posible obtener datos en ese intervalo de frecuencias. En la figura 3.10, a_{MB}/a_m decae abruptamente pero no a cero, sino a un valor constante. Del mismo modo, θ_d no decae a cero sino que toma un valor constante, por lo que la velocidad de fase aumenta drásticamente. Una interpretación de este resultado es el de considerar que la respuesta de la cóclea se divide en dos tipos de ondas. Una de ellas es una onda estacionaria, la cual es medible sólo cuando la onda viajera ha desaparecido, es decir, para frecuencias mayores a la frecuencia característica. Debido a que la ventana oval -la cual se encuentra adherida, por medio de un ligamento, a la base del estribo- se mueve gracias al estímulo de la membrana timpánica por la onda sonora y que la ventana redonda se mueve libremente, la amplitud de la presión de ambas ondas es la misma al momento de generarse en la base. Como la onda estacionaria y la onda viajera tienen mismo signo en la rampa vestibular pero signo opuesto en la rampa timpánica, las ondas se cancelan en la ventana timpánica. Cerca de la frecuencia de resonancia, la onda viajera domina sobre el movimiento, pues aunque su velocidad disminuye, su amplitud crece enormemente. Este hecho nos permite despreciar a la onda estacionaria en el rango de frecuencias que nos interesa, en decir, cerca de la frecuencia característica. En efecto, el flujo acústico en la cóclea, el cual determinaremos en el siguiente capítulo, cobra mayor importancia cerca de dicha frecuencia, pues entonces la velocidad de propagación de la energía es pequeña y el tiempo que tiene esta energía para disiparse es muy grande, como veremos posteriormente.

Otra muestra de que las ondas cocleares son dispersivas se obtiene graficando, cuando es posible, a la frecuencia ω en función del número de onda k . Para ello utilizaremos otros resultados obtenidos por Rhode, en los cuales determinó como variaban las curvas obtenidas

en función de la posición. Para ello, implantó dos fuentes sobre la membrana basilar -en vez de una- a una distancia de 1.5 mm la una de la otra, y graficó los resultados. El procedimiento seguido es el mismo que el anterior. Los resultados se muestran en las figuras 3.12 y 3.13.

Estos resultados muestran claramente algunas de las propiedades ya mencionadas. En efecto, vemos que la frecuencia característica del punto más cercano a la base de la cóclea es mayor a la del otro punto. También podemos ver como las pendientes tanto de θ_{d_1} como de θ_{d_2} disminuyen para frecuencias mayores a 5.5 kHz . Sin embargo, este experimento nos permite determinar la relación gráfica entre el número de onda y la frecuencia. Debido a que el número de onda se define como la razón de cambio de la fase con respecto a la posición (ver apéndice B, para cada frecuencia podemos determinar el valor medio del número de onda como

$$k_{prom} = \frac{\theta_{d_2} - \theta_{d_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\theta_{d_1} - \theta_{d_2}}{x_1 - x_2},$$

con $x_1 - x_2 = 1.5\text{ mm}$. La gráfica de $\omega/2\pi$ como función k_{prom} se muestra en la figura 3.14.

Cuando no hay dispersión, la frecuencia y el número de onda son proporcionales entre sí. La figura 3.14 muestra que esto sólo sucede para frecuencias menores de 5 kHz , corroborando así nuestra afirmación de que las ondas sufren dispersión antes de alcanzar la frecuencia crítica. En la figura también se muestra cómo la curva $\omega/2\pi$ vs. k tiende asintóticamente hacia el valor de la frecuencia crítica. Por lo tanto, su pendiente decrece gradualmente hacia cero. Esta propiedad de la relación entre $\omega/2\pi$ y k es sumamente importante, debido a que la pendiente de la curva es precisamente la velocidad de grupo del paquete de ondas U , la cual es también la velocidad de propagación de la energía.

Las consideraciones anteriores nos permiten concluir que la onda propagándose sobre la membrana basilar es una onda viajera. Además, la velocidad de propagación de la energía disminuye y tiende a cero conforme nos acercamos a la frecuencia característica. Como veremos en el siguiente capítulo, esto nos indica que el efecto de las propiedades mecánicas sobre la propagación es el de frenar a la onda antes de que ésta llegue al punto característico, por lo que la energía que transporta la onda se acumula en la cercanía de este punto. También veremos que el efecto de la viscosidad es el de provocar la disipación de esta energía, de modo que la amplitud de la onda no crece infinitamente -como sucedería si el fluido coclear estuviera ausente- sino que llega a un máximo y después decae estrepitosamente a cero. Además de estudiar cualitativamente la interacción entre las propiedades dispersivas de la membrana basilar, la disipación de la energía debida a la viscosidad de los fluidos que rodean a la misma y el efecto de la disipación de esta energía sobre el fluido, construiremos un modelo donde estén presentes estos mecanismos y que prediga la forma de la onda que se propaga sobre la membrana basilar. Este modelo se basa en las ecuaciones de Stokes para fluidos. El hecho de que los gradientes de la amplitud sean grandes en la región donde se disipa la energía nos induce a determinar el siguiente término de la aproximación WKB para ondas viajeras. Dicho término es un término no lineal y corresponde al esfuerzo de Reynolds en la teoría de flujo acústico que estudiamos en el capítulo 2. Este flujo acústico es importante en la región donde se disipa la energía

pues se genera, precisamente, gracias a esta disipación. Determinaremos este flujo medio en la vecindad de la membrana basilar. La razón de esto es que sobre la membrana se encuentran las células ciliares, que son responsables del mecanismo de transducción de la señal mecánica en señal eléctrica cuando son estimuladas en la dirección transversal (la dirección (z)) de la membrana, por lo que determinaremos una expresión para el flujo medio de volumen en la dirección transversal debido al flujo acústico horizontal. Esto puede parecer paradójico pues el modelo que consideraremos es un modelo bidimensional. Sin embargo, en el apéndice A daremos algunos argumentos que permiten despreciar a la velocidad transversal (sobre la membrana) con respecto a la velocidad en la dirección de propagación de la onda; supondremos, entonces, que la contribución del flujo acústico horizontal al flujo de volumen es la contribución principal y que otras contribuciones son despreciables. Por lo tanto, podemos considerar un modelo bidimensional de la membrana para evaluar, finalmente, el flujo de volumen debido al flujo acústico que aparece cerca del punto característico.

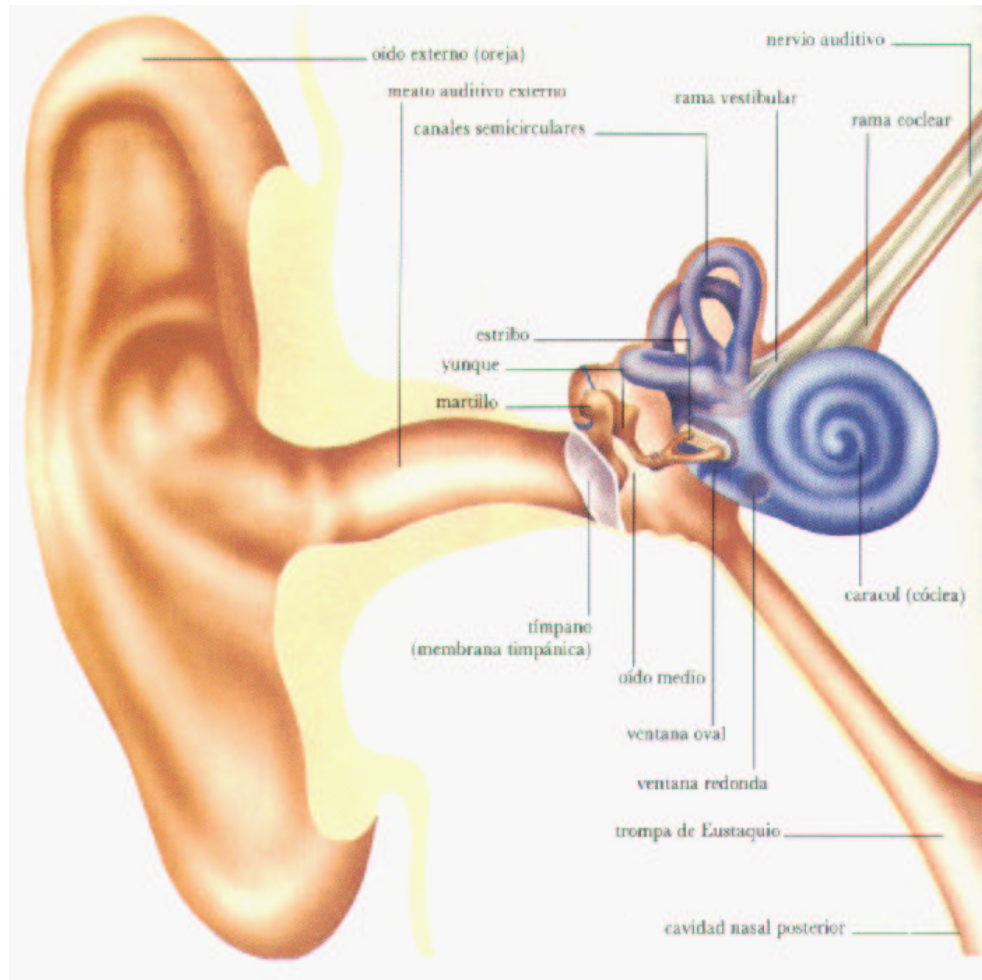


Figura global del oído. Cada oído tiene tres partes principales: el oído externo, el oído medio y el oído interno. El tímpano forma el límite del oído medio; las ondas sonoras lo hacen vibrar; estas vibraciones se transmiten a través de tres huesecillos -martillo, yunque y estribo- a la ventana oval del oído interno. De ahí pasan al caracol, que contiene células sensitivas que convierten las vibraciones mecánicas que se propagan dentro del oído interno, en impulsos nerviosos. El oído interno contiene también a los canales semicirculares, nuestro órgano del equilibrio.

Figura 3.1: Figura global del oído.

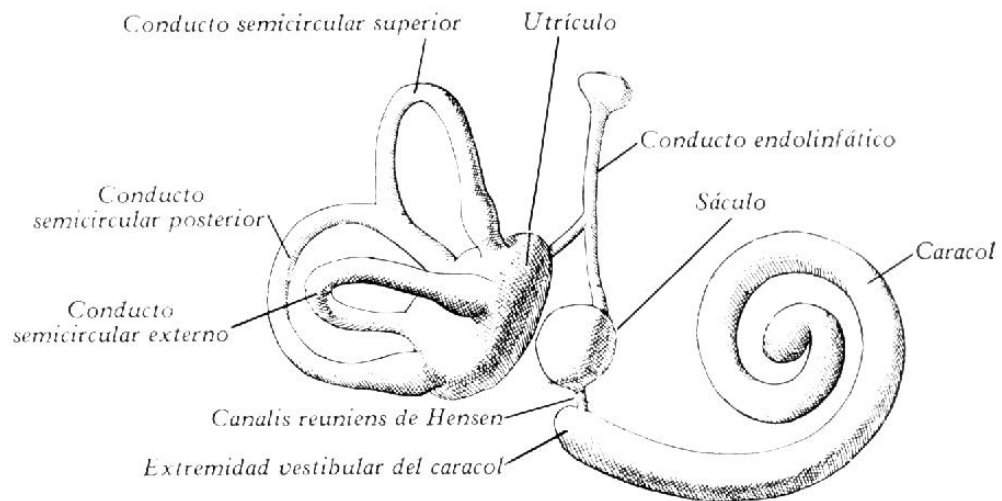


Figura 3.2: **Laberinto membranoso.** El laberinto membranoso se puede dividir en tres partes: el vestíbulo, los canales semicirculares, y el caracol. Las dos primeras forman parte del sistema de equilibrio, mientras que el caracol corresponde al sistema auditivo.

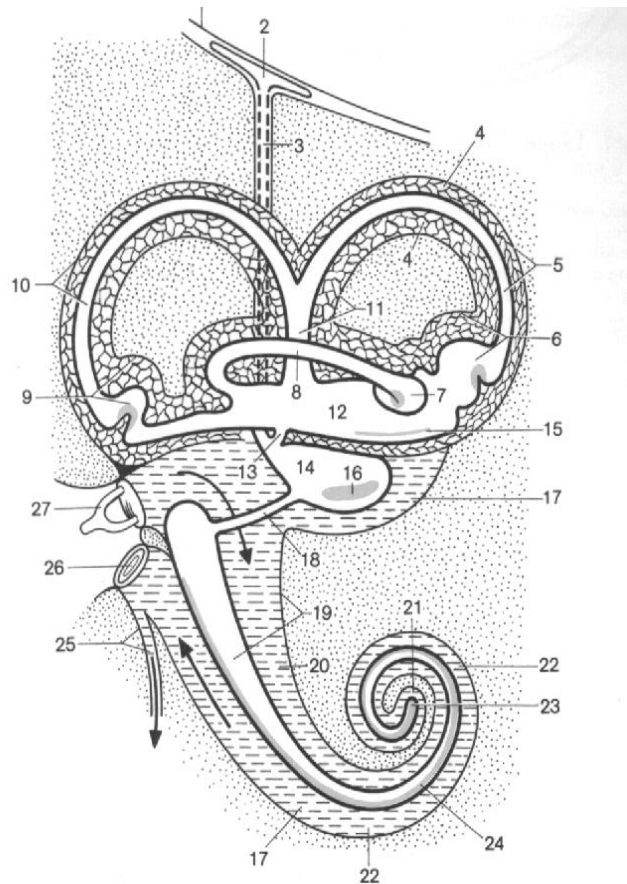


Figura 3.3: Esquema de un corte longitudinal de los laberintos membranoso y óseo.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 1. Duramadre encefálica | 10. Canal semicircular posterior | 19. Canal y conducto cocleares |
| 2. Saco endolinfático | 11. Ramas comunes | 20. Rampa vestibular |
| 3. Conducto endolinfático | 12. Utrículo | 21. Helicotrema |
| 4. Tejido perilinfático | 13. Conducto utriculosacular | 22. Rampa timpánica |
| 5. Canal semicircular anterior | 14. Sáculo | 23. Ciego cupular |
| 6. Ampollas anteriores | 15. Mácula utricular | 24. Membrana basilar |
| 7. Ampolla membranosa externa | 16. Mácula sacular | 25. Canalículo coclear |
| 8. Conducto semicircular externo | 17. Perilinf | 26. Ventana redonda |
| 9. Ampollas posteriores | 18. Conducto de Hensen | 27. Estribo |

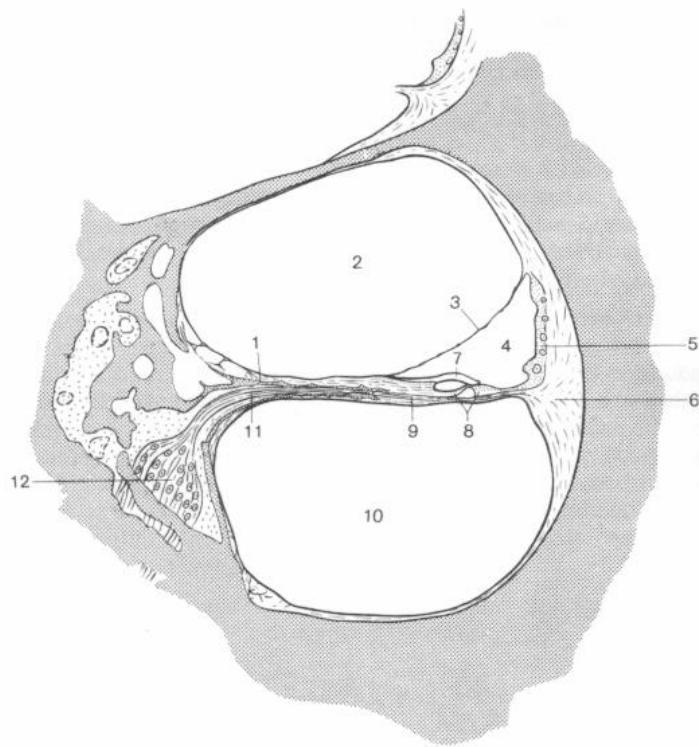


Figura 3.4: Corte transversal de una espira del caracol.

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1. Lámina espiral ósea | 7. Membrana tectoria |
| 2. Rampa vestibular | 8. Órgano de Corti |
| 3. Membrana de Reissner | 9. Membrana basilar |
| 4. Conducto coclear | 10. Rampa timpánica |
| 5. Estría vascular | 11. Dendritas |
| 6. Ligamento espiral | 12. Ganglio espiral coclear |

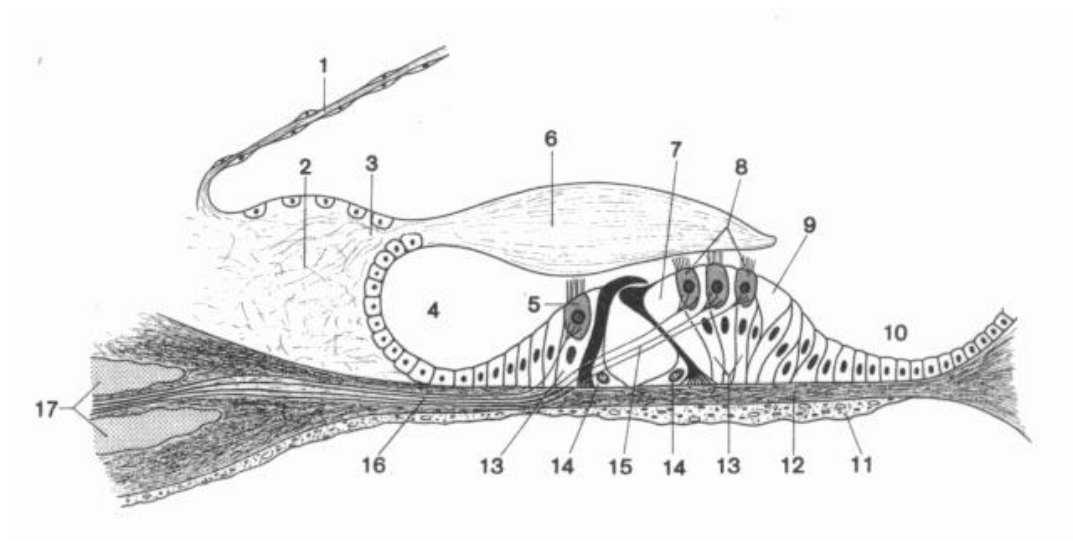


Figura 3.5: **Órgano de Corti.**

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1. Membrana de Reissner | 10. Surco espiral externo |
| 2. Limbo de la lámina espiral ósea | 11. Capa de cubierta timpánica |
| 3. Labio del limbo vestibular | 12. Membrana basilar |
| 4. Surco espiral interno | 13. Células de sostén |
| 5. Célula ciliar interna | 14. Células en flecha |
| 6. Membrana tectoria | 15. Fibras nerviosas |
| 7. Espacio de Nuol | 16. Dendritas |
| 8. Células ciliares externas | 17. Lámina espiral ósea |
| 9. Tunel externo | |

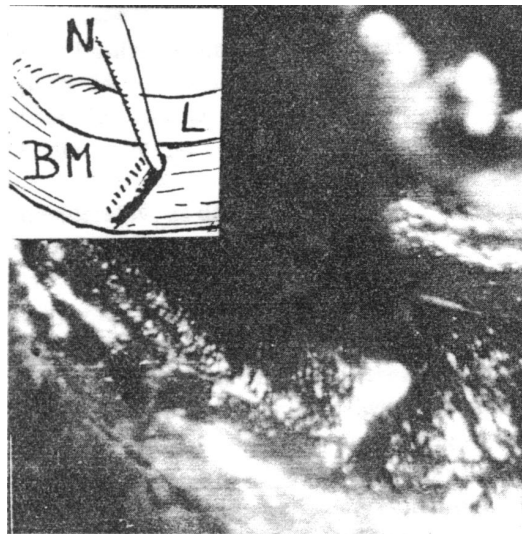


Figura 3.6: Microfotografía de la deformación de la membrana basilar cuando el experimento se efectúa en cócleas frescas. En la esquina superior izquierda se muestra esquemáticamente el resultado obtenido: una banda transversal delgada cuyo ancho depende del ancho de la aguja. N: aguja; L: lámina espiral ósea; BM: membrana basilar.

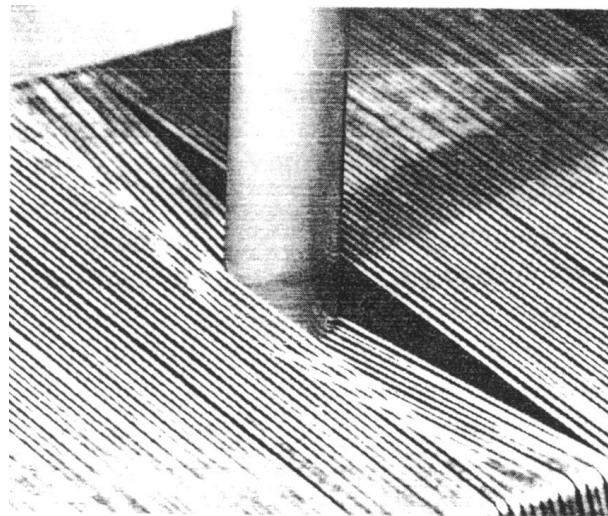


Figura 3.7: Modelo de fibras paralelas en la dirección transversal. Las fibras se deforman por la presión ejercida con el objeto y reproducen la forma de la deformación en el experimento de Voldřich.

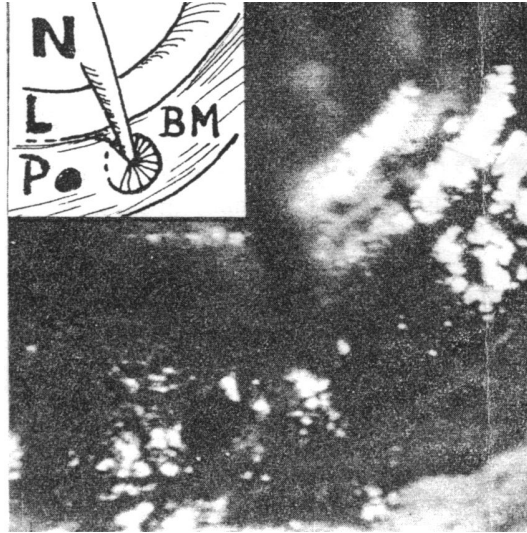


Figura 3.8: Microfotografía de una cóclea dañada o perteneciente a un animal muerto varias horas antes. Esquemáticamente, se muestra la deformación circular al ejercer presión con la aguja, así como la perforación circular causada por la ruptura de los tejidos al presionar demasiado con la aguja misma. N: aguja , L: lámina espiral ósea; P: perforación; BM: membrana basilar.

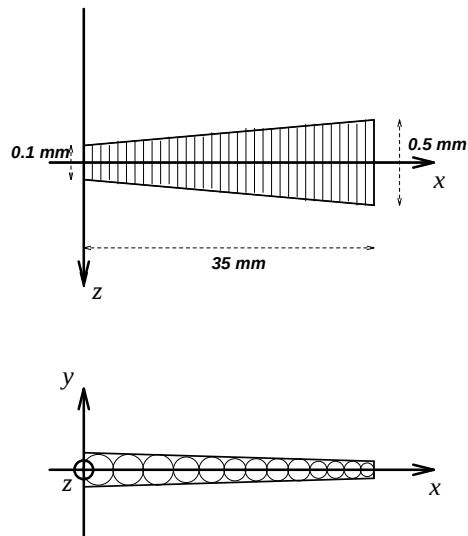


Figura 3.9: Esquema de la variación en las dimensiones de la membrana basilar para las tres direcciones.

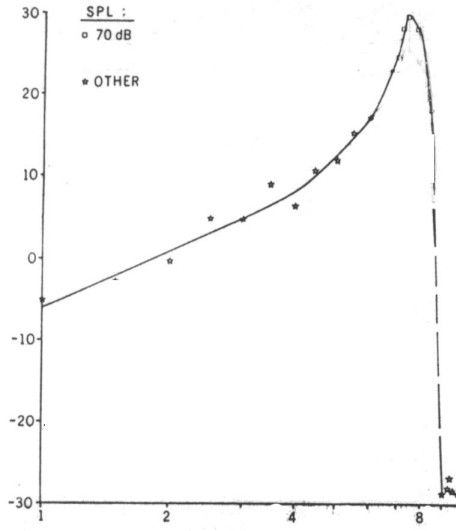
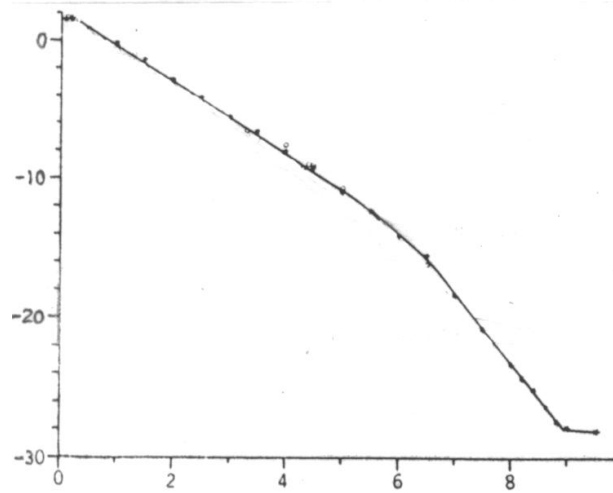


Figura 3.10: Amplitud a_{MB}/a_m en dB . Las mediciones para varias frecuencias se extrapolaron. Rhode encontró que la vibración de la membrana basilar era lineal para $(\omega/2\pi) = 1 \text{ kHz}$, 6 kHz y 9 kHz , lo que justifica la extrapolación lineal para estas frecuencias. Se mostró que para $(\omega/2\pi)$ en el intervalo $[1, 6]$ la vibración de la membrana basilar era lineal.



Curva típica de θ_d en función de $(\omega/2\pi)$ cuando fue posible hacer mediciones para frecuencias grandes. La escala usada es lineal para mostrar que para frecuencias menores de 5.5 kHz θ_d es una función lineal, excepto en una región cerca del origen $[(\omega/2\pi)] < 0.03 \text{ kHz}$, donde $\theta_d = 1.6 \text{ rad} = \pi/2$.

Figura 3.11: θ_d (en rad) vs. $(\omega/2\pi)$ (en kHz).

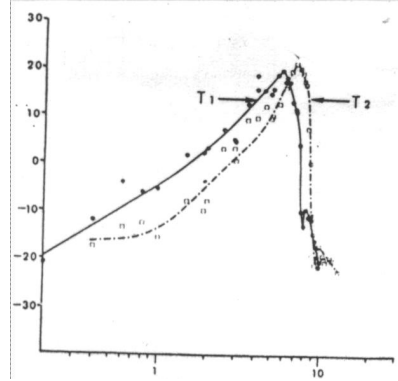


Figura 3.12: Resultados obtenidos para dos fuentes T_1 y T_2 , las cuales fueron inyectadas sobre la Membrana Basilar. La distancia entre estas dos fuentes era de un centímetro y medio.

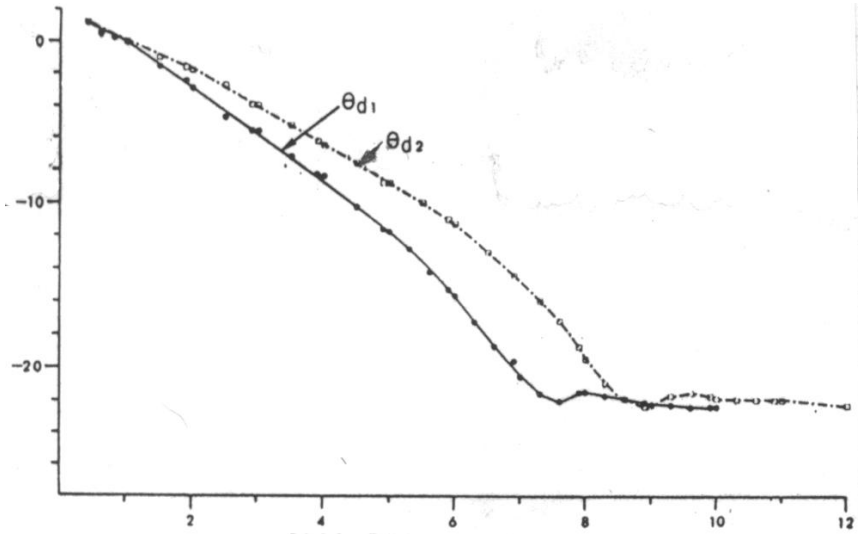


Figura 3.13: Razón entre el desplazamiento de la Membrana Basilar y del martillo, para el experimento en el que se medía el movimiento en dos posiciones distintas de la membrana. T_2 y θ_{d2} son los datos obtenidos para la fuente más cercana a la base de la cóclea.

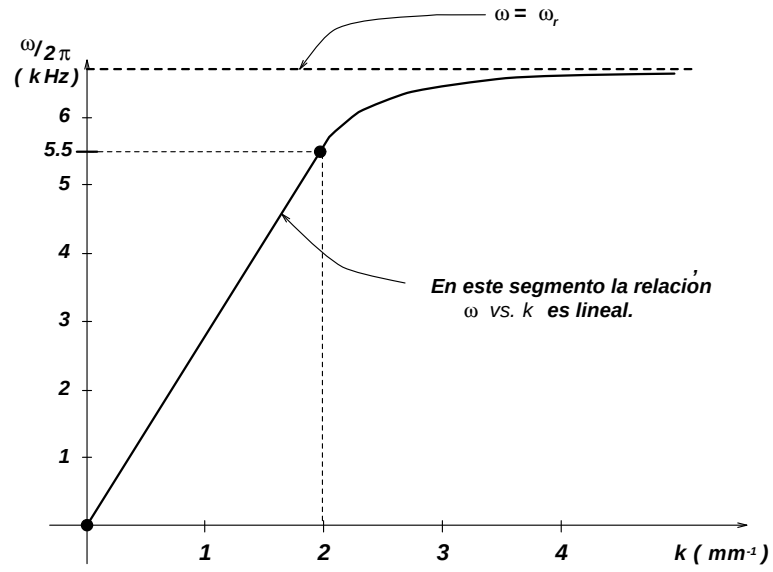


Figura 3.14: Frecuencia (en kiloHertz) como función del número de onda promedio, el cual se determinó usando la fórmula $k_{prom} = \frac{\theta_{d1} - \theta_{d2}}{x_1 - x_2}$, donde θ_{d1} y θ_{d2} son valores experimentales obtenidos por Rhode. Además, $\frac{\partial \omega}{\partial k} = 15 \text{ m s}^{-1}$ si $\omega/2\pi \leq 5.5 \text{ kHz}$.

Capítulo 4

Descripción cualitativa y modelo de la cóclea.

4.1 Modelo cualitativo de propagación de ondas.

En el capítulo anterior mostramos algunos resultados obtenidos por Békésy, por Voldřich y por Rhode. Las observaciones experimentales de Rhode nos permitieron encontrar la relación gráfica entre el número de onda k y la frecuencia angular del movimiento ω (ver figura 3.14 del capítulo 3). Esta relación determina las características de propagación de la onda; se le llama *relación de dispersión* (ver apéndice B). La relación de dispersión es una relación local en una perturbación cuya longitud de onda es corta comparada con las escalas típicas del sistema. En un sistema donde se observen ondas viajeras, podemos escribir el desplazamiento vertical como

$$\xi = A(\epsilon x, \epsilon t) \exp \left[i \left(\frac{\theta(\epsilon x, \epsilon t)}{\epsilon} \right) \right], \quad (4.1)$$

donde el parámetro $\epsilon = (\text{longitud de onda})/(\text{escala típica del sistema})$ es mucho menor que 1. La función θ define a la fase del paquete de ondas. Esta fase se relaciona con el número de onda local así como con la frecuencia local del sistema. La derivada con respecto a x de la fase determina al número de onda, mientras que su derivada con respecto a t al negativo de la frecuencia local:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = +k \text{ y} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega. \quad (4.3)$$

La ecuación (4.1) generaliza la fórmula

$$\xi = A \exp [i(kx - \omega t)],$$

donde A , k y ω son constantes. Cuando el medio en el que se propaga la onda es inhomogéneo, la frecuencia no sólo depende del número de onda sino también de la posición, de modo que

$$\omega = \omega(k, x). \quad (4.4)$$

Por otra parte, la ecuación de conservación de energía toma la forma [W.2]

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \omega'(k) E}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

donde E es proporcional a A^2 . La ecuación (4.5) nos permite deducir que en el caso en que $\omega'(k)$ es una constante la velocidad de propagación de la energía es la velocidad de grupo U definida como (ver apéndice B)

$$U = \omega'(k).$$

Por lo tanto, si tenemos una relación de dispersión (ecuación (4.4)) dada por mediciones experimentales (ver figura 3.14) la ecuación (4.5) nos permite identificar las propiedades del mecanismo de propagación de ondas. Usaremos la figura 3.14 para deducir dichas propiedades, así como otros resultados experimentales obtenidos en el capítulo 3.

En el capítulo anterior vimos que las propiedades mecánicas de los fluidos cocleares son similares a las del agua. Además, sabemos que el movimiento de las ondas superficiales propagándose en agua penetra a una distancia del orden de k^{-1} . Por analogía a ese caso, la inercia del fluido para el problema de propagación de ondas sobre la membrana basilar también es proporcional a k^{-1} , aunque en este caso dicha inercia se duplica, esencialmente, pues los movimientos del fluido ocurren a ambos lados de la membrana basilar [L.6]. Si m_f es la inercia debida al fluido, el razonamiento anterior implica que

$$m_f = Ak^{-1}, \quad \text{con } A = \text{constante.}$$

Sea B la inercia debida a la membrana basilar y a las estructuras que se encuentran sobre de ella. Una característica de la relación de dispersión para sistemas conservativos es que debe de escribirse como (ver apéndice B)

$$\omega^2 = \frac{\text{rigidez generalizada}}{\text{inercia generalizada}}.$$

Para el caso de la cóclea la rigidez generalizada se reduce a la rigidez $s(x)$ de la membrana basilar y la inercia generalizada a la inercia de las partes del sistema que se encuentran en movimiento durante la propagación de la onda. Esto es,

$$\omega^2 = \frac{s(x)}{\frac{A}{k} + B}, \quad \text{para } x \geq 0. \quad (4.6)$$

Es fácil encontrar la función inversa de la ecuación anterior, dando como resultado

$$k(x, \omega) = \frac{\omega A}{s(x) - \omega B}. \quad (4.7)$$

Por otra parte consideramos que el estímulo se compone de una onda monotonal, lo cual implica que la frecuencia es constante: $\omega = \text{constante} = \omega_o$. Si la posición de resonancia de la onda cuya frecuencia es la anterior es x_r , la ecuación (4.7) indica que la rigidez en dicho punto es $s(x_r) = \omega_o B$, y que la ecuación para el número de onda puede escribirse como

$$k(x) = \frac{\omega_o A}{s(x) - s(x_r)}. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, conforme la onda se aproxima al punto de resonancia su número de onda tiende a infinito, por lo que su longitud de onda disminuye considerablemente. Además, como $\omega = \text{constante} = \omega_o$, entonces el flujo promedio de energía, A^2 , no depende de t . Así, por la ecuación (4.5) tenemos que

$$\frac{\partial (\omega'(k) A^2)}{\partial x} = 0, \quad (4.9)$$

por lo que

$$\omega'(k) A^2(x) = \omega' [k(0)] A^2(0) = \text{constante},$$

es decir,

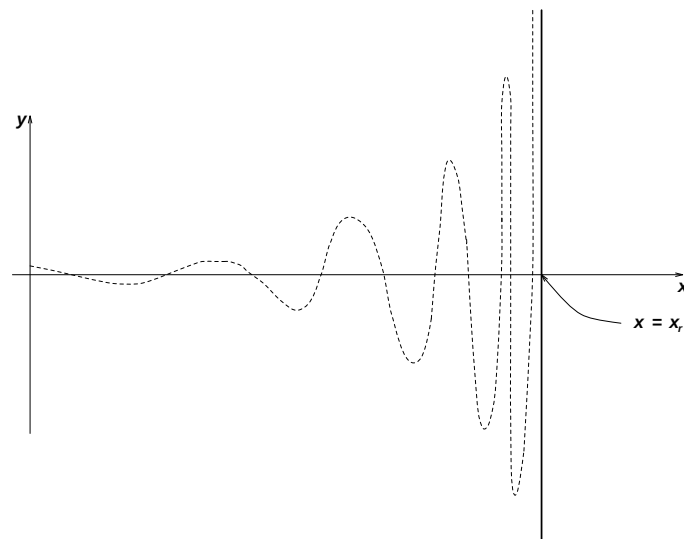
$$A^2(x) = \frac{\text{constante}}{U}. \quad (4.10)$$

Pero los resultados experimentales muestran que U tiende asintóticamente a cero cuando nos acercamos al punto de resonancia. Esto implica que la amplitud A de la onda crece sin límite conforme nos acercamos a dicho punto. Este comportamiento se muestra esquemáticamente en la figura 4.1

Este patrón de ondas muestra las siguientes características:

- Hay acumulación de energía en la vecindad del punto característico de la onda que transporta dicha energía; la posición de este punto depende de la frecuencia del estímulo.
- Los puntos de acumulación de energía se acercan a la base de la cóclea si la frecuencia del estímulo aumenta (ver la figura 3.12).
- Las ondas se acortan conforme la onda se acerca a la posición característica.
- No hay onda reflejada.

A este mecanismo de absorción de energía se le conoce como *absorción de capa crítica*, y se presenta en problemas de fluidos estratificados [L.2]. Recordemos que sólo existen dos tipos de mecanismos de disipación de energía que incluyen el fenómeno de resonancia. El otro caso aparece en problemas de guías de onda, por ejemplo, donde existe una frecuencia de corte. El último caso es opuesto al que hemos descrito pues en éste toda la energía se refleja y la



Comportamiento cualitativo de la membrana basilar cuando no se consideran mecanismos de atenuación. Vemos que conforme nos acercamos al punto característico el número de onda y la amplitud del movimiento crecen drásticamente, por lo que la energía transportada por la onda se acumula en el punto $x = x_r$.

Figura 4.1: **Comportamiento de la membrana basilar cuando no consideramos el efecto de la viscosidad.**

amplitud de la onda es finita. Ahora trataremos de construir un modelo cualitativo donde el mecanismo de absorción de capa crítica se refleje en la forma de la relación de dispersión.

En el capítulo anterior 3, vimos que la estructura interna de la membrana puede modelarse como un arreglo de fibras paralelas (figura 3.7 en la sección 3.2.2 del capítulo 3). Por la forma de la membrana basilar, la cual se muestra esquemáticamente en la figura 3.9 del capítulo 3, la rigidez de la membrana basilar debe disminuir de la base a la punta del caracol. De hecho, Lighthill menciona que la rigidez disminuye por cuatro órdenes de magnitud en la dirección longitudinal de la membrana basilar [L.6]. Entonces el acoplamiento en la dirección x se debe al fluido que rodea a la membrana. El efecto del fluido se refleja en la inercia del sistema, el cual se compone de la membrana basilar y del fluido. Vimos que la relación de dispersión es de la forma mostrada en la ecuación (4.8).

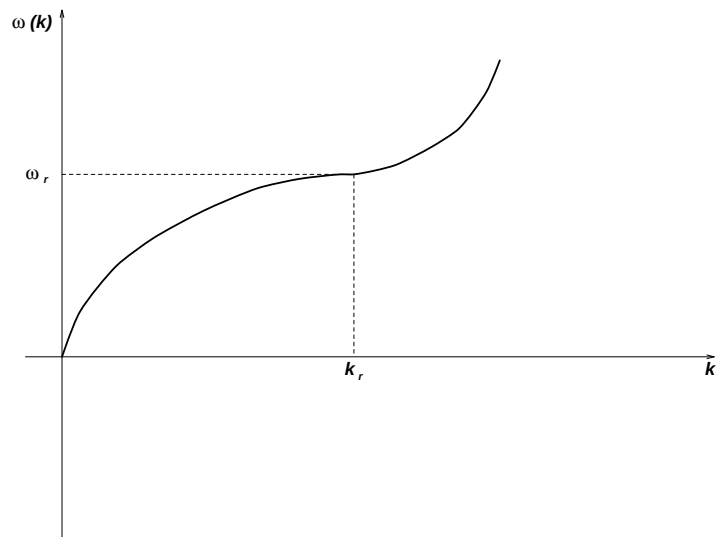
En esta ecuación aparece la inercia añadida m_f debida al fluido, por que lo incluye el efecto que éste tiene sobre el acoplamiento de las fibras en la dirección x . La ecuación (4.8) nos permitió predecir algunos de los resultados que se observan experimentalmente y que corresponden al mecanismo de absorción de capa crítica. De lo anterior podemos deducir que la relación de dispersión (4.8) es adecuada para describir el sistema de la cóclea. Por lo tanto este sistema es un sistema hidroelástico en el cual tanto el fluido como la membrana intervienen para producir el fenómeno de propagación de ondas.

Esto explica la falla de los modelos elásticos. Dichos modelos suponen un acoplamiento elástico en la dirección x , lo que da lugar a una relación de dispersión de la forma

$$\omega^2 = \frac{s(x)k^2}{B + Ak^{-1}}.$$

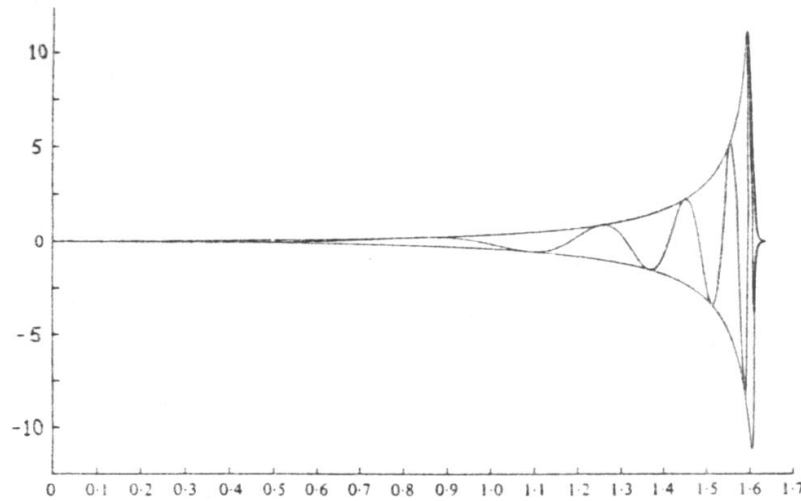
La gráfica de la relación de dispersión anterior se muestra esquemáticamente en la figura 4.1. En $k = k_r$ dicha gráfica tiene un punto de inflexión y la pendiente de la curva empieza a aumentar después de este punto; por esta razón la relación de dispersión no muestra las características del mecanismo de absorción de capa crítica, lo cual contradice los experimentos. De hecho, el punto de inflexión da lugar a una frecuencia de corte en $x = x_r$.

Anteriormente vimos que si no consideramos el efecto de la viscosidad del fluido, cuando $k \rightarrow \infty$ la amplitud del movimiento A también crece sin límites. Sin embargo, cuando consideramos el acoplamiento de la membrana con el fluido, entra en juego la viscosidad del mismo como mecanismo de disipación de energía. En efecto, si bien la viscosidad es muy pequeña, la atenuación de la onda debida a la viscosidad -del orden de $(k^2 \times \text{viscosidad})$ - se vuelve de orden $O(1)$. Esta atenuación es responsable de que la amplitud de la onda sea finita. Entonces, la viscosidad provoca la disipación de la energía -la cual es suministrada al sistema por el estímulo en la ventana oval- en el punto $x = x_r$, dando lugar a un estado periódico en el tiempo pero no en el espacio. La forma del desplazamiento, con los efectos de disipación incluidos, fue determinada por Zweig y se muestra en la figura 4.1. Esta gráfica la obtuvo Zweig interpolando los datos obtenidos por Rhode en el experimento de las dos fuentes [R.1].



Relación de dispersión que obtendríamos en caso de que hubiera un acoplamiento elástico en la dirección x . En este caso la grafica muestra la existencia de un punto de inflexión el cual corresponde a una frecuencia de corte. En este caso la energía se refleja y la amplitud de la onda es finita.

Figura 4.2: **Relación de dispersión en el caso de un acoplamiento elástico en la dirección x .**



Relación entre el desplazamiento de la membrana basilar y el eje longitudinal x de la membrana obtenida por Zweig. Esta relación la determinó dicho autor usando las datos experimentales de Rhode.

Figura 4.3: Desplazamiento (en nm) vs. coordenada longitudinal x (en cm) obtenida por Zweig.

El modelo cualitativo de propagación de ondas que hemos descrito en este capítulo explica como se propagan las ondas en la cóclea. Vimos que conforme una onda se acerca a la posición característica que le corresponde su número de onda y su amplitud crecen. También vimos que la acción de la viscosidad sobre la onda no solo limita el crecimiento de la amplitud, la cual alcanza un máximo finito, sino que también provoca el decaimiento a cero de dicha amplitud gracias a la disipación en la energía. Sin embargo este modelo cualitativo no nos ayuda a comprender cómo se mueven las células ciliares del órgano de Corti, el cual se encuentra sobre la membrana basilar (ver figura 3 del capítulo 3). Como dijimos en el capítulo anterior, estas células -en particular, las células internas- son responsables del mecanismo de transducción de la señal mecánica en una señal eléctrica.

A continuación trataremos de explicar el movimiento de las células como una consecuencia del mecanismo de propagación de la onda y de la absorción de la energía en el punto característico. Vimos en la sección anterior que estos mecanismos son lineales. Sin embargo, en la región donde la amplitud del movimiento crece enormemente (en relación con el movimiento de puntos más cercanos a la base de la cóclea) para luego decaer a cero, los efectos no lineales se vuelven importantes. Uno de estos efectos es la aparición de un flujo medio -análogo al flujo acústico que estudiamos en el capítulo 2- generado por la atenuación de la energía de la onda. Este flujo podría generar un flujo de volumen en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Como la energía transportada por la onda se disipa totalmente cerca del punto característico,

en esta región el flujo medio es mayor que en otras regiones más cercanas a la base. Entonces el flujo de volumen generado en el plano (z, y) puede ser suficientemente grande como para provocar la deflexión de las células ciliares.

En la siguiente sección trataremos de escribir las ecuaciones de movimiento para el problema de la cóclea, basándonos en los resultados cualitativos que obtuvimos en esta sección. Esto nos permitirá, posteriormente, incluir los efectos de los términos no lineales sobre el movimiento.

4.2 El sistema hidroelástico y sus propiedades dispersivas.

Por la sección anterior sabemos que la relación de dispersión

$$\omega^2 = \frac{\text{rigidez generalizada}}{\text{inercia generalizada}}$$

es válida cuando

- la rigidez incluye las contribuciones de las fuerzas que tienden a mantener al sistema en equilibrio y
- la inercia incluye las contribuciones de las masas que deben ponerse en movimiento para que el sistema se mueva a su vez.

En ambos casos, son las contribuciones en la energía las que son relevantes para definir a la rigidez y a la inercia [L.5, p.164]. Independientemente de la coordenada generalizada q que utilicemos, las energías potencial y cinética se definen como

$$E_p = \frac{1}{2} s q^2 \quad y \quad (4.11)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2, \quad (4.12)$$

donde m y s son la inercia y la rigidez de la membrana basilar respectivamente. Para flujos en ductos en general, en particular en el caso de la cóclea, E_k y E_p son energías por unidad de longitud del ducto.

La rigidez volumétrica $s = s(x)$ satisface la ecuación (4.11) si q es el volumen desplazado en una de las rampas por unidad de longitud -en la dirección x -. Sea entonces V el volumen desplazado durante el movimiento de la membrana. Por otro lado, definimos a $2p$ como la diferencia de presiones entre las rampas requerida para producir el desplazamiento del volumen

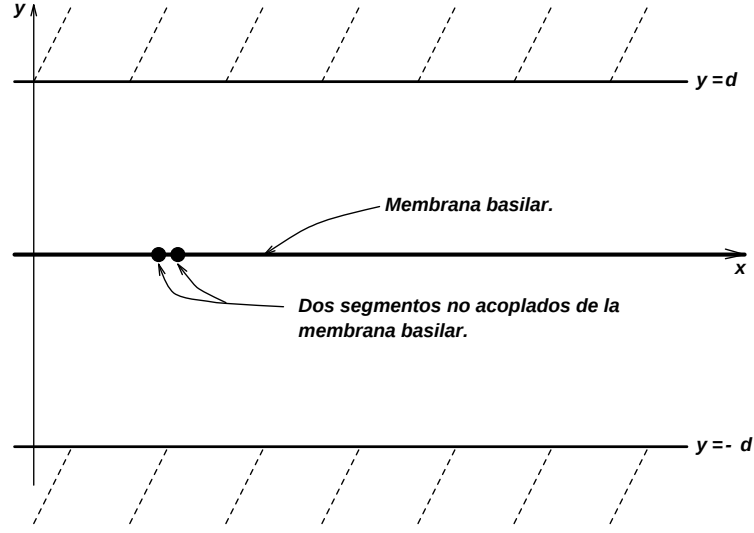


Figura 4.4: Idealización del sistema coclear.

por unidad de longitud V [L.5, p.199]. Por conservación de energía, la tasa de cambio de la energía del sistema coclear debe ser igual a la tasa de trabajo $2p \frac{\partial V}{\partial t}$ efectuado por la diferencia de presiones entre las rampas vestibular y timpánica. Finalmente, aproximamos la condición sobre la membrana basilar como una condición en $y = 0$. De este modo, la condición de acoplamiento entre el fluido y la membrana basilar se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} s V^2 \right] = 2p \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right);$$

esta condición se reduce a

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) + s(x) V(x, t) = 2p(x, t) \quad \text{en } 0 \leq x < \infty, \quad (4.13)$$

donde $p(x, t)$ es la diferencia de presiones entre las dos rampas del fluido que rodea a la membrana. La ecuación (4.13) es la ecuación de un oscilador armónico forzado. La frecuencia natural de dicho oscilador es $\omega^2 = s/m$ donde m es la masa de la membrana basilar. La idealización del sistema se muestra en la figura 4.4.

Como dijimos anteriormente supondremos que el movimiento es bidimensional y que se efectúa en el plano (x, y) (la justificación detallada de esta idealización se encuentra en el apéndice A). Por otra parte, suponemos que el flujo es irrotacional, por lo que la velocidad $\vec{u}$ de dicho fluido puede expresarse como el gradiente del potencial de velocidades. Entonces por la ecuación lineal de conservación de momento (2.12) del capítulo 2 y por la incompresibilidad del fluido, la presión p del fluido satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 p = 0 \quad \text{en } 0 \leq x < \infty. \quad (4.14)$$

Además, suponemos que el laberinto óseo es una frontera sólida y que este laberinto se encuentra a una distancia $y = \pm d$ -con d constante- de la membrana basilar. La condición que satisface p en la frontera es entonces

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

Además si recordamos la analogía del problema con la propagación de ondas en agua profunda (ver apéndice C), podemos interpretar la condición de superficie libre como una condición sobre la aceleración de la membrana. Supondremos entonces que esta aceleración viene dada por el gradiente de presiones -generado gracias al movimiento de los fluidos- entre las dos rampas que componen a la cóclea y que están separadas por la membrana basilar. Tomaremos la rampa vestibular como objeto de nuestro estudio, por lo que aquí $y \geq 0$. Recordemos, además, que V es el volumen desplazado, por lo que la aceleración es $\ddot{V}$, entonces por la segunda ley de Newton, obtenemos una segunda condición sobre la membrana dada por la ecuación

$$\rho \ddot{V} = 2d \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \text{en } y = 0 \quad \text{con } 0 \leq x < \infty. \quad (4.16)$$

Por otro lado, debemos de considerar las condiciones de frontera para $\partial_y V$ y $\partial_t V$ en $t = 0$, así como la condición para V en la posición del estímulo, la cual es

$$V(0, 0; t) = V_o \exp(i\omega t),$$

para V en la base de la membrana basilar. El sistema de ecuaciones (4.13), (4.14), (4.15) y (4.16), junto con las condiciones de frontera para V , constituyen el sistema de ecuaciones que describen el movimiento.

Debido a que el estímulo es una onda periódica con respecto al tiempo vamos ahora a tratar de encontrar soluciones para este modelo.

Buscamos soluciones del tipo de ondas viajeras que sean periódicas en el tiempo, por lo que proponemos a V y a p de la forma

$$V = A(\epsilon x) \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right] + \epsilon V^{(1)} + \dots, \quad (4.17)$$

$$p = B(\epsilon x, y) \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right] + \epsilon p^{(1)} + \dots. \quad (4.18)$$

Donde ϵ representa la escala típica de la inhomogeneidad, es decir, a la escala de $s(\epsilon x)$ con respecto a la longitud de onda del movimiento. De la ecuación (4.18) podemos deducir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = & -(\dot{\theta})^2 B(\epsilon x, y) \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right] + \\ & + \epsilon \left\{ \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial x^2} - i\ddot{\theta} B(\epsilon x, y) - 2i\dot{\theta}\dot{B} \right\} \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right] + \dots, \quad y \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right] + \dots, \quad (4.20)$$

donde el punto significa que derivamos con respecto a la variable lenta -es decir con respecto a ϵx -.

Como p satisface la ecuación de Laplace (4.14), si sumamos las ecuaciones (4.19) y (4.20) los coeficientes de cada una de las potencias de ϵ debe anularse. Considerando el coeficiente de la potencia de ϵ de orden 0 obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - (\dot{\theta})^2 B(\epsilon x, y) = 0,$$

cuya solución puede escribirse como

$$B(\epsilon x, y) = F_1(\epsilon x) \exp(\dot{\theta}y) + F_2(\epsilon x) \exp(-\dot{\theta}y).$$

La ecuación anterior nos permite escribir la aproximación a orden cero de la presión. Si la sustituimos en la ecuación (4.18) para p y usamos la condición de frontera (4.15) en $y = d$, vemos que p tiene la forma

$$p = F(\epsilon x) \left\{ \exp[\dot{\theta}(\epsilon x)y] + \exp[2\dot{\theta}(\epsilon x)d - \dot{\theta}(\epsilon x)y] \right\} \exp\left[i\omega t - i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right].$$

Podemos eliminar a F de la ecuación anterior si consideramos la condición de frontera (4.16) sobre la membrana basilar. Usando la forma (4.17) que propusimos para V , vemos fácilmente que

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho\omega^2 A(\epsilon x) \exp(i\omega t) \exp\left[-i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon}\right],$$

por lo que la condición (4.16) queda como

$$-\rho\omega^2 A(\epsilon x) = 2d \frac{\partial B(\epsilon x, 0)}{\partial y}.$$

Podemos encontrar a $\frac{\partial B(\epsilon x, 0)}{\partial y}$ por medio de las ecuaciones anteriores. Esto nos permite determinar a F en función de A , de modo que

$$F(\epsilon x) = -\rho \omega^2 A(\epsilon x) \left\{ 2d\dot{\theta} \left[1 - \exp \left(2d\dot{\theta} \right) \right] \right\}^{-1} \quad (4.21)$$

Por otra parte, la ecuación (4.13) se escribe en términos de A y de F como

$$\left[-m\omega^2 + s(\epsilon x) \right] A(\epsilon x) = 2F(\epsilon x) \left[1 + \exp \left(2\dot{\theta}d \right) \right]. \quad (4.22)$$

Eliminando a $F(\epsilon x)$ de la ecuación (4.22) por medio de la ecuación (4.21), obtenemos finalmente la relación de dispersión (cuando consideramos la aproximación a orden cero de las magnitudes físicas V y p) dada como

$$\omega^2 \left\{ m + \rho \left(\dot{\theta}d \right)^{-1} \frac{\exp \left(2\dot{\theta}d \right) + 1}{\exp \left(2\dot{\theta}d \right) - 1} \right\} = s(x). \quad (4.23)$$

En el límite cuando el número de onda crece $\dot{\theta}d \gg 1$ y la ecuación (4.23) toma el valor dado en la ecuación (4.6), la cual es la relación de dispersión que estábamos buscando, pues es la que permite que se satisfagan las observaciones cualitativas de la sección anterior.

Vamos ahora a indicar esquemáticamente el proceso que permite obtener el siguiente orden de la aproximación de la energía. Las variables $V^{(1)}$ y $p^{(1)}$ satisfacen las siguientes ecuaciones no homogéneas:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial t^2} + s(\epsilon x) V^{(1)} &= p^{(1)}, \\ \rho \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial t^2} &= 2d \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} \text{ y} \\ \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial y^2} &= -i\ddot{\theta}F \exp \left\{ i\omega t - i \left[\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \right\} \times \\ &\quad \left\{ \exp \left[\dot{\theta}(\epsilon x)y \right] + \exp \left[2\dot{\theta}(\epsilon x)d - \dot{\theta}(\epsilon x)y \right] \right\}, \end{aligned}$$

con las condiciones en la frontera correspondientes. El sistema homogéneo debe tener soluciones y una de ellas es la onda cuyo número de onda $\dot{\theta}$ satisface la ecuación de dispersión. Por lo tanto, el sistema no homogéneo tiene soluciones únicamente cuando se satisface una condición de compatibilidad. Podemos obtener esta condición separando variables e integrando por partes la ecuación que resulta en y para $p^{(1)}$. Esta condición toma la forma de una ecuación diferencial para F y podemos expresarla en términos de la variable V como

$$\frac{\partial}{\partial x} \omega'(k) A^2(\epsilon x) = 0.$$

La ecuación anterior es precisamente la ecuación (4.9) que sugerimos de manera cualitativa, al usar el argumento de velocidad de grupo cuando $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$. Nos fue posible utilizar este argumento por que no hay una dependencia temporal explícita.

4.3 Efectos viscosos.

En esta sección estudiaremos el efecto de la viscosidad sobre el mecanismo de propagación de ondas en la cóclea. Debemos entonces de considerar la ecuación de conservación de momento del fluido que rodea a la membrana. Supondremos que el fluido es incompresible por lo que podemos tomar a la ecuación (2.35) de Navier-Stokes -que dedujimos en el capítulo 2. Como primera aproximación supondremos que el término no lineal $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ -donde $\vec{u}$ es la velocidad del fluido- de dicha ecuación es pequeño; entonces $\vec{u}$ satisface

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p.$$

A esta última ecuación se le conoce como *ecuación de Stokes*.

Peskin siguió este método para determinar la forma de la propagación de la onda sobre la membrana y para tratar de explicar el principio de posición. Peskin considera que la membrana es viscoelástica, por lo que en sus ecuaciones aparece un coeficiente de viscosidad de la membrana. Sabemos que no existen evidencias de dicho coeficiente. Sin embargo, el modelo de Peskin también presenta las características del mecanismo de absorción de capa crítica. El problema con dicho modelo es que debe resolverse numéricamente. Por otra parte Lighthill encuentra una solución aproximada al problema en forma analítica. Esta solución permite estudiar los efectos de la viscosidad en la capa crítica, así como encontrar el flujo medio que actúa como fuente de flujo de volumen. Este flujo de volumen podría ser el responsable del movimiento de las células ciliares.

Como queremos estudiar el efecto de la viscosidad sobre el movimiento, no podemos suponer que siga siendo válida la ecuación (4.14) (aunque después veremos que sí lo es), debido a que la dedujimos para el caso en el que el fluido es irrotacional: Como vimos en el capítulo 2, en las regiones donde la viscosidad es importante el fluido no puede considerarse como irrotacional. Las demás ecuaciones de la sección anterior no se modifican. Debemos entonces resolver el sistema de ecuaciones

$$m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + s(x)V = 2p(x, 0, t) \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \infty, \quad (4.24)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 2d \frac{\partial p}{\partial y}(0, t) \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \infty, \quad (4.25)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \infty, \quad (4.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq d, \quad (4.27)$$

$$\vec{u} = (0, \frac{\partial V}{\partial t}) \quad \text{en} \quad y = 0 \text{ y} \quad (4.28)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{en} \quad y = d. \quad (4.29)$$

Además, supondremos que la viscosidad cinemática ν es pequeña y que sus efectos están confinados dentro de la capa límite.

En esta sección vamos a determinar la disipación de la energía debida a la viscosidad. Para ello es necesario que encontremos una expresión para la velocidad $\vec{u}$ del fluido. Esto es lo que haremos a continuación. Por analogía a nuestro razonamiento de la sección anterior, vamos a suponer que la forma de V puede aproximarse por la expansión (4.17), por lo que su derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial V}{\partial t} = i\omega A(\epsilon x) \exp \left[i\omega t - i\frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] + \dots, \quad (4.30)$$

donde A y θ los determinamos en el caso de la solución invíscida. Entonces la condición de frontera (4.28) puede escribirse como

$$\vec{u} \Big|_{y=0} = (0, i\omega A \exp i[\omega t - kx])$$

Por otra parte suponemos que $\vec{u}$ es una función periódica con respecto al tiempo, por lo que

$$\vec{u} = (u, v) \exp(i\omega t), \quad (4.31)$$

Entonces $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = i\omega \vec{u}$. Otra conclusión de la condición anterior sería

$$i\omega \vec{u} = \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p. \quad (4.32)$$

Cuando calculamos la divergencia de la ecuación de Stokes -ecuación (4.26)- y usamos la relación (4.32) notamos que

$$\rho i\omega (\nabla \cdot \vec{u}) = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2 [\nabla \cdot \vec{u}].$$

Si recurrimos a la ecuación (4.27) obtenemos

$$\nabla^2 p = 0. \quad (4.33)$$

Además, podemos eliminar a p de la ecuación de Stokes pues la ecuación (4.33) anula el término $\nabla^2[\nabla p] = 0$. Consecuentemente, al calcular el laplaciano de la ecuación (4.32) encontramos que

$$\nabla^2[\nabla^2 - i\omega\nu^{-1}]\vec{u} = 0. \quad (4.34)$$

Por lo tanto, p y $\vec{u}$ satisfacen el sistema desacoplado

$$\nabla^2 p = 0, \quad (4.35)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{y} \quad (4.36)$$

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 - i\frac{\omega}{\nu} \right) \vec{u} = 0. \quad (4.37)$$

Donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Si suponemos que u es de la forma (separación de variables)

$$u = U(y) \exp(i\omega t - i\frac{\theta}{\epsilon}). \quad (4.38)$$

y la escribimos en la ecuación (4.37):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - i\omega\nu^{-1} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0,$$

encontramos que

$$(\dot{\theta})^4 U - 2(\dot{\theta})^2 U''(y) + U^{(4)}(y) - i\omega\nu^{-1} [-(\dot{\theta})^2 U + U''] = 0 \quad (4.39)$$

Si definimos $K^2 = (\dot{\theta})^2 + i\omega\nu^{-1}$, encontramos que la ecuación se escribe como

$$U^4(y) - [(\dot{\theta})^2 + K^2] U''(y) + (\dot{\theta}^2 K^2) U = 0. \quad (4.40)$$

Un breve examen de esta última ecuación nos indica suponer que $U = \exp(ry)$. Entonces obtendremos el polinomio $r^4 - [\dot{\theta}^2 + K^2] + (\dot{\theta})^2 K^2 = 0$. Este polinomio tiene como raíces a $r = \pm \dot{\theta}, \pm K$. Si reemplazamos la condición de frontera en $y = d$ por una condición para y grande encontramos que

$$U(y) = B \exp(-\dot{\theta}y) + C \exp(-Ky).$$

Además $U = 0$ en $y = 0$ nos especifica que

$$U(y) = B \left[\exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right].$$

Si escribimos la componente v de la velocidad de la forma $v = V \exp i(\omega t - \theta/\epsilon)$ entonces vemos que v satisface las mismas ecuaciones aunque cumple con la condición de frontera $V = i\omega A$ en $y = 0$. Además, v satisface la relación $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Entonces

$$-i\dot{\theta}B \left[\exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right] + D \left[K \exp(-Ky) - \dot{\theta} \exp(-\dot{\theta}y) \right] - i\omega AK \exp(-Ky) = 0$$

De esta ecuación inferimos que

$$\begin{aligned} i\dot{\theta}B + \dot{\theta}D &= 0 \quad \text{y} \\ i\dot{\theta}B + KD &= i\omega AK. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema encontramos que u y v son de la forma:

$$u(x, y) = iD \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right\} \quad \text{y} \quad (4.41)$$

$$v(x, y) = D \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ \exp(-\dot{\theta}y) - \dot{\theta}K^{-1} \exp(-Ky) \right\}, \quad (4.42)$$

donde las funciones D y K satisfacen

$$D(1 - \dot{\theta}K^{-1}) = i\omega A(\epsilon x) \quad \text{y} \quad (4.43)$$

$$K^2 = \dot{\theta}^2 + i\omega\nu^{-1}. \quad (4.44)$$

Ahora podremos calcular la disipación de la energía cinética debida al efecto de la viscosidad. La tasa de disipación de energía D , por unidad de volumen y promediada sobre un periodo temporal, se expresa como [L.4, p. 592]

$$D = 2\mu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + \mu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\rangle.$$

Si usamos las ecuaciones (4.41) y (4.42) para u y para v , respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{i\dot{\theta}\omega A}{1 - \dot{\theta}/K} \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-\omega A}{1 - \dot{\theta}/K} \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ -\dot{\theta} \exp(-\dot{\theta}y) + K \exp(-Ky) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\dot{\theta}\omega A}{1 - \dot{\theta}/K} \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right\}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{i\dot{\theta}\omega A}{1 - \dot{\theta}/K} \exp \left[\omega t - i \frac{\theta(\epsilon x)}{\epsilon} \right] \left\{ -\exp(-\dot{\theta}y) + \exp(-Ky) \right\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, demostramos en el capítulo 2 que el promedio (con respecto al tiempo) del producto de dos variables de la forma $(A + Bi) \exp(i\omega t)$ es simplemente la mitad del factor -que mutiplica a la exponencial- de una de ellas por el complejo conjugado de la otra. En el apéndice A demostramos que esto es cierto también cuando dichas variables se escriben como un complejo multiplicado por $\exp(i\omega t - i\theta/\epsilon)$. Aplicamos este resultado aquí. Si no consideramos la componente $\exp(i\omega t - i\theta/\epsilon)$, podemos deducir fácilmente, de las ecuaciones anteriores, que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^* &= \frac{(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} \left| \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right|^2 \quad y \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^* &= \frac{(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} \left| \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right|^2.\end{aligned}$$

Del mismo modo, tenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^* = \frac{4(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} \left| \exp(-\dot{\theta}y) - \frac{1}{2\dot{\theta}} (\dot{\theta}^2 K^{-1} + K) \exp(-Ky) \right|^2.$$

Por lo tanto, D queda como

$$D = \frac{2\mu(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} \left\{ \left| \exp(-\dot{\theta}y) - \exp(-Ky) \right|^2 + \left| \exp(-\dot{\theta}y) - \frac{1}{2} (\dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1}) \exp(-Ky) \right|^2 \right\}.$$

Pero el término entre llaves de la ecuación anterior es igual a

$$\begin{aligned}2 \exp(-2\dot{\theta}y) \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left| \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1} \right|^2 \right\} &+ \left| \exp(-2Ky) \right| - \\ &\Re \left\{ \left[2 + \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1} \right] \exp \left[-(\dot{\theta} + K)y \right] \right\}.\end{aligned}$$

Si integramos la expresión anterior de $y = 0$ a $y = \infty$, obtenemos la disipación total de energía por unidad de área Δ , como:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2\mu(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} \left\{ \dot{\theta}^{-1} - \Re (\dot{\theta}^{-1} + K^{-1}) \right\} + \\ &\frac{2\mu(\dot{\theta}\omega A)^2}{|1 - \dot{\theta}/K|^2} [2\Re(K)]^{-1} \left[1 + \frac{1}{4} \left| \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1} \right|^2 \right].\end{aligned}\tag{4.45}$$

En efecto,

$$2 \int_0^{\infty} \exp(-2\dot{\theta}y) dy = \dot{\theta}^{-1};$$

$1 + \frac{1}{4} \left| \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1} \right|^2$ no depende de y y

$$\int_0^{\infty} |\exp(-2Ky)| dy = [2\Re(K)]^{-1};$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Re \left\{ \left[2 + \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1} \right] \exp \left[-(\dot{\theta} + K)y \right] \right\} dy &= -\Re \left(\frac{2 + \dot{\theta}K^{-1} + K\dot{\theta}^{-1}}{\dot{\theta} + K} \right) \\ &= -\Re(\dot{\theta}^{-1} + K^{-1}). \end{aligned}$$

Ahora bien, la expresión para Δ puede reescribirse como

$$\Delta = \frac{\mu(\omega A)^2}{4 \left| 1 - \dot{\theta}/K \right|^2} |K|^{-2} (\Re K)^{-1} \left[-8\dot{\theta}^2 (\Re K)^2 + 4\dot{\theta}^2 |K|^2 + \left| \dot{\theta}^2 + K^2 \right|^2 \right].$$

Además, sabemos por la ecuación (4.44) que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \Re(K^2) = 2(\Re K)^2 - |K|^{-2}, \quad \text{y que} \\ \left| \dot{\theta}^2 + K^2 \right|^2 &= 4\dot{\theta}^2 + \omega^2 \nu^{-2}. \end{aligned}$$

Entonces Δ se reduce a

$$\Delta = \frac{\mu(\omega A)^2}{4} (\Re K)^{-1} \left| \dot{\theta} + K \right|^2.$$

Si escribimos lo anterior en términos del número adimensional $\kappa = \dot{\theta}\sqrt{\nu/\omega}$, tenemos que

$$\Delta = \mu \dot{\theta} \omega^2 \left\{ \frac{(\kappa^4 + 1)^{1/2} + \kappa^2}{4\kappa \Re(\kappa^2 + i)^{1/2}} + \frac{1}{2} \right\} A^2(\epsilon x), \quad (4.46)$$

Este coeficiente es un coeficiente de disipación por unidad de longitud y sobre un ciclo. Esto quiere decir que debemos modificar la ecuación de conservación de la energía para la amplitud, de modo a incluir los efectos disipativos. Este coeficiente Δ depende de la amplitud A de V , del número de onda local $\dot{\theta}$, y de un factor donde interviene el número adimensional κ . Si incluimos los efectos disipativos, entonces dicha ecuación queda como

$$\frac{\partial}{\partial x} \omega'(k) A^2 = -\Delta A^2.$$

Podemos fácilmente integrar esta ecuación, dando como resultado

$$\omega'(k) A^2(x) = \omega'(0) A^2(0) \left\{ \exp \left[- \int_0^x \frac{\Delta}{\omega'} dx \right] \right\},$$

por lo que la amplitud es de la forma

$$A^2(x) = \frac{\omega'(0) A^2(0)}{\omega'(k)} \left\{ \exp \left[- \int_0^x \frac{\Delta}{\omega'} dx \right] \right\}, \quad (4.47)$$

La ecuación (4.47) nos permite interpretar la abrupta caída de la amplitud de la onda a cero. esta característica se debe a que ω' tiende a cero conforme se acerca la onda a la posición característica. En efecto, por la relación de dispersión que obtuvimos (ver figura 3.14), vemos que ω' tiende a cero más rápidamente que $\omega_r - \omega$, o que $x_r - x$ en nuestro caso (pues consideramos a ω fija). Cerca de la posición característica, podemos, de lo anterior, deducir que ω' se hace cuadráticamente cero como función de la diferencia $x_r - x$, es decir, $\omega' [k(x)] \sim \alpha (x_r - x)^2$, con $\alpha > 0$. Si Δ fuera cero, la amplitud A de la onda se volvería infinita cuando ω' tiende a cero, que fue lo que dedujimos anteriormente. Pero como Δ siempre es positiva (ver la ecuación (4.46)), en la vecindad de x_r tenemos que

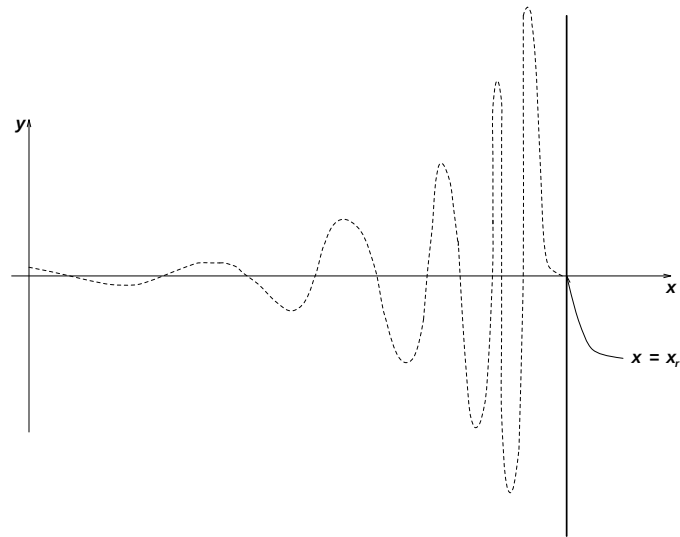
$$\exp \left[- \int_0^x \frac{\Delta}{\omega'} dx \right] \approx \exp \left[- \frac{1}{x_r - x} \right],$$

por lo que la amplitud del movimiento de la membrana es cero en $x = x_r$. Esto nos indica que la amplitud desarrolla un gradiente decreciente muy pronunciado en la vecindad de la capa crítica. La amplitud de la onda, incluyendo los efectos viscosos, se muestra esquemáticamente en la figura 4.3. Debemos señalar que hasta la fecha no existe un tratamiento matemático completo que obtenga la ecuación de disipación de energía como consecuencia de una condición de compatibilidad.

En el desarrollo anterior consideramos que los términos no lineales $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ eran pequeños. Sin embargo, cerca del punto característico la amplitud de la onda es grande y el efecto de estos términos es importante. En la siguiente sección estaremos el efecto más notable de estos términos sobre el movimiento, es decir, la aparición de un flujo de volumen medio en el plano (z, y) -el plano transversal de la membrana basilar.

4.4 El flujo medio.

En la sección anterior omitimos los términos no lineales de la ecuación de Navier-Stokes (4.26), y esto nos permitió calcular el efecto de la disipación en la capa crítica. En esta sección



Esquema del desplazamiento de la membrana basilar cuando consideramos disipación, la cual se debe a el efecto de la viscosidad sobre el movimiento de la membrana. En el punto x_r la amplitud de la onda es cero, por lo que dichos efectos son responsables de que la energía transportada por la onda se disipe dentro del fluido antes de que dicha onda alcance el punto característico.

Figura 4.5: Esquema del desplazamiento de la membrana basilar.

estudiaremos el efecto de los términos no lineales. Si incluimos estos términos, la ecuaciones que debemos resolver son

$$m\ddot{V} + s(x)V = 2p(x, 0, t), \quad (4.48)$$

$$\rho\ddot{V} = 2d\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, t), \quad (4.49)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (4.50)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.51)$$

$$\vec{u} = (u, v) = (0, \dot{V}) \text{ en } y = 0 \text{ y} \quad (4.52)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ en } y = d. \quad (4.53)$$

Por otro lado, ya calculamos la solución aproximada de $\vec{u}^{(0)}$ (ecuaciones (4.41) y (4.42), y basándonos en las expresiones dadas por las ecuaciones (4.17) y (4.18) encontramos las aproximaciones $V^{(0)}$ y $p^{(0)}$. Escribimos a la solución como una función periódica y una contribución debida a los efectos no lineales, cuya importancia se debe a la presencia de una capa crítica en $x = x_r$. Para calcular los efectos no lineales tomamos aproximaciones

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots, \quad (4.54)$$

$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + \dots \text{ y} \quad (4.55)$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + \dots \quad (4.56)$$

para u , V y p , respectivamente.

Si linealizamos al sistema de ecuaciones que describen al movimiento, obtenemos, para los términos de orden (1),

$$m\ddot{V}^{(1)} + s(x)V^{(1)} = p^{(1)}, \quad (4.57)$$

$$\rho\ddot{V}^{(1)} = 2d\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}, \quad (4.58)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} + (\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(1)} + (\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)} + (\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)} = -\nabla p^{(1)} + \mu \nabla^2 \vec{u}^{(1)}, \quad (4.59)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^{(1)} = 0, \quad (4.60)$$

$$\vec{u}^{(1)} \text{ en } y = 0 \text{ y} \quad (4.61)$$

$$\vec{u}^{(1)} \text{ en } y = d. \quad (4.62)$$

Vemos que el término $(\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)}$ es como una fuerza externa que actúa sobre el flujo $u^{(1)}$. Como $\vec{u}^{(1)}$ es del orden de $[u^{(0)}]^2$, podemos despreciar los términos $(\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(1)}$ y $(\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)}$

en la ecuación (4.59). Obtenemos entonces la ecuación de Stokes (4.26) pero con un término extra de forzamiento (término $(\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)}$); es decir,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} = -\nabla p^{(1)} + \mu \nabla^2 \vec{u}^{(1)} - (\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)}, \quad (4.63)$$

con las condiciones de frontera $\vec{u} = 0$ en $y = 0$ y en $y = d$. Desarrollemos ahora el término $(\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)}$ en serie de Fourier con respecto a x y a t . Este desarrollo se descompone en un término promedio y en un término que oscila con respecto al tiempo. En el capítulo 2 (sección 2.5) discutimos las contribuciones de estos términos y su origen. En este caso la fuerza debida al esfuerzo de Reynolds tiene dos contribuciones, que son

$$F_x = -\rho \overline{\frac{\partial}{\partial x} (\vec{u}^{(0)} \vec{u}^{(0)})} - \rho \overline{\frac{\partial}{\partial y} (\vec{u}^{(0)} \vec{v}^{(0)})}, \quad (4.64)$$

donde la barra denota promedio espacial y temporal. Cuando la amplitud de las ondas no depende de x , la única contribución a la fuerza es la del segundo término del lado derecho de la ecuación (4.68). Sin embargo, en el problema que estamos estudiando ambos términos aparecen. Desarrollando el término $\vec{u}^{(1)}$ en serie de Fourier tenemos que el término independiente del tiempo satisface la ecuación

$$\mu \nabla^2 \overline{\vec{u}^{(1)}} - \nabla \overline{p^{(1)}} = \left\{ -\rho \overline{\frac{\partial}{\partial x} \vec{u}^{(0)} \vec{u}^{(0)}} - \rho \overline{\frac{\partial}{\partial y} \vec{u}^{(0)} \vec{v}^{(0)}} \right\}, \quad (4.65)$$

$$\nabla \cdot \overline{\vec{u}^{(1)}} = 0 \text{ y} \quad (4.66)$$

$$\overline{\vec{u}^{(1)}} = 0 \text{ en } y = 0, y = d. \quad (4.67)$$

La dependencia en x en la ecuación es ahora sobre la escala más lenta. Además, las componentes en la dirección y tienen promedio cero. En principio, la solución del sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.65) y la ecuación (4.66), junto con las condiciones de frontera (4.67) es el flujo acústico que estamos buscando. Como el problema es lineal, basta con que conozcamos una solución fundamental del problema de Stokes para escribir una solución de las ecuaciones (4.65), (4.66) y (4.67) anteriores en términos de una integral del tipo de la que se obtiene con la teoría del potencial. Aunque esta formulación es exacta, tiene la desventaja de ser difícil de interpretar. Por lo tanto, seguiremos otro camino.

Para empezar, recordemos que la fuerza debida a los esfuerzos de Reynolds se restringe a la capa límite, ya que decae como $\exp(-y\sqrt{\omega/\nu})$. Por esta razón, el flujo acústico se concentra en la capa límite. Esto nos motiva a reemplazar a la fuerza externa por una condición de frontera efectiva en $y = 0$. Esto es el análogo a reemplazar la ecuación ordinaria inhomogénea

$$\begin{aligned} \nu y'' - y &= f(x), \text{ con} \\ y(0) &= 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por la ecuación homogénea

$$\begin{aligned}\nu y'' - y &= 0, \text{ con} \\ y(0) &= f(0) \text{ cuando } y \rightarrow 0, x \rightarrow 0,\end{aligned}$$

cuando $\nu \rightarrow 0$. En nuestro caso el análisis es más complejo ya que se trata de un vector y que debemos satisfacer la condición $\nabla \cdot \vec{u}^{(1)} = 0$. En el apéndice A explicamos como encontrar en este caso la condición de frontera efectiva. Entonces obtenemos que el flujo acústico está dado, en este caso, como

$$\vec{u}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} A^2 \frac{\dot{\theta}}{\omega} - \frac{3}{8\omega} \left(\frac{dA^2}{dx} \right), 0 \right] = (\bar{u}_s, 0) \text{ en } y = 0. \quad (4.68)$$

El primer término de la componente horizontal de $\bar{u}_s$ es la contribución del término $-\rho \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}^{(0)} \vec{v}^{(0)}$ de la ecuación para F_x , mientras que el segundo depende del gradiente del cuadrado de la amplitud de la onda. Ambos términos tienen el mismo signo en la vecindad de x_r . El decaimiento de A^2 debido a la viscosidad del fluido produce un flujo medio muy intenso. A continuación veremos que este flujo medio es responsable del flujo de volumen en el plano transversal de la cóclea, el cual es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Con la condición de frontera (4.68) anterior podemos resolver el problema de Stokes. Como el flujo se encuentra confinado en la capa límite, no consideraremos la condición de frontera en $y = d$. Por lo anterior, resolveremos ahora el problema dados por las ecuaciones

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \nabla p \text{ y} \quad (4.69)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.70)$$

con las condiciones de frontera

$$\vec{u} = (\bar{u}_s, 0) \text{ en } y = 0 \text{ y} \quad (4.71)$$

$$\vec{u} \rightarrow 0 \text{ cuando } y, z \rightarrow \infty. \quad (4.72)$$

Aquí hemos idealizado a la onda y al flujo medio al desprestigiar su dependencia con la variable z . La solución de este problema de Stokes es clásica (ver, por ejemplo la referencia [B.1]). Por esta razón reproducimos los detalles necesarios para la interpretación de dicha solución. Para obtener una solución singular, consideremos el problema homogéneo. Entonces la presión es solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 p = 0.$$

Por otra parte, si $\vec{u}$ es de la forma

$$\vec{u} = \frac{p}{2\mu}(x, y, z),$$

entonces $\vec{u}$ satisface

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \nabla p,$$

ya que $\nabla^2 p = 0$. Pero

$$\nabla \cdot \left[\frac{p}{2\mu}(x, y, z) \right] = 3p + (x, y, z) \cdot \nabla p.$$

La ecuación anterior no es cero a menos que la función p sea una función homogénea de grado (-3) (por el teorema de Euler para funciones homogéneas). Por lo tanto, para obtener una solución debemos de encontrar una función armónica de grado (-3) . Entonces necesitamos una solución con la singularidad apropiada. Como el dipolo es de grado (-2) , y el cuadrupolo de grado (-3) , tomamos una solución cuadrupolar del tipo

$$p = Q \frac{3xy}{4\pi r^5}, \quad (4.73)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces p , dada por la ecuación (4.73) presenta las propiedades que necesitamos pues es una función armónica de grado (-3) y tiene una singularidad en $x = y = z = 0$. El campo de velocidades asociado a la distribución de presiones dada por la ecuación (4.73) es

$$\vec{u} = \frac{Q}{2\mu} \frac{3xy}{4\pi r^5}(x, y, z). \quad (4.74)$$

Vamos ahora a demostrar que cuando $y \rightarrow 0$ tenemos que

$$u = \frac{Q}{2\mu} \frac{3x^2y}{4\pi r^5} \rightarrow \frac{Q}{4\mu} \delta(x) \delta(z). \quad (4.75)$$

Sea el caso en que y es positiva y sea una función $f(x, z)$ de soporte compacto; integremos sobre el plano las componentes de $\vec{u}$ multiplicadas por f . Si v es la componente vertical de la velocidad, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v f(x, z) dx dz = \frac{Q}{2\mu} \frac{3y^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cos \theta}{(\rho^2 + y^2)^{5/2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho d\theta.$$

Si dividimos a la integral en dos integrales, la primera sobre el intervalo $[0, \epsilon]$ y la segunda sobre $[\epsilon, \infty]$, queda claro que la integral sobre el intervalo $[\epsilon, \infty]$ tiende a cero cuando y tiende a cero. Para poder evaluar a la primera integral, desarrollamos a la función f en serie de Taylor alrededor del punto $(0, 0)$, de modo que

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta + \cdots = f(0, 0) + O(\rho).$$

La integral sobre θ de $f(0, 0)$ es cero. Para el término $O(\rho)$, tenemos una integral acotada por arriba, pues

$$\int_0^\epsilon \frac{y^2 \rho^3}{(\rho^2 + y^2)^{5/2}} d\rho \leq \int_0^\epsilon y^\eta \rho^{-\eta} d\rho \leq C y^\eta \epsilon^{1-\eta}.$$

Pero $y^\eta \epsilon^{1-\eta}$ tiende a cero cuando y tiende a cero y cuando η es menor que 1. Por lo tanto,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v f(x, z) dx dz = 0.$$

Siguiendo un razonamiento análogo para la componente transversal w , escribimos a la integral sobre el plano (x, z) del producto de w por la función f en coordenadas polares, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w f(x, z) dx dz = \frac{Q}{2\mu} \frac{3y}{4\pi} \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3 \cos \theta \sin \theta}{(\rho^2 + y^2)^{5/2}} [f(0, 0) + O(\rho)] d\rho d\theta.$$

En este caso obtenemos el mismo resultado que el que obtuvimos antes para v , es decir, que el límite de la integral es cero cuando y tiende a cero. Finalmente, para la componente horizontal u tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u f(x, z) dx dz = \frac{Q}{2\mu} \frac{3y}{4\pi} \iint_0^{\epsilon 2\pi} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta}{(\rho^2 + y^2)^{5/2}} [f(0, 0) + O(\rho)] d\rho d\theta.$$

Como $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, sólo tenemos que evaluar la integral correspondiente al término $1/2$, pues el término $\frac{\cos(2\theta)}{2}$ nos da una integral que podemos fácilmente evaluar a partir de los resultados anteriores y cuyo límite es cero. Para el término $1/2$ tenemos una integral de la forma

$$\frac{Q}{2\mu} \frac{3y}{4\pi} \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{2(\rho^2 + y^2)^{5/2}} [f(0, 0) + O(\rho)] d\rho d\theta.$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{(\rho^2 + y^2)^{5/2}} d\rho &= - \left[\frac{\rho^2}{3(\rho^2 + y^2)^{3/2}} \right]_0^\epsilon + \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + y^2)^{3/2}} d\rho \\ &= - \frac{\epsilon^2}{3(\epsilon^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{2}{3(\epsilon^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{2}{3y}. \end{aligned}$$

Y recordando que debemos multiplicar el resultado anterior por $\left(\frac{3Q}{8\mu}\right) y$, tenemos finalmente que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u f(x, z) dx dz = \frac{Q}{4\mu} f(0, 0),$$

por lo que

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = \frac{Q}{4\mu} \delta(x) \delta(z),$$

que es exactamente la ecuación (4.75) a la que queríamos llegar. Esta forma (4.75) de u es una solución fundamental del problema. Si tomamos a Q igual a 4μ , podemos concluir que el flujo que mueve a las células ciliares es de la forma

$$w = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi)y(z - \eta)}{[(x - \xi)^2 + y^2 + (z - \eta)^2]^{5/2}} \overline{u_s}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4.76)$$

En la ecuación anterior hemos extendido las integrales al plano $y = 0$ ya que $\overline{u_s}$ está concentrado cerca del punto $\xi = x_r$ y distribuida uniformemente en la dirección transversal. Obtendríamos una fórmula análoga a la ecuación (4.76) anterior para la velocidad v . Si integramos por partes (en ξ) la integral en la ecuación (4.76) vemos que la componente en la dirección transversal de la velocidad w puede reescribirse como

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(z - \eta)}{[(x - \xi)^2 + y^2 + (z - \eta)^2]^{3/2}} \left(-\frac{\partial \overline{u_s}(\xi)}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta. \quad (4.77)$$

La ecuación (4.77) nos permite deducir que w apunta hacia afuera de la fuente. En efecto, el comportamiento de la integral se debe al término

$$\left(-\frac{\partial \overline{u_s}(\xi)}{\partial \xi} \right),$$

el cual es positivo en el punto $\xi = x_r$. Además, w y $(z - \eta)$ tienen entonces el mismo signo. Por lo tanto, w apunta hacia afuera de la fuente. La figura 4.4 muestra esquemáticamente las observaciones anteriores.

También vemos que el flujo w es máximo cuando $x \sim x_r$, es decir, en el punto donde se forma la capa crítica. Lo anterior explica el movimiento de las células ciliares como producto de un estímulo de frecuencia específica. Trataremos ahora de estimar este flujo. Para ello, podemos interpretar el término

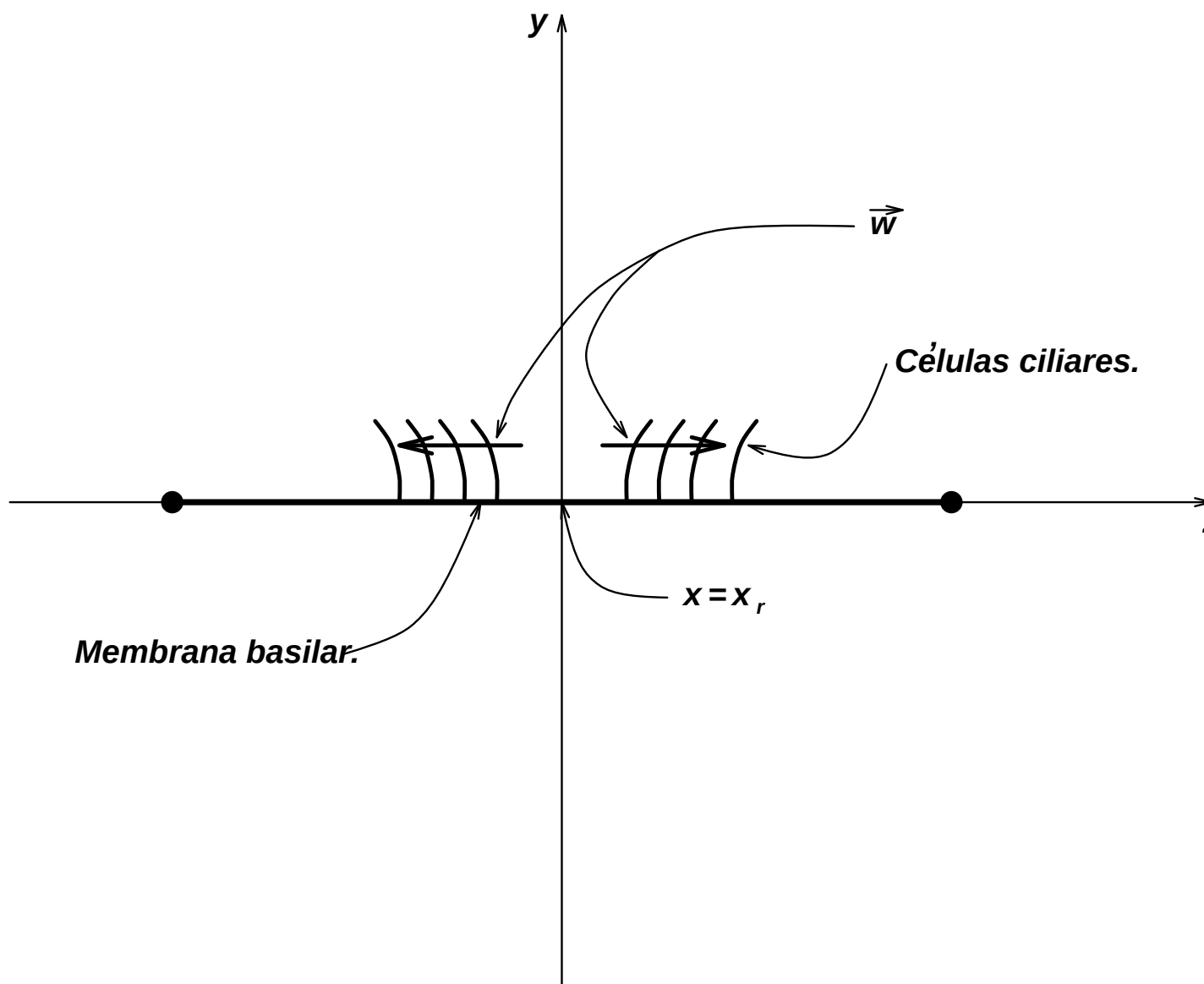
$$\left(-\frac{\partial u_s(\xi)}{\partial \xi} \right),$$

como una fuente concentrada. Para esto podemos aproximar la integral de la ecuación (4.77) como

$$w = \frac{zy}{2\pi [y^2 + (x - x_r)^2 + z^2]^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial u_s(\xi)}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta. \quad (4.78)$$

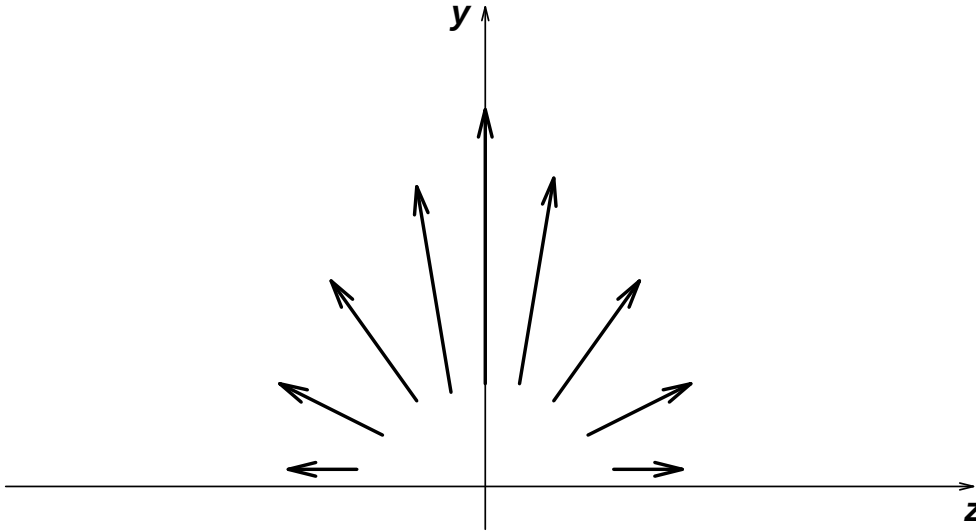
De la misma forma,

$$v = \frac{y^2}{2\pi [y^2 + (x - x_r)^2 + z^2]^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial u_s(\xi)}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta. \quad (4.79)$$



En esta figura se muestra esquemáticamente la deformación de las células ciliares hacia afuera del punto $x = x_r$, debida a la presencia de un flujo medio w en dicha dirección.

Figura 4.6: Esquema de la deformación de las células ciliares debida al flujo w .



Flujo de volumen generado por el flujo medio en la dirección transversal de la membrana basilar. Este flujo medio es consecuencia, a su vez, del flujo acústico generado por la disipación de la energía de la onda cerca del punto característico $x = x_r$.

Figura 4.7: Esquema de la intensidad de flujo de volumen q .

El valor de la integral en las ecuaciones (4.78) y (4.79) está dominado por la región a la derecha del máximo de $\overline{u}_s$. Por lo tanto, como primera estimación de la intensidad q del flujo de volumen proponemos

$$q = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}_s^{max}(\eta) d\eta. \quad (4.80)$$

Este flujo de volumen se muestra en la figura 4.4 para una distancia nodal fija, medida a partir del origen.

Este análisis completa el modelo del movimiento de las células ciliares como generado por una onda que viaja sobre la membrana; la máxima amplitud de la onda se produce en una posición que depende de la frecuencia del estímulo.

Capítulo 5

Resumen, conclusiones y perspectivas.

En este trabajo tratamos primero de describir algunas ideas de mecánica de fluidos necesarias para comprender el problema de propagación de ondas en la cóclea. Hicimos hincapié en las ecuaciones lineales y no lineales para fluidos, así como en diversos mecanismos de disipación de energía. Incluimos también las ecuaciones para fluidos compresibles en un sistema adiabático, aunque como vimos después los efectos de la compresibilidad del fluido pueden despreciarse en la región de la cóclea que estábamos estudiando. También consideramos diferentes mecanismos de disipación de energía, los cuales son responsables de la aparición de términos no lineales -esfuerzos de Reynolds- en las ecuaciones de Navier-Stokes y generan un flujo medio importante en la dirección de propagación de la onda. En el siguiente capítulo estudiamos algunas propiedades de los fluidos cocleares y de la membrana basilar.

Además, vimos algunas características del mecanismo de propagación de ondas en la cóclea gracias a experimentos efectuados por Rhode. Estos experimentos muestran la discriminación de frecuencias debida a las propiedades mecánicas de la membrana basilar, lo que se conoce como principio de posición. En efecto, a cada frecuencia del estímulo le corresponde un punto característico sobre la membrana basilar; frecuencias mayores a la frecuencia de dicho punto son absorbidas por la membrana en posiciones que se encuentran más cerca de la base de la cóclea y por lo tanto no pasan por este lugar. Por otra parte, estos experimentos nos permitieron deducir el carácter dispersivo de las ondas cocleares, así como aislar los efectos de la dispersión. Lo anterior nos llevó a estudiar, en el capítulo 4, los tres fenómenos que interactúan en la propagación. El primero de estos, la dispersión de la onda, se debe únicamente a las propiedades mecánicas de la membrana basilar y domina sobre el movimiento hasta que la onda llega al punto característico que le corresponde sobre dicha membrana. La dispersión es la que frena a la onda y no le permite pasar más allá de su punto característico, de modo que tanto su número de onda como su amplitud crecen enormemente. En este punto se acumula toda la energía transportada por la onda. A este mecanismo de absorción de energía se le conoce como *absorción de capa crítica* y se ha observado con anterioridad en fluidos estratificados, como por

ejemplo la ionósfera. Es sorprendente ver que este fenómeno también se presenta dentro de la cóclea, y que por lo tanto un modelo de absorción de energía parecido al de guías de ondas es totalmente inadecuado para la descripción de nuestro sistema.

Por otra parte, es en la capa crítica donde la viscosidad del fluido interviene; es la viscosidad la responsable de que se disipe la energía en la región donde esta última se acumula. La importancia de la viscosidad se debe a que el número de onda es muy grande en la capa crítica, por lo que la tasa de pérdida de energía se vuelve, a su vez, importante. Entonces, la amplitud de la onda no crece infinitamente: alcanza un máximo y decae luego abruptamente a cero por el efecto de la viscosidad del fluido que rodea a la membrana. Cuando esto sucede, los gradientes de la amplitud son grandes; entonces debemos de considerar los términos no lineales en las ecuaciones que describen al fluido. Estos términos no lineales generan un flujo medio en la dirección de propagación de la onda. Es en la vecindad de la membrana basilar donde nos interesa determinar este flujo medio, pues vimos que sobre esta membrana se encuentran las células ciliares -responsables del mecanismo de transducción. Por estas razones dedujimos el flujo medio en la vecindad tanto de la membrana basilar (es decir, en $y = 0$) como del punto característico que le corresponde a la frecuencia del estímulo, es decir, en una posición muy particular de la cóclea. Finalmente, este flujo medio genera un flujo de volumen en la dirección transversal.

Por la forma del flujo medio que determinamos, podemos ver que este flujo no depende de la viscosidad, a pesar de ser una consecuencia del efecto de la viscosidad sobre la disipación de la energía transportada por el movimiento de la membrana. Esto nos induce a concluir que este flujo medio aparecerá aún cuando la viscosidad del fluido sea pequeña. Suponemos que esto se debe a que la tasa de disipación de energía depende también del número de onda, y como en la región donde aparece el flujo medio, este número de onda es grande, la tasa de disipación también lo es. Finalmente, propusimos una forma para el flujo de volumen en la dirección transversal. Evaluamos este flujo de volumen donde el flujo medio es máximo, que es cuando es más importante. Pensamos que este flujo medio de volumen es el responsable de la deflexión -en la dirección transversal- de las células ciliares. Esta deflexión hace que los canales de las células se abran, permitiendo el paso de iones dentro de las mismas. Este paso iónico dentro de la célula, provocado por la deflexión, corresponde a la transducción de la señal mecánica en una señal eléctrica. Dejaremos el estudio de esta transducción para investigaciones posteriores.

Hasta el momento es difícil realizar un experimento que determine el flujo medio de volumen. Además, es posible que el papel que juega la membrana tectoria durante este proceso es el de canalizar este flujo en la dirección transversal - sobre el plano de las células ciliares. Podríamos, en el futuro, tratar de incluir a la membrana tectoria en el modelo y ver si es este el caso. Otra simplificación que hicimos en el desarrollo de este trabajo fue la de determinar el flujo medio en un modelo bidimensional de la cóclea. En este modelo, por lo tanto, es imposible ver el efecto de la forma del laberinto óseo. Este efecto sería importante cerca de los puntos donde se adhiere la membrana basilar, pues los movimientos de los fluidos no son importantes más allá

de una distancia del orden de k^{-1} de la membrana. Sin embargo, en el apéndice A, estudiamos la forma de la velocidad en la dirección transversal y damos argumentos que nos permiten concluir que, cerca del punto característico, esta velocidad es mucho menor que la velocidad en la dirección de propagación de la onda. Este hecho nos induce a pensar que el flujo medio de volumen que aparecería considerando al flujo acústico transversal, es también pequeño comparado con el que determinamos en este trabajo y que puede despreciarse. Posponemos la demostración para el futuro.

Por otra parte, no consideramos en el modelo el efecto que pueden tener los surcos en el proceso de propagación de la onda, efecto desconocido, hasta la fecha, de acuerdo con la literatura consultada. Finalmente, mencionamos antes que es difícil medir el flujo de volumen a través de las células ciliares, tanto por la estructura y las dimensiones de la cóclea como por la necesidad de realizar este experimento *in vivo*. Recomendamos, para nuevas investigaciones, contar con la colaboración de fisiólogos experimentales de manera a subsanar este último aspecto del problema.

Apéndice A

Flujo acústico en la cóclea.

Como vimos al estudiar el problema de flujo acústico en el capítulo 2, la ley de flujo de Rayleigh se aplica al “flujo acústico resultante debido a la vibración de una frontera que delimita a un fluido en reposo”. En este apéndice trataremos de determinar el movimiento medio -al que también llamaremos flujo acústico- generado dentro de los fluidos cocleares por la vibración de la membrana basilar. Como vimos en la última sección del capítulo anterior, podemos considerar a la membrana basilar como parte de la frontera que delimita al fluido. La membrana basilar juega un papel similar al de la frontera libre en el problema de propagación de ondas en agua profunda. Aunque los fluidos cocleares no se encuentran en reposo, su masa decae como el inverso del número de onda, y como cerca del punto de resonancia este número de onda es muy grande, la ley de flujo antes mencionada es aplicable también, aproximadamente, al caso de propagación de ondas dentro de la cóclea. En este caso las ondas cocleares no son ondas sonoras, sino ondas propagándose sobre una placa -la membrana basilar no se comporta como una membrana en el sentido elástico de la palabra- cuya rigidez disminuye por cuatro ordenes de magnitud desde la base hasta la punta del caracol.

En este apéndice mostraremos primero (sección A.1) que el problema de propagación de ondas en la cóclea puede reducirse a un problema bidimensional. Por la analogía del problema con el de propagación de ondas superficiales en agua profunda, podemos estudiar el problema en una sola de las rampas. En este caso la membrana basilar es una de las fronteras que delimitan al fluido. Las otras fronteras son rígidas pues las constituye el laberinto óseo. También suponemos que el eje x es un eje de simetría de la membrana y que la forma del laberinto óseo es circular. También consideraremos a la lámina espiral ósea como inexistente, de manera que la membrana basilar es el diámetro del semi-círculo que delimita a nuestro fluido. Seguiremos considerando que la aproximación WKB es válida, por lo que proponemos un potencial de velocidades de la forma

$$\phi = \Phi(z, y) \exp [i(\omega t - kx)].$$

El gradiente de este potencial de velocidades es igual a la velocidad del fluido, cuando éste es

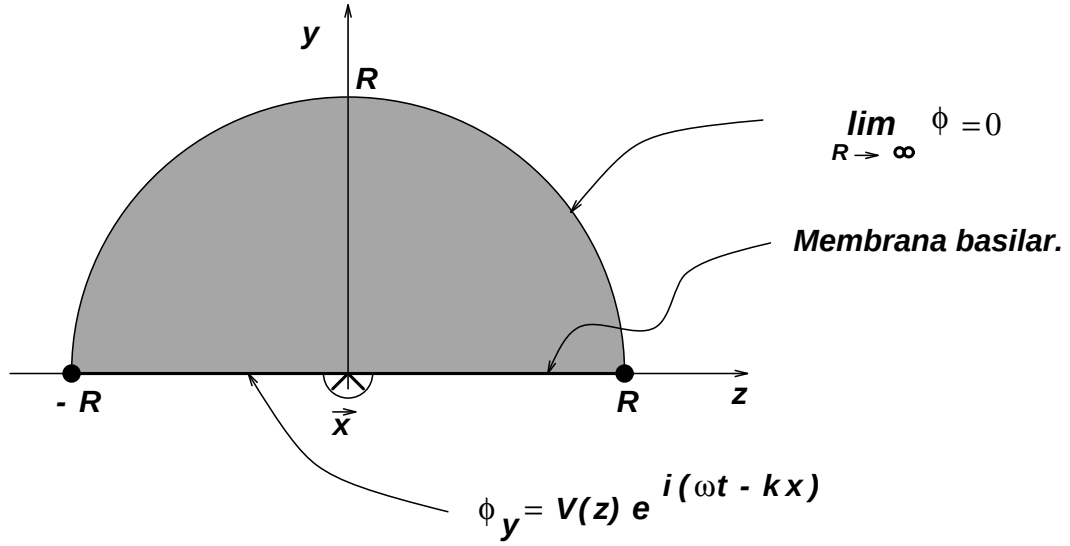


Figura A.1: Planteamiento del problema en tres dimensiones, en términos del potencial de velocidades ϕ . En este esquema se muestra un corte transversal de la membrana. El eje x se muestra también en la figura.

irrotacional. Lo anterior siempre se cumple si consideramos al fluido fuera de la capa límite, pues entonces el fluido puede considerarse como ideal. Por otra parte, debido a que la velocidad de la onda viajera es pequeña y que en la región donde queremos encontrar la solución la amplitud de esta onda es máxima, podemos suponer que se cumple la ecuación de Laplace -esta condición es equivalente a despreciar los efectos de compresibilidad del fluido, los cuales no son importantes -como se vió en el capítulo 3- para frecuencias mayores a la frecuencia característica que nos concierne, pero no para frecuencias menores a ésta. Por lo tanto, usaremos las ecuaciones para fluidos incompresibles que dedujimos en el capítulo 2. Por otra parte, supondremos que los efectos de la frontera sólida sobre el fluido pueden despreciarse, por lo que tomaremos a esa condición como si fuera a profundidad grande. Esta es otra de las analogías del problema con el de propagación de ondas en agua profunda. Las aproximaciones sobre la geometría de la cóclea que hemos descrito se muestran en el esquema de la sección transversal de la cóclea de la figura A.1. En esa figura mostramos las condiciones de frontera así como la ecuación que debe de satisfacer el potencial de velocidades. Estas ecuaciones constituyen el planteamiento del problema que resolveremos para poder dar argumentos sobre la reducción del problema tridimensional a un problema bidimensional. Finalmente, consideraremos que la cóclea está estirada.

A.1 Distribución local.

Fuera de la región donde el efecto de la viscosidad es importante, el fluido puede considerarse como un fluido ideal y por lo tanto podemos expresar a la velocidad como el gradiente de un potencial de velocidades ϕ . Por las conclusiones sobre las características que debe presentar un modelo de propagación de ondas en la cóclea (ver capítulo 3), podemos suponer que la solución se escribe como una superposición de ondas viajeras longitudinales (en la dirección x). Cada una de estas ondas se expresa, en forma general y para el caso en tres dimensiones, como

$$\phi(x, y, z; t) = \Phi(y, z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (\text{A.1})$$

donde la solución al problema físico se reduce a la parte real de la ecuación (A.1). Además, ϕ es solución de la ecuación de Laplace, por lo que Φ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - k^2 \Phi = 0. \quad (\text{A.2})$$

Φ debe de satisfacer las condiciones de frontera sobre la membrana basilar y la condición impuesta por la suposición de que el fluido está en reposo cerca de las fronteras sólidas de la cóclea. Supongamos que el eje x coincide con el eje de simetría axial de la membrana basilar (ver figura A.1). De este modo, consideramos que la membrana basilar se encuentra en el plano $y = 0$. Si la condición para ϕ sobre la membrana basilar es

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (\text{A.3})$$

la condición para Φ en dicha superficie es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V(z). \quad (\text{A.4})$$

La condición sobre la frontera ósea de la cóclea sería la misma tanto para ϕ como para Φ , y ésta es

$$\lim_{\sqrt{z^2 + y^2} \rightarrow \infty} \Phi(z, y) = 0. \quad (\text{A.5})$$

A continuación resolveremos la ecuación (A.2), con las condiciones de frontera (A.4) y (A.5). Encontraremos dicha solución en función de la solución fundamental del problema.

A.1.1 Solución fundamental.

Antes de determinar la solución fundamental, vamos a escribir la ecuación (A.2), y la condición de frontera (A.5), en términos de las variables $u = |\vec{r}|$ y φ (ver figura A.2) definidas como

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{z^2 + y^2}, \quad y \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{z}\right). \end{aligned}$$

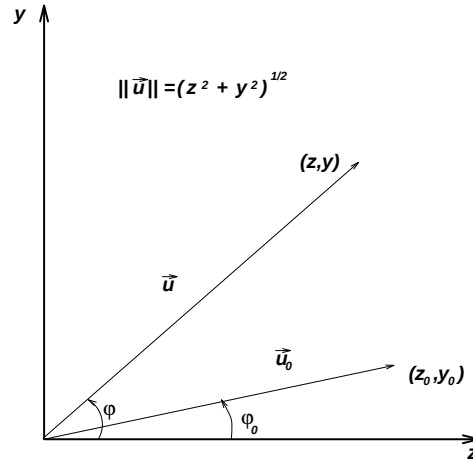


Figura A.2: Ilustración de las variables utilizadas para obtener la solución fundamental del problema.

Haciendo este cambio de variables, el laplaciano se expresa como

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

por lo que las ecuaciones (A.2) y (A.5) se pueden escribir como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 \right) \Phi(u, \varphi) = 0, \quad (\text{A.6})$$

con la condición de frontera

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (\text{A.7})$$

Supongamos ahora que tenemos una fuente puntual a una distancia u_o de $(0,0)$ y que el ángulo entre el vector $\vec{u}_o$ y el eje z es φ_o . La solución fundamental G es la solución del problema planteado en las ecuaciones (A.6) y (A.7), incluyendo dicha fuente. Consideremos ahora la condición (A.4). Pediremos que la solución fundamental cumpla con la condición de Neuman homogénea en $y = 0$. Pero

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\cos \varphi}{u} \frac{\partial G}{\partial \varphi},$$

y como $\sin \varphi = 0$ y $\cos \varphi \neq 0$ cuando $y = 0$ (en $\varphi = 0$ o π), debemos pedir que

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} \equiv 0.$$

Debido a la simetría del problema cuando $u \rightarrow \infty$, supondremos que G es independiente del ángulo φ en la región donde está definida la solución del problema. Entonces, si $G = G(u, u_o)$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} - k^2 \right) G(u, u_o) = \delta(|\vec{u} - \vec{u}_o|),$$

donde $\vec{u}_o$ sería la posición de la fuente con respecto a estas variables. Además, sabemos que

$$\delta(|\vec{u} - \vec{u}_o|) = \frac{1}{u} \delta(u - u_o) \delta(\varphi - \varphi_o).$$

En efecto, la delta de Dirac tiene la propiedad de que, para toda función f ,

$$f(z_o, y_o) = \int \int f(z, y) \delta[(z, y) - (z_o, y_o)] dz dy.$$

En coordenadas polares, tendríamos que

$$f(r_o \cos \varphi_o, r_o \sin \varphi_o) = \int \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) g(r, \varphi) r dr d\varphi,$$

y para que lo anterior sea cierto g debe ser de la forma

$$g(r, \varphi) = \frac{1}{r} \delta(r - r_o) \delta(\varphi - \varphi_o).$$

Entonces,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} - k^2 \right) G(u, u_o) = \frac{1}{u} \delta(u - u_o) \delta(\varphi - \varphi_o). \quad (\text{A.8})$$

Podemos integrar la ecuación (A.8) con respecto a φ . El lado izquierdo de dicha ecuación sólo se modifica por un factor multiplicativo igual a π (suponemos que G no depende de φ , y además que nuestro problema está definido para el semiplano superior) y el lado derecho es igual

$$\frac{1}{u} \delta(u - u_o),$$

debido a las propiedades de la delta de Dirac. Sea $G' = \pi G$. Debemos resolver la ecuación

$$\left(u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} - k^2 u \right) G'(u, u_o) = \delta(u - u_o), \quad (\text{A.9})$$

junto con la condición

$$\lim_{u \rightarrow \infty} G' = 0. \quad (\text{A.10})$$

Pediremos, además, que G' sea regular en $u = u_o$.

Si $u \neq u_o$:

En este caso G' es solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d}{du} \left[u \frac{dG'}{du} \right] - k^2 u G' = 0. \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.11) es la ecuación de Bessel Modificada de orden cero [I.1, p.143], por lo que la solución general se escribe como

$$G'(u, u_o) = c_1(u_o) I_0(ku) + c_2(u_o) K_0(ku).$$

Como $I_0(ku)$ diverge cuando $u \rightarrow \infty$, si u es mayor que u_o , la solución se escribe como

$$G'(u, u_o) = c_2(u_o) K_0(ku), \quad \text{para } u > u_o. \quad (\text{A.12})$$

Por otro lado, pedimos que G' sea finito si $0 < u < u_o$. Como $K_0(ku)$ diverge si $u \rightarrow 0$, entonces en este caso la solución sería de la forma

$$G'(u, u_o) = c_1(u_o) I_0(ku), \quad \text{para } 0 < u < u_o. \quad (\text{A.13})$$

Vamos ahora a determinar el coeficiente $c_2(u_o)$ de la ecuación (4.17). Para ello es necesario considerar las propiedades de la solución fundamental [I.1, pp.734-735]. Por continuidad de G' en $u = u_o$, se debe satisfacer

$$c_2(u_o) K_0(ku_o) = c_1(u_o) I_0(ku_o). \quad (\text{A.14})$$

Además, como

$$\left(u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u} \right) G(u, u_o) = \delta(u - u_o), \quad (\text{A.15})$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[u \frac{\partial G}{\partial u} \right] - k^2 u G = \delta(u - u_o). \quad (\text{A.16})$$

Integremos de $u = u_o - \epsilon$ a $u = u_o + \epsilon$. Por lo tanto

$$\left[u \frac{\partial G}{\partial u} \right]_{u_o - \epsilon}^{u_o + \epsilon} - \int_{u_o - \epsilon}^{u_o + \epsilon} k^2 u G(u, u_o) du = 1. \quad (\text{A.17})$$

Pero u y G son regulares en $u = u_o$. Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{u_o - \epsilon}^{u_o + \epsilon} k^2 u G(u, u_o) du = 0, \quad (\text{A.18})$$

de modo que $u_o \frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{u=u_o^+} - u_o \frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{u=u_o^-} = 1$.

En consecuencia, la condición de salto de la derivada de G' es

$$\left. \frac{dG'}{du} \right|_{u=u_o^+} - \left. \frac{dG'}{du} \right|_{u=u_o^-} = \frac{1}{ku_o}.$$

Usando (A.12) y (A.13) obtenemos

$$c_2(u_o)K'_0(ku_o) - c_1(u_o)I'_0(ku_o) = \frac{1}{ku_o}. \quad (A.19)$$

Ahora despejamos a $c_1(u_o)$ de la ecuación (A.14) y la reemplazamos en (A.19). Entonces

$$c_2(u_o) \left[I_0(ku_o)K'_0(ku_o) - K_0(ku_o)I'_0(ku_o) \right] = \frac{I_0(ku_o)}{ku_o}. \quad (A.20)$$

Faltaría determinar el valor de $I_0(ku_o)K'_0(ku_o) - K_0(ku_o)I'_0(ku_o)$. Sabemos que tanto $I_0(x)$ como $K_0(x)$ son solución de la ecuación de Bessel Modificada de orden 0, es decir,

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - x^2 f(x) = 0, \quad (A.21)$$

con $f = I_0$ o $f = K_0$. Si reemplazamos I_0 y K_0 en la ecuación (A.21) obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 I''_0 + x I'_0 - x^2 I_0(x) &= 0 \\ K''_0 + x K'_0 - x^2 K_0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicamos a la primera ecuación del sistema anterior por K_0 y a la segunda por I_0 y después las restamos; así que

$$x^2 [K_0 I''_0 - K''_0 I_0] + x [I'_0 K'_0 - K'_0 I'_0] - x^2 [I_0 K_0 - K_0 I_0] = 0.$$

Entonces

$$[K_0 I'_0 - K'_0 I_0]' = \frac{1}{x} [I'_0 K_0 - K'_0 I_0].$$

Usemos ahora la ecuación (A.20) en la expresión anterior, podemos deducir

$$[I_0(ku_o)K'_0(ku_o) - K_0(ku_o)I'_0(ku_o)]' = -\frac{1}{ku_o} [I_0(ku_o)K'_0(ku_o) - K_0(ku_o)I'_0(ku_o)]. \quad (A.22)$$

La ecuación (A.22) es una ecuación diferencial ordinaria, y se resuelve fácilmente dando como resultado, cuando $x = ku_o$,

$$I_0(ku_o)K'_0(ku_o) - K_0(ku_o)I'_0(ku_o) = \frac{c}{ku_o}, \quad (A.23)$$

con $c = \text{constante}$. Además, $K'_0 = -K_1$ e $I'_0 = I_1$ [I.1, p.145], por lo que (A.23) es equivalente a

$$I_0(ku_o)K_1(ku_o) + K_0(ku_o)I_1(ku_o) = -\frac{c}{ku_o}. \quad (A.24)$$

Para determinar la constante c , usaremos las expansiones asintóticas de I_0 , I_1 , K_0 y K_1 , para x grande, limitándonos al primer término (para ver cual es la forma de estas expansiones, consultar la referencia [A.1, pp.377-378]). Estas expansiones nos permiten concluir que

$$I_0(ku_o)K_1(ku_o) + K_0(ku_o)I_1(ku_o) \sim \frac{1}{ku_o} = -\frac{c}{ku_o},$$

y por lo tanto $c = -1$. Por todo lo anterior, tenemos finalmente el valor de c_2 dado por

$$c_2(ku_o) = -I_0(ku_o).$$

Además, si consideramos que la fuente se encuentra en $u_o = 0$, y como I_0 es tal que $\lim_{u_o \rightarrow 0} I_0(ku_o) = 1$, entonces

$$c_2(ku_o) = -1;$$

entonces la solución (A.12) está definida en todo el espacio. Al considerar el caso en que la fuente se encuentra en $u_o = 0$, sólo existe la solución para $u > 0$. Entonces, cuando la fuente se encuentra en el origen, la solución de Green es simplemente

$$G(u, \varphi) = -\frac{1}{\pi} K_0(k|\vec{r}|).$$

Esto nos induce a concluir que, en el caso en que la fuente se encuentra en un punto arbitrario (z_o, y_o) , la solución fundamental puede escribirse como

$$G(u, \varphi) = -\frac{1}{\pi} K_0(k|\vec{r} - \vec{r}_o|), \quad (\text{A.25})$$

siendo esta solución válida en todo el espacio. Determinaremos ahora la solución de nuestro problema usando la función de Green (A.25).

A.1.2 Solución en términos de la función de Green.

Definimos a la región donde existe nuestra solución fundamental como el semi-círculo de radio R , cuyo diámetro coincide con el eje z_o . Sea S la frontera de dicha región (ver figura A.3).

Por el segundo teorema de Green ¹, sabemos que

$$\int_{S_o} \left(G \frac{\partial \Phi_o}{\partial n} - \Phi_o \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_o = \int \int_{R_o} (G \nabla^2 \Phi_o - \Phi_o \nabla^2 G) dA_o, \quad (\text{A.26})$$

¹Este teorema se deduce transformando la integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (A.26) en una integral de superficie, por medio del teorema de la divergencia.

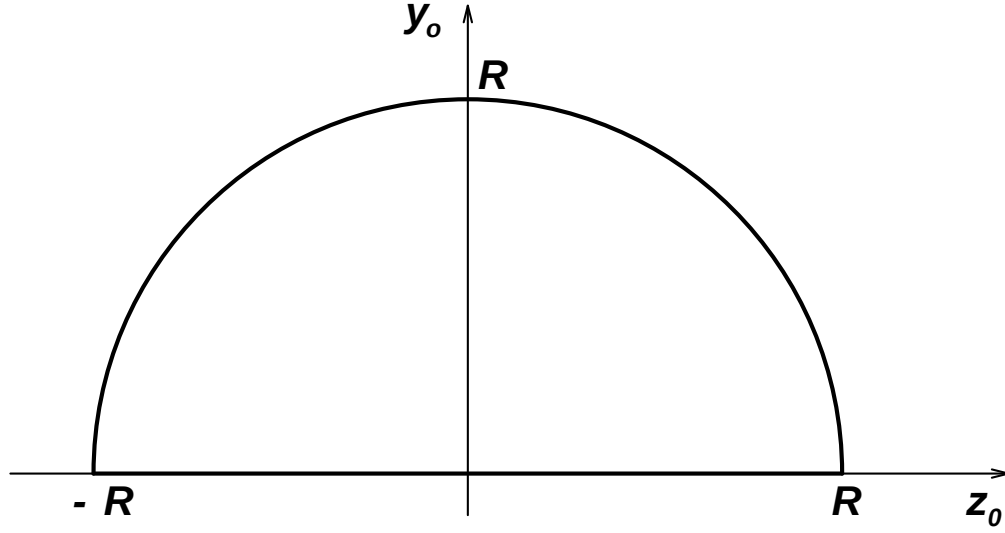


Figura A.3: Región en la que está definida la solución fundamental.

con $dA_o = dz_o dy_o$ y $\Phi_o = \Phi(z_o, y_o)$. Pero

$$G \nabla^2 \Phi_o - \Phi_o \nabla^2 G = G (\nabla^2 - k^2) \Phi_o - \Phi_o (\nabla^2 - k^2) G.$$

Además Φ_o satisface la ecuación (A.2) y G satisface

$$(\nabla^2 - k^2) G = \delta(z - z_o) \delta(y - y_o),$$

respectivamente, en R . Por lo tanto,

$$\int_S G \frac{\partial \Phi_o}{\partial n} - \Phi_o \frac{\partial G}{\partial n} dS_o = - \int \int_R \Phi(z_o, y_o) \delta(z - z_o) \delta(y - y_o) dA_o = -\Phi(z, y),$$

es decir,

$$\Phi(z, y) = - \int_{S_o} G \frac{\partial \Phi_o}{\partial n} - \Phi_o \frac{\partial G}{\partial n} dS_o. \quad (\text{A.27})$$

Sobre $y_o = 0$, G satisface la condición de Neumann homogénea, y

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial y_o},$$

por lo que sobre esa parte de la frontera

$$\Phi_1(z, y) = \int_{-R}^R G \frac{\partial \Phi_o}{\partial y_o} \Big|_{y_o=0} dz_o. \quad (\text{A.28})$$

Sobre el semi-círculo, consideremos que $u_o = R$ y $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial u_o}$, entonces

$$\Phi_2(z, y) = \int_0^\pi \left[\Phi(u_o) \frac{\partial G(u, u_o)}{\partial u_o} - G(u, u_o) \frac{\partial \Phi}{\partial u_o} \right]_{u_o=R} d\varphi_o. \quad (\text{A.29})$$

Además

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial G(u, u_o)}{\partial u_o} \right]_{u_o=R} &= \frac{-1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_o} [K_0(k |\vec{u} - \vec{u}_o|)] \right\}_{u_o=R} \\ &= \frac{k}{\pi} K_1(k |\vec{u} - \vec{R}|) \left[\frac{\partial}{\partial u_o} (k |\vec{u} - \vec{u}_o|) \right]_{u_o=R}. \end{aligned}$$

Pero

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_o} (k |\vec{u} - \vec{u}_o|) \right]_{u_o=R} = \frac{R - r \cos(\varphi - \varphi_o)}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \varphi_o)}},$$

por lo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{\partial}{\partial u_o} (k |\vec{u} - \vec{u}_o|) \right]_{u_o=R} \right) = 1.$$

Por otra parte,

$$\lim_{\vec{R} \rightarrow \infty} K_1(k |\vec{u} - \vec{R}|) = 0,$$

y sabemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi_o(R) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \left[\Phi(u_o) \frac{\partial G}{\partial u_o} \right]_{u_o=R} \right\} = 0.$$

Por otro lado, aunque no sabemos cual es el comportamiento de

$$\left[\frac{\partial \Phi_o}{\partial u_o} \right]_{u_o=R}$$

cuando R crece, suponemos que es acotada, y entonces, como $\lim_{\vec{R} \rightarrow \infty} G = 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \left[G \frac{\partial \Phi_o}{\partial u_o} \right]_{u_o=R} \right\} = 0,$$

por lo que tenemos que

$$\lim_{\vec{R} \rightarrow \infty} \Phi_2 = 0. \quad (\text{A.30})$$

Por lo tanto, las ecuaciones (A.28) y (A.30) nos permiten concluir que la solución válida sobre el semi-plano superior es

$$\Phi(z, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R G \frac{\partial \Phi_o}{\partial y_o} \Big|_{y_o=0} dz_o,$$

es decir,

$$\Phi(z, y) = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \left(\sqrt{(z-Z)^2 + y^2} \right) V(Z) dZ, \quad (\text{A.31})$$

donde los puntos fuente $(z_o, y_o) = (Z, 0)$ se encuentran sobre la membrana basilar.

A.1.3 Solución asintótica.

De la ecuación anterior (A.31), podemos determinar fácilmente el límite de Φ cuando y tiende a cero. En efecto,

$$(\Phi)_{y=0} = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} V(Z) K_0(k|Z-z|) dZ. \quad (\text{A.32})$$

Consideremos la expansión en serie de Taylor de $V(Z)$ alrededor de z . Esta expansión es

$$V(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} V^{(m)}(z) \frac{(Z-z)^m}{m!},$$

donde $V^{(m)}(z)$ es la derivada m -ésima de $V(Z)$ evaluada en z . Sea entonces

$$(\Phi)_{y=0} = -\pi^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} V^{(m)}(z) I_m, \quad (\text{A.33})$$

con

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|Z-z|) \frac{(Z-z)^m}{m!} dZ. \quad (\text{A.34})$$

Podemos reescribir a la integral I_m como la suma de dos integrales I_1 e I_2 , la primera de ellas definida para el intervalo $]-\infty, z]$, y la segunda en $[z, \infty[$. Si hacemos los cambios de variables $u_1 = z - Z$ para I_1 , y $u_2 = Z - z$ para I_2 , deducimos que I_m se reduce a

$$I_m = (-1)^m \int_0^{\infty} K_0(ku) \frac{u^m}{m!} du + \int_0^{\infty} K_0(ku) \frac{u^m}{m!} du,$$

por lo que, si $m = 2n + 1$, $I_{2n+1} = 0$. Entonces tenemos que

$$I_m = I_{2n} = 2 \int_0^{\infty} K_0(ku) \frac{u^{2n}}{(2n)!} du. \quad (\text{A.35})$$

Cálculo de I_{2n} :

Si $n = 0$, sabemos que [W.1, p.388]

$$\int_0^{\infty} \exp(-at) K_0(t) dt = \frac{\arccos(a)}{\sqrt{1-a^2}},$$

por lo que si $a = 0$ ²,

$$2 \int_0^{\infty} K_0(t) dt = \frac{\pi}{k}. \quad (\text{A.36})$$

Si $n \neq 0$, consideremos el cambio de variable $v = ku$ y multipliquemos a I_{2n} por $(-1)^n$. En consecuencia

$$(-1)^n I_{2n} = \frac{2}{k} \int_0^{\infty} K_0(v) \left\{ (-1)^n \frac{(v/k)^{2n}}{(2n)!} \right\} dv.$$

El término entre corchetes del integrando es el n -ésimo término del desarrollo de Taylor de $\cos(v/k)$ [C.1, p.472]. Además, tenemos que [W.1, p.388]

$$\int_0^{\infty} K_0(v) \cos\left(\frac{v}{k}\right) dv = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (\text{A.37})$$

Como k es grande (por lo menos mayor que 1), podemos usar el desarrollo de Taylor para la función $(1+x)^\alpha$, el cual está dado por

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \cdots.$$

Reemplazando a x por $(1/k)^2$ y a α por $-1/2$, vemos que el n -ésimo término del desarrollo de Taylor de $\left[1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 \right]^{-1/2}$, es

$$\left\{ \left[1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 \right]^{-1/2} \right\}_n = \frac{(-1)^n k^{-2n}}{2^n n!} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)],$$

y $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$. Lo anterior nos permite concluir que para $n \neq 0$

$$I_{2n} = \pi k^{-2n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}. \quad (\text{A.38})$$

² $K_0(ku) > 0$, por lo que la integral debe ser positiva.

Entonces, usando los resultados de las ecuaciones (A.36) y (A.38) en la ecuación (A.33), obtenemos una expansión en serie de Taylor de Φ en $y = 0$, con $k > 1$, como

$$(\Phi)_{y=0} = -k^{-1} V(z) - \frac{k^{-3}}{2} V''(z) - \frac{3k^{-5}}{8} V^{(4)}(z) - \dots \quad (\text{A.39})$$

Si k es suficientemente grande, podemos considerar sólo el primer término de la expansión (A.39), por lo que la aproximación asintótica de $(\Phi)_{y=0}$, en este caso, es simplemente

$$(\Phi)_{y=0} \sim -k^{-1} V(z). \quad (\text{A.40})$$

Por medio de las ecuaciones (A.40) y (A.1), podemos deducir que

$$(\phi)_{y=0} \sim -k^{-1} V(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (\text{A.41})$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{y=0} \sim i V(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (\text{A.42})$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{y=0} \sim -k^{-1} V'(z) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (\text{A.43})$$

las ecuaciones (A.42) y (A.43), junto con la ecuación (A.3), caracterizan a la distribución de velocidades cerca de la membrana basilar. Podemos suponer que esta distribución es una buena aproximación de la distribución real de velocidades, cuando nos encontramos en la frontera de la capa límite [L.4, p.562]. las componentes x (ecuación (A.42)) y y (ecuación (A.43)) de la distribución de velocidades tienen la misma amplitud pero fase distinta: la fase de u_x es mayor que la de u_y por un factor de $\pi/2$.

Si suponemos que u_z es despreciable, entonces las características de la fase y de la amplitud de u_x y de u_y nos muestran que el movimiento de las partículas es un movimiento circular alrededor de un eje $z = \text{constante}$, tal y como sucede en el problema de propagación de ondas en agua profunda (ver apéndice C). Debido a que la propagación de las ondas se efectúa en la dirección x , vamos a comparar a $|u_z|$ con $|u_x|$. De la figura A.4 vemos que

$$\tan \varphi = \frac{|u_z|}{|u_x|} = \frac{k^{-1} |V'(z)|}{|V(z)|},$$

donde φ es el ángulo entre el plano en el que se realiza el movimiento circular y el plano (x, y) . Para que u_z sea despreciable, suponemos que

$$\arctan \left[\frac{|u_z|_{y=0}}{|u_x|_{y=0}} \right] = \arctan \left[\frac{k^{-1} |V'(z)|}{|V(z)|} \right]$$

es suficientemente pequeño como para que el movimiento de las partículas se efectúe sobre el plano (x, y) y poder limitarnos al primer término de la expansión de $(\phi)_{y=0}$. Recordemos que

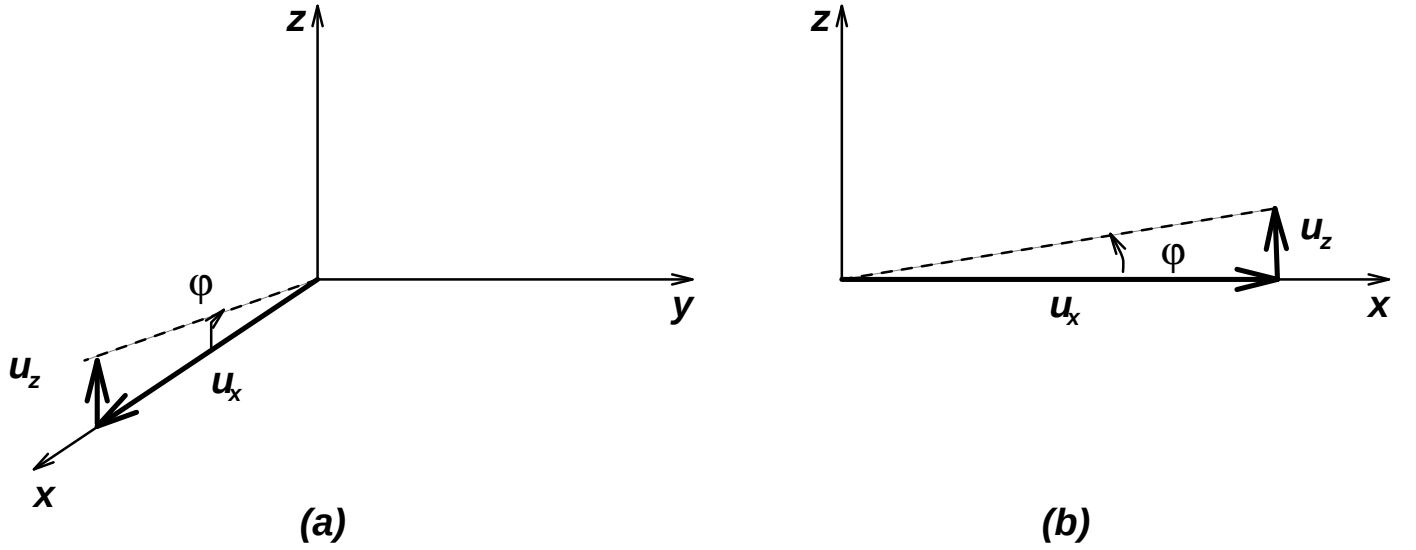


Figura A.4: Ilustración de las componentes x y z de la velocidad y del ángulo φ en a): tres dimensiones y b): en el plano (x, z) .

estamos tratando de determinar la solución cerca del punto de máximo desplazamiento de la membrana basilar. En este punto de máximo desplazamiento la derivada de la amplitud $V'(z)$ es cero, por lo que si estamos en una vecindad suficientemente pequeña, podemos considerar que $V'(z)$ es pequeño. Esto se debe a que supusimos que las variables del problema varían suavemente. Además, debido a la viscosidad, la amplitud de la onda es finita. Finalmente, cerca del punto característico el número de onda es grande. Estas consideraciones nos permiten despreciar a la componente transversal de la velocidad u_z cuando nos encontramos cerca del punto característico. Por lo tanto, en la siguiente sección describiremos el movimiento de la membrana basilar como un movimiento localmente bidimensional, por lo que tomaremos una z fija. De este modo, la amplitud del movimiento es una constante. Sin embargo, debemos señalar que en caso de que φ no sea pequeño el plano del movimiento se efectúa sobre el plano definido por el ángulo φ , y en ese caso debemos de considerar otros términos de la expansión asintótica de ϕ .

A.2 Movimientos localmente bidimensionales. Capa límite.

A.2.1 Ecuaciones de movimiento para el flujo externo.

Vimos en la sección anterior que cuando k crece, de modo que nos acercamos a la frecuencia característica (ver figura 3.14 del capítulo 3), las ondas viajeras cocleares tienden a ser local-

mente bidimensionales. Entonces, en esta sección consideraremos que el movimiento se efectúa en el plano (x, y) únicamente y tomaremos a z como constante. Bajo estas suposiciones, la condición de frontera en $y = 0$ es simplemente

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V, \quad (\text{A.44})$$

con $V = \text{constante}$. Φ se define como antes (ecuación (A.1)), excepto que ahora depende únicamente de y . Además, como ϕ es solución de la ecuación de Laplace en la región ocupada por el fluido, Φ satisface

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi = 0. \quad (\text{A.45})$$

Las soluciones de la ecuación (A.45) son $A \exp(-ky)$ y $B \exp(+ky)$. Sin embargo, pedimos que Φ esté acotada cuando $y \rightarrow \infty$, por lo que $B \equiv 0$. Además, la condición (A.44) nos permite deducir que $A = -k^{-1}V$. Por lo tanto, la solución Φ que buscamos se reduce a

$$\Phi = -k^{-1}V \exp(-ky), \quad (\text{A.46})$$

y entonces

$$\phi = -k^{-1}V \exp(-ky) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (\text{A.47})$$

Si definimos a la componente horizontal u de la velocidad como

$$u = a(y) \exp[i(\omega t - kx)] = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

y a la componente vertical v como

$$v = b(y) \exp[i(\omega t - kx)] = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

la ecuación (A.47) nos permite afirmar que

$$a(y) = iV \exp(-ky) \quad \text{y} \quad b(y) = V \exp(-ky),$$

por lo que

$$u = iV \exp(-ky) \exp[i(\omega t - kx)], \quad \text{y} \quad (\text{A.48})$$

$$v = V \exp(-ky) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (\text{A.49})$$

Observamos que cuando y es pequeño la ecuación (A.49) se reduce a la ecuación (A.3) (con $z = \text{constante} = z_o$), por lo que $V(z_o) = V$ y la ecuación (A.48) se reduce a la ecuación (A.42). También vemos que la amplitud de u es igual a la de v y que la diferencia de fases entre u y v es $\pi/2$, por lo que el movimiento de las partículas es un movimiento circular, característico de ondas en agua profunda -conclusión a la que habíamos ya llegado en la sección anterior. Otra analogía entre ondas cocleares y ondas en agua profunda es que la amplitud del movimiento es proporcional a $\exp(-ky)$ (ver apéndice C).

A.2.2 Atenuación de la velocidad dentro de la capa límite.

En el capítulo 2 vimos como se atenuaba la velocidad debido al efecto de la viscosidad, en la región donde ésta es importante. Vimos, además, que si la velocidad u_{ex} fuera de la capa límite oscilaba con respecto al tiempo, dentro de la capa límite la velocidad era de la forma

$$u = u_{ex} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\}.$$

Por otro lado, la ecuación (A.48) nos permite escribir a u_{ex} como

$$u_{ex} = iV \exp [i(\omega t - kx)],$$

pues suponemos que el ancho de la capa es pequeño, y en ese caso $\exp(-ky) \approx 1$. Entonces, dentro de la capa límite, la velocidad u sería

$$u = iV \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\} \exp [i(\omega t - kx)]. \quad (\text{A.50})$$

La atenuación de u_{ex} dentro de la capa límite hace que se cumpla la condición

$$u = 0, \quad \text{en } y = 0. \quad (\text{A.51})$$

Queremos ahora determinar la velocidad v dentro de la capa límite. La condición de frontera para v en $y = 0$ es

$$v = V. \quad (\text{A.52})$$

Consideraremos además que v es acotada cuando y es grande. Por analogía al caso descrito en el capítulo 2, supondremos que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ es independiente de y , por lo que ³

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -kV \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\}.$$

Entonces

$$v(x, y) = [A(x) - kV] y - kV \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] + B(x).$$

Las condiciones de frontera cuando $y \rightarrow \infty$ y cuando $y = 0$ nos permiten determinar a las funciones A y B . Estas funciones son $A = kV$ y $B = V + kV \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2}$, por lo que

$$v = V \left\{ 1 + k \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\} \right\}. \quad (\text{A.53})$$

³Por comodidad, hemos suprimido el factor $\exp [i(\omega t - kx)]$ de las ecuaciones.

En esta sección hemos construido las velocidades dentro de la capa límite de modo a que se cumplan las condiciones de frontera en $y = \infty$ y en $y = 0$. La condición en $y = 0$ es la condición de acoplamiento entre la velocidad del fluido y la velocidad de la membrana. En las ecuaciones (A.50) y (A.51), vemos la dependencia explícita de las velocidades con el ancho de la capa límite, el cual es inversamente proporcional a $\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2}$. Debemos notar que esta no es la forma usual de determinar las velocidades desde el punto de vista matemático. En este caso nos es posible seguir este procedimiento debido a la similitud entre el problema de propagación de ondas en la cóclea y el de la propagación de ondas -en agua- provocadas por una frontera que oscila. Para este segundo caso es aplicable la ley de flujo de Rayleigh, la cual estudiamos en el capítulo 2. Por esta razón podemos considerar al comportamiento como similar y evitarnos muchos desarrollos matemáticos formales relacionados con métodos asintóticos.

En lo que resta de este apéndice trataremos de estimar los movimientos medios generados por la propagación de ondas en la cóclea, usando las ecuaciones de la velocidad tanto para el flujo externo -ecuaciones (A.48) y (A.49)- como para el interno -ecuaciones (A.50) y (A.53). También trataremos de estimar los flujos de volumen debidos a dichos movimientos, pues estos flujos son los que pueden provocar la deflexión de las células ciliares. Estos flujos de volumen medios se generan gracias a estos movimientos medios, a los que también llamaremos flujo acústico por su similitud con ese fenómeno. El flujo acústico se genera, a su vez, gracias a la disipación de la energía de la onda cerca del punto característico. Esta disipación se debe al efecto de la viscosidad del fluido que rodea a la membrana. Si el fluido no estuviera presente, tendríamos que en la posición característica la amplitud de la onda crecería drásticamente, debido a que ese punto es un punto de acumulación de energía.

A.3 Flujos medios de McIntyre.

A.3.1 Flujo externo.

Sabemos del capítulo 2 que el flujo medio de McIntyre se define como

$$\overline{\vec{u}_M} = \overline{\vec{u}_L} - \overline{\vec{u}_E}.$$

Supongamos, para empezar, que las condiciones sobre las fronteras son tales que las velocidades medias eulerianas, tanto de u como de v , son nulas. Por lo tanto, el flujo medio de McIntyre es igual al flujo medio lagrangiano, y sólo debemos de encontrar la velocidad media en este sistema de referencia. Como estamos estudiando el flujo externo, u y v están dadas por las ecuaciones (A.48) y (A.49), respectivamente. Podemos escribir desplazamientos infinitesimales δx y δy de las partículas de fluido como

$$\delta x = \frac{u}{i\omega} \quad \text{y} \quad \delta y = \frac{v}{i\omega}. \quad (\text{A.54})$$

Además, la velocidad lagrangiana se escribe, en términos de estos desplazamientos, como

$$u_L = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad (\text{A.55})$$

con $\frac{\partial u}{\partial x} = -iku$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -ku$. Escribimos ahora a u como

$$u = [A + Bi] \exp(i\omega t),$$

con $A = V \exp(-ky) \sin(kx)$, y $B = V \exp(-ky) \cos(kx)$, y a v como

$$v = [C + Di] \exp(i\omega t),$$

con $C = V \exp(-ky) \cos(kx)$, y $D = -V \exp(-ky) \sin(kx)$. Entonces, usando el resultado obtenido en el capítulo 2 sobre promedios de productos de funciones de la forma $(\alpha + \beta i) \exp(i\omega t)$, obtenemos ⁴

$$\overline{u_L} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (\delta x)^* + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (\delta y)^* \right\},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \overline{u_L} &= \frac{1}{2} \Re \left\{ [-ik(A + Bi)] \left[\frac{A - Bi}{-i\omega} \right] + [-k(A + Bi)] \left[\frac{C - Di}{-i\omega} \right] \right\} \\ \Rightarrow \overline{u_L} &= \frac{1}{2} \left[k\omega^{-1} (A^2 + B^2) + k\omega^{-1} (BC - AD) \right]. \end{aligned}$$

Pero $A^2 + B^2 = BC - AD = V^2 \exp(-2ky)$, y entonces

$$\overline{u_L} = \overline{u_M} = k\omega^{-1} V^2 \exp(-2ky). \quad (\text{A.56})$$

Siguiendo un razonamiento análogo, es fácil determinar que

$$\overline{v_L} = \overline{v_M} = \frac{1}{2} k\omega^{-1} (AC + BD) = 0. \quad (\text{A.57})$$

Las ecuaciones (A.56) y (A.57) se conocen por el nombre de flujo de Stokes. Vemos que dicho flujo se efectúa únicamente en la dirección de propagación de la onda, pues su componente vertical es nula. Sin embargo, debemos además sumarle el flujo de Stokes dentro de la capa límite, por lo que ahora determinaremos dicho flujo.

⁴Recordemos que Z^* es el complejo conjugado de Z , para todo Z perteneciente a $\mathbb{C}$.

A.3.2 Flujo interno.

Dentro de la capa límite, la velocidad de propagación está dada por las ecuaciones (A.50) y (A.53). Del mismo modo que en la subsección anterior, suponemos que el flujo medio euleriano es nulo. Las ecuaciones (A.54) y (A.55) no dependen de la región donde estemos calculando el flujo medio, por lo que también son válidas dentro de la capa. Sin embargo, ahora tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -iku \text{ y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left\{ iV \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\} \exp [i(\omega t - kx)]. \quad (\text{A.58})$$

Por otro lado, es fácil demostrar que si

$$u = (A + Bi) \exp [i(\omega t - kx)], \quad \text{y} \quad (\text{A.59})$$

$$v = (C + Di) \exp [i(\omega t - kx)], \quad (\text{A.60})$$

entonces el promedio del producto de las partes reales de u y de v es

$$\overline{u_R v_R} = \frac{1}{2} (AC + BD).$$

Este resultado es idéntico al que habíamos encontrado antes, cuando teníamos a las variables en función de $\exp(i\omega t)$ en vez de $\exp[i(\omega t - kx)]$. Por lo anterior, podemos escribir a $\overline{u_R v_R}$ como

$$\overline{u_R v_R} = \frac{1}{2} \Re [(A + Bi)(C - Di)]. \quad (\text{A.61})$$

Si a u , dado por la ecuación (A.50), lo escribimos en la forma

$$u = A + Bi, \quad (\text{A.62})$$

entonces

$$A = -V \exp(-ay) \sin(ay) \quad \text{y} \quad B = -V [\exp(-ay) \cos(ay) - 1],$$

con $a = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2}$. Además, si

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C + Di, \quad (\text{A.63})$$

la ecuación (A.58) nos permite deducir que

$$C = aV \exp(-ay) [\sin(ay) - \cos(ay)] \quad \text{y} \quad D = aV \exp(-ay) [\sin(ay) + \cos(ay)].$$

Finalmente, si

$$v = E + Fi, \quad (\text{A.64})$$

por la ecuación (A.53) tenemos

$$E = V + \frac{kV}{2a} [1 - \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay)] \quad y$$

$$F = \frac{kV}{2a} [\exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay) - 1].$$

En términos de A, B, C, D, E y F , la velocidad media lagrangiana puede escribirse de la forma

$$\overline{u_L} = \frac{1}{2} [k\omega^{-1} (A^2 + B^2) + \omega^{-1} (CF - DE)].$$

Pero

$$k\omega^{-1} (A^2 + B^2) = k\omega^{-1} V^2 [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)], \quad y$$

$$CF - DE = -kV^2 \exp(-ay) \sin(ay) - aV^2 \exp(-ay) [\cos(ay) + \sin(ay)].$$

Entonces la velocidad media lagrangiana queda como

$$\begin{aligned} \overline{u_L} = & \frac{1}{2} [k\omega^{-1} V^2 [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) - \exp(-ay) \sin(ay) + \exp(-2ay)]] \\ & - \frac{1}{2} a\omega^{-1} V^2 \exp(-ay) [\cos(ay) + \sin(ay)]. \end{aligned} \quad (A.65)$$

La ecuación (A.65) determina la forma del flujo medio de McIntyre cuando suponemos que el flujo medio euleriano es cero. De esta ecuación podemos también deducir dicho flujo cuando nos encontramos sobre la membrana basilar, es decir, cuando $y = 0$. Este valor es

$$(\overline{u_L})_{y=0} = (\overline{u_M})_{y=0} = -\frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}}, \quad (A.66)$$

y proviene únicamente del término $\frac{1}{2}a\omega^{-1}V^2 \exp(-ay) [\cos(ay) + \sin(ay)]$ de la ecuación (A.65). Por otra parte, cuando suponemos que la región en la cual es válida esta solución es muy delgada -debido a que la capa límite, en general, satisface esta condición-, podemos suponer que la contribución al flujo medio del término

$$\frac{1}{2}k\omega^{-1}V^2 [1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay) - \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-2ay)]$$

es despreciable en comparación con la del otro. Entonces, para determinar el flujo de masa -por unidad de longitud en la dirección transversal y para $y > 0$ - resultante de la diferencia entre el flujo de McIntyre externo e interno, debemos calcular la integral I dada por

$$\int_0^\infty (\overline{u_M})_{ext} - (\overline{u_M})_{int} dy = \int_0^\infty k\omega^{-1}V^2 \exp(-2ay) + \frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}} \exp(-ay) [\cos(ay) + \sin(ay)] dy,$$

cuyo resultado se reduce a

$$I = -\frac{\omega^{-1}V^2}{2} + \frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}} \left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^{1/2} = 0, \quad (\text{A.67})$$

cuando aproximamos a $\cos(ay)$ por 1 y a $\sin(ay)$ por cero. Esto implica que no existen flujos de masa entre la región externa y la interna, pues los flujos externo e interno se cancelan entre sí. Esto indica que el flujo de McIntyre no juega un papel importante en los movimientos medios de las partículas, para el caso de los flujos cocleares.

Antes de ver si es posible que se generen movimientos medios gracias a la presencia del esfuerzo de Reynolds, debemos considerar con más cuidado el comportamiento de las partículas que se encuentran en la frontera flexible de la región considerada, es decir de las partículas que se encuentran junto a la membrana basilar. En el análisis anterior supusimos que la velocidad media euleriana era nula en toda la región ocupada por el fluido, en particular, junto a la membrana. En el caso de ondas cocleares, sin embargo, la velocidad media lagrangiana es la que se anula, pues las partículas deben de satisfacer la condición de adherencia en dicha frontera. La velocidad de McIntyre que determinamos antes, dada por la ecuación (A.66), sigue siendo válida, pero en el caso de ondas cocleares nos da la condición de frontera de la velocidad euleriana media. Por lo tanto, para ondas cocleares las velocidades medias lagrangiana y euleriana satisfacen las condiciones

$$(\overline{u_L})_{y=0} = 0, \quad y \quad (\text{A.68})$$

$$(\overline{u_E})_{y=0} = -(\overline{u_M})_{y=0} = +\frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}}, \quad (\text{A.69})$$

sobre la membrana basilar. La segunda condición de frontera nos permitirá calcular la velocidad media euleriana en la frontera de la capa límite.

En esta sección vimos que el flujo medio de McIntyre neto se anula en el caso de propagación de ondas en la cóclea. Sin embargo, no lo demostramos en el caso general, sino sólo a primer orden. Para ver que esto es cierto en general, en la referencia [L.4] hay un argumento que se basa en notar que el vector $(\delta x, \delta y)$ es un vector solenoidal (cuya divergencia es cero), y que por lo tanto el valor de la integral $\int_V u_L dV$, donde V es el volumen entre dos planos paralelos vecinos - cuyas ecuaciones son del tipo $x = \text{constante}$ - es cero. Entonces el flujo medio que aparece en el caso de la cóclea sólo puede deberse a los términos no lineales de la ecuación de Navier-Stokes, es decir, al flujo de momento generado por la disipación de la energía de la onda que se propaga sobre la membrana. Este mecanismo de disipación se debe a la acción de la viscosidad del fluido sobre la onda, de modo que su amplitud decae abruptamente a cero poco antes de llegar a la posición característica. Entonces, ya en este punto, la amplitud de la onda es cero; esto nos indica que en esta posición toda la energía de la onda se ha disipado, por lo que el flujo medio generado por la disipación es grande en esta región y es en este lugar donde este

flujo medio tiene mayores probabilidades de general un flujo medio de volumen importante, en la dirección transversal de la cóclea. En la siguiente sección determinaremos la velocidad euleriana media dentro de la capa límite debida a los términos no lineales. La calculamos en esa región por que

- es en esta región donde el efecto de la viscosidad es importante y por lo tanto también el flujo medio.
- esta región es cercana a la membrana basilar y el flujo medio puede generar un movimiento de las células ciliares en la dirección transversal.

Usaremos la ecuación (A.69) como condición de frontera de la velocidad media euleriana sobre la membrana (en $y = 0$). Esta es la condición de frontera efectiva.

A.4 Flujo medio debido al esfuerzo de Reynolds.

Como vimos en la sección A.2 anterior, el flujo medio de McIntyre no provoca flujos de masa netos, pues los flujos de masa externo e interno tienen la misma magnitud, pero dirección contraria. Otras fuentes posibles de flujos medios son los esfuerzos de Reynolds. En esta sección determinaremos la velocidad euleriana media debida a dichos esfuerzos. Denotaremos aquí al flujo euleriano medio en la dirección (x) por $\overline{u_E}$. Calcularemos esta componente de la velocidad media y veremos después que es esta componente la que es capaz de generar un flujo de masa sustancial en la dirección (z)⁵. La ecuación (2.75) nos permite escribir a la segunda derivada parcial, con respecto a y , de la componente $\overline{u_E}$, como

$$\frac{\partial^2 \overline{u_E}}{\partial y^2} = \nu^{-1} \left[\frac{\partial \overline{u_R'^2}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{u_R'^2}}{\partial x} \right)_{ex} + \frac{\partial \overline{u_R' v_R'}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \overline{u_R' v_R'}}{\partial y} \right)_{ex} \right], \quad (\text{A.70})$$

donde u' y v' están dados por las ecuaciones (A.50) y (A.53), respectivamente. En efecto, es fácil ver que la fuerza debida al esfuerzo de Reynolds es nula cuando consideramos al flujo externo, es decir, al flujo descrito por las ecuaciones (A.48) y (A.49). En ese caso

$$\overline{u_R'^2} = \frac{1}{2} V^2 \exp(-2ay),$$

y como no depende de x , su derivada parcial con respecto a esta variable es nula. Además, usando también las ecuaciones (A.48) y (A.49), podemos fácilmente deducir que

$$\overline{u_R' v_R'} = 0,$$

⁵Es el flujo de masa en esta dirección el que sería capaz de mover las células ciliares del órgano de Corti (ver figura 3 del capítulo 3), y por lo tanto permitiría la transducción del movimiento mecánico en una señal eléctrica.

para el caso del flujo interno. Esto implica que el efecto del esfuerzo de Reynolds se encuentra confinado a la región donde la viscosidad es importante. Dentro de esta región, se puede ver que la derivada parcial con respecto a x de $u_R'^2$ es cero, pues aún dentro de la capa límite la amplitud de u' es función de y solamente. Esto se deduce de la ecuación (A.50). Entonces, si existe algún tipo de flujo euleriano medio, éste se debe a la acción de los esfuerzos de Reynolds cortantes sobre el fluido. A continuación veremos si es este el caso.

Para determinar a los esfuerzos de Reynolds cortantes, usamos las ecuaciones (A.62) y (A.64). Estas ecuaciones nos permiten escribir a $\overline{u_R'v_R'}$ como

$$\overline{u_R'v_R'} = \frac{1}{2} (AE + BF),$$

por lo que

$$\overline{u_R'v_R'} = -\frac{1}{2} \left\{ V^2 \exp(-ay) \sin(ay) + \frac{kV^2}{2a} [\exp(-2ay) + 1 - 2 \exp(-ay) \cos(ay)] \right\},$$

de donde deducimos que

$$\left(\overline{u_R'v_R'} \right)_{ex} = -\frac{1}{2} \frac{kV^2}{2a}.$$

Por ende,

$$\overline{u_R'v_R'} - \left(\overline{u_R'v_R'} \right)_{ex} = -\frac{1}{2} \left\{ V^2 \exp(-ay) \sin(ay) + \frac{kV^2}{2a} [\exp(-2ay) - 2 \exp(-ay) \cos(ay)] \right\}. \quad (\text{A.71})$$

Además, usando (A.70), tenemos

$$\int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial^2 \overline{u_E}}{\partial \eta^2}(\eta) d\eta = \nu^{-1} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\overline{u_R'v_R'} - \left(\overline{u_R'v_R'} \right)_{ex} \right](\eta) d\eta,$$

es decir,

$$\frac{\partial \overline{u_E}}{\partial \xi}(\xi) = \nu^{-1} \left[\overline{u_R'v_R'} - \left(\overline{u_R'v_R'} \right)_{ex} \right](\xi).$$

La razón por la cual calculamos únicamente la primitiva es la misma que la expuesta en el capítulo 2. A la ecuación anterior podemos integrarla nuevamente entre la frontera ($y = 0$) y una altura y dentro de la capa límite, para obtener la velocidad media en un punto arbitrario dentro de dicha región. El que escojamos como límite de integración inferior al punto correspondiente a $y = 0$ se debe a que conocemos el valor del flujo euleriano medio sobre la membrana (ecuación (A.69)). Además,

$$\nu^{-1} \int_0^y \left[\overline{u_R'v_R'} - \left(\overline{u_R'v_R'} \right)_{ex} \right](\xi) d\xi = -\frac{\nu^{-1}V^2}{2} \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{\exp(-ay)}{2a} [\cos(ay) + \sin(ay)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu^{-1}kV^2}{4a} \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{\exp(-2ay)}{2a} \right\} \\
& + \frac{\nu^{-1}kV^2}{2a} \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{\exp(-ay)}{2a} [-\cos(ay) + \sin(ay)] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.72}$$

Cuando y es grande nos encontramos en la frontera de la capa límite, y es en este lugar donde nos interesa el flujo euleriano medio. En ese caso la ecuación (A.72) se reduce a

$$-\frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}} + \frac{1}{4}V^2k\omega^{-1}.$$

Finalmente, lo anterior nos permite concluir que

$$(\overline{u_E})_{ex} = +\frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}} - \frac{V^2}{(8\nu\omega)^{1/2}} + \frac{1}{4}V^2k\omega^{-1} = \frac{1}{4}V^2k\omega^{-1}. \tag{A.73}$$

Esta velocidad euleriana media, en la frontera de la capa límite, es igual a la que se obtendría en la teoría clásica de flujo acústico, en la que se considera el efecto de una onda sonora viajera interactuando con una frontera sólida [L.4, p.574]. En efecto, para el caso de la onda sonora, tanto $\overline{u_E}$ como v son cero en $y = 0$. Como $v = 0$, las ondas cocleares dentro de la capa límite difieren únicamente por el primer término del lado derecho de (A.72); pero éste y la condición de frontera (A.69) se anulan entre sí. Por lo tanto, es lógico que hayamos obtenido el mismo resultado para los dos casos en los que hemos estudiado este fenómeno.

Supongamos ahora que la amplitud del movimiento depende de x , por lo que la condición de frontera para la velocidad vertical v es $V = V(x)$. Con esta suposición, obtenemos una contribución al flujo medio proveniente de los esfuerzos normales $\rho u_R'^2$. Usando la ecuación (A.62), podemos deducir que

$$\left(\frac{\partial \overline{u_R'^2}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u_R'^2}}{\partial x} \right)_{ex} = V \frac{dV}{dx} [\exp(-2ay) - 2 \exp(-ay) \cos(ay)]. \tag{A.74}$$

Esta última ecuación es igual a la ecuación (2.77). Además, como $V = V(x)$, v ya no es de la forma dada por la ecuación (A.53), sino que ahora

$$v = A + B, \tag{A.75}$$

con

$$\begin{aligned}
A &= V \left\{ 1 + k \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right) \right\}, \quad y \\
B &= i \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{dV}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Vemos que A es igual a la ecuación (A.53) y entonces la contribución de este término al flujo acústico es igual a la ecuación (A.73). Si además multiplicamos a B por la ecuación (A.50), obtenemos el mismo resultado que el que obtendríamos multiplicando a la ecuaciones (2.65) y (2.66) entre sí. Por lo tanto, la contribución de B es igual a la que obtuvimos en la ecuación (2.81), es decir,

$$-\frac{3}{4\omega}V\frac{dV}{dx}. \quad (\text{A.76})$$

Finalmente, concluimos que cuando V es función de (x) , el flujo euleriano medio total es simplemente la suma de las ecuaciones (A.73) y (A.76), por lo que

$$(\overline{uE})_{ex} = \frac{1}{4}V^2k\omega^{-1} - \frac{3}{4\omega}V\frac{dV}{dx}. \quad (\text{A.77})$$

Esta ecuación es una generalización del resultado clásico de la teoría de flujo acústico cuando una onda sonora viajera, tal que su amplitud depende de la dirección de propagación, interactúa con una frontera sólida de la región donde dicha onda se propaga [L.4, p.575].

Este valor del flujo acústico que hemos encontrado es el valor de dicho flujo cerca de la membrana basilar, así como cerca del punto donde la disipación de la energía es total. Este flujo acústico es el que podría generar un flujo medio de volumen en la dirección transversal de la membrana basilar, es decir, a través de la células ciliares que se encuentran sobre el plano transversal correspondiente a la posición de disipación máxima de la energía. Por otra parte, mencionamos en el capítulo 2 que el esfuerzo de Reynolds es importante en la generación de un flujo medio en la dirección longitudinal. Para ver este hecho en el caso de la membrana basilar, calcularemos a continuación el flujo medio lagrangiano $\overline{v_L}$ en la dirección vertical. Por las ecuaciones de la velocidad en el caso del flujo interno, y por las ecuaciones de u' y de v' en términos de un complejo multiplicando a un factor del tipo $\exp[i(\omega t - kx)]$, vemos que

$$\overline{v_L} = \frac{1}{2} \left[k\omega^{-1} (AE - BF) + \omega^{-1} \left(F \frac{\partial E}{\partial y} - E \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right],$$

con

$$\begin{aligned} A &= -V \exp(-ay) \sin(ay), \\ B &= -V [\exp(-ay) \cos(ay) - 1], \\ E &= V + \frac{kV}{2a} [1 - \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay)] \quad y \\ F &= \frac{kV}{2a} [-1 + \exp(-ay) \cos(ay) + \exp(-ay) \sin(ay)]. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos deducir que

$$F \frac{\partial E}{\partial y} - E \frac{\partial F}{\partial y} = kV^2 \exp(-ay) + \frac{k^2 V^2}{2a} [\exp(-2ay) + \exp(-ay) \sin(ay) - \exp(-ay) \cos(ay)],$$

y además,

$$\begin{aligned} k\omega^{-1}(AE + BF) &= -k\omega^{-1}V^2 \exp(-ay) \sin(ay) + \frac{\omega^{-1}k^2V^2}{2a} [-\exp(-2ay)] + \\ &+ \frac{\omega^{-1}k^2V^2}{2a} [2\exp(-ay) \cos(ay) - 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} k\omega^{-1}(AE + BF) + \omega^{-1} \left(F \frac{\partial E}{\partial y} - E \frac{\partial F}{\partial y} \right) &= \frac{\omega^{-1}k^2V^2}{2a} \exp(-2ay) \sin(ay) + \\ &+ \frac{\omega^{-1}k^2V^2}{2a} [\exp(-ay) \cos(ay) - 1]. \end{aligned}$$

Lo anterior indica que la velocidad media lagrangiana vertical sobre la membrana basilar es

$$\overline{v_L} \Big|_{y=0} = 0. \quad (\text{A.78})$$

Esta ecuación (A.78) indica que nuestra suposición anterior -de que podemos limitarnos a calcular la componente horizontal del flujo medio- era correcta.

En este apéndice hemos calculado el flujo medio debido al esfuerzo de Reynolds, con la aproximación de capa límite. Como dijimos en el capítulo 4, este método para calcular a dicho flujo es más fácil de interpretar, aunque en cierto sentido la solución analítica sería más correcta. En efecto, aquí hemos hecho una suposición muy fuerte. Esta suposición es de que el flujo se divide, realmente, entre un flujo interno y en uno externo. El problema con esta suposición es que en la región donde estamos calculando este flujo medio el número de onda es grande. Por lo que vimos en el capítulo 4, debemos entonces de tener una viscosidad muy pequeña. esto se debe a que, para que la aproximación de capa límite sea válida, necesitamos que κ sea pequeño. Como κ es proporcional a k e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de ν (la viscosidad cinématica), el sistema debe tener un amortiguamiento muy ligero (es decir, ν debe ser muy pequeño) para que nuestra aproximación sea válida.

El flujo acústico que determinamos aquí nos permite además determinar si dicho flujo es capaz de generar un flujo de volumen en la dirección transversal, lo cual hicimos en el capítulo 4. Dejaremos cualquier conclusión fisiológica sobre la importancia del flujo acústico y de su efecto sobre el mecanismo de transducción para trabajos posteriores. Esto se debe a la imposibilidad de comprobar, por el momento, la importancia de las conclusiones a las que llegamos en este estudio y su validez experimental.

Apéndice B

Relación de dispersión, velocidad de grupo.

Como se vió en el capítulo 2, las ondas sonoras son ondas que se propagan a velocidad constante. Dicha velocidad se define como velocidad de propagación del sonido en el medio, y su valor en el agua es de 1400ms^{-1} [M.1]. Sin embargo, otros tipos de ondas pueden propagarse en un fluido, y sus características dependen no sólo de las propiedades del fluido en cuestión y de las fronteras que lo delimitan, sino también de las aproximaciones de las ecuaciones de conservación que se están considerando. Como ejemplo de otro tipo de ondas podemos citar las ondas gravitacionales (ver apéndice C), sobre las cuales actúa la fuerza de gravedad. Un caso “particular” de las ondas gravitacionales son las ondas capilares, cuya longitud de onda es pequeña (ver el libro de Lighthill, [L.2, p225], para más detalles sobre estas ondas). Las ondas capilares son tales que la fuerza importante no es tanto la fuerza de gravedad sino la tensión superficial de la frontera libre (ver, por ejemplo, el libro [L.2, p.225] para más detalles sobre estas ondas). Para las ondas arriba mencionadas, la velocidad de propagación c ya no es constante; depende, en general, de la longitud de onda λ . La relación entre c y λ se llama relación de dispersión. También se le llama relación de dispersión a la relación entre la frecuencia ω y el número de onda k , la cual es más fácil de calcular. Una consecuencia importante de la dispersión es la aparición de una nueva velocidad distinta de c , denotada por U y conocida como velocidad de grupo.

Existen varias maneras de determinar la relación de dispersión. Consideremos primero el método clásico, que es el que se desarrolla en la mayoría de los libros (ver, por ejemplo, la referencia [S.2, p.51]). Consideremos la superposición de dos ondas monotonales propagándose en la dirección x positiva, y cuya amplitud es la misma. Suponemos, además, que el número de onda y la frecuencia de las ondas son vecinas; esta suposición es necesaria cuando consideramos que las dos ondas forman parte de un mismo grupo, o paquete de ondas.

Si $a_+ = a \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ y $a_- = a \cos(\omega_2 t - k_2 x)$, el desplazamiento sería

$$\zeta = a_+ + a_-.$$

Otra manera de escribir a $a_{\pm}$ permite expresarlas como

$$a_{\pm} = \cos \left\{ \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) x \right] \pm \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x \right] \right\},$$

por lo que $a_{\pm} = \cos(A \pm B)$, con

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) x, \quad y \\ B &= \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x. \end{aligned}$$

ζ es entonces

$$\zeta = a_+ + a_- = \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B,$$

es decir,

$$\zeta = C(x, t) \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) x \right], \quad (\text{B.1})$$

$$\text{con} \quad C(x, t) = 2a \cos \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t - \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x \right].$$

Como $\omega_1 \approx \omega_2$ y $k_1 \approx k_2$, $C(x, t)$ es una cantidad que varía muy despacio. A $C(x, t)$ se le llama amplitud de grupo [S.1, p.186], y es la amplitud de una onda cuya velocidad de propagación es $\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$. Por otro lado, la amplitud se desplaza a una velocidad $\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$, por lo que $\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$ es la velocidad de propagación del paquete de ondas. Cuando tomamos el límite $k_2 \rightarrow k_1$, definimos a una velocidad U en k_1 , como el valor de

$$U(k_1) = \lim_{k_2 \rightarrow k_1} \left(\frac{\omega(k_2) - \omega(k_1)}{k_2 - k_1} \right) = \frac{d\omega}{dk}(k_1), \quad (\text{B.2})$$

la cual es la velocidad de grupo.

En la figura B.1 se muestra la forma de ζ , (línea continua). La línea punteada representa la función $C(x, t)$. Esta función envuelve a paquetes de onda que viajan hacia la derecha con velocidad U .

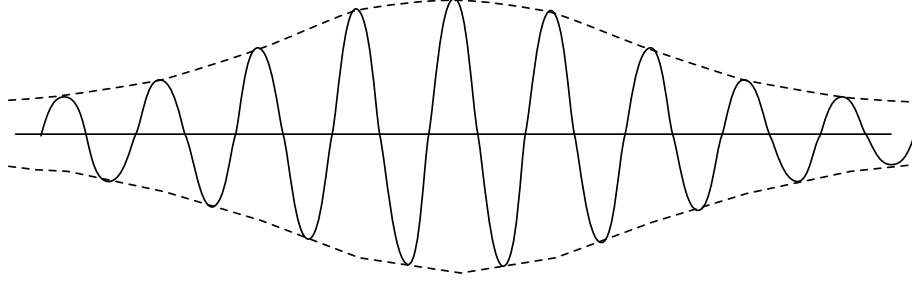


Figura B.1: Gráfica de la función ζ (línea continua). La línea punteada -la envolvente de la gráfica de ζ - es la gráfica de la amplitud $C(x, t)$ de esta función y envuelve a paquetes de ondas que viajan hacia la derecha con velocidad U .

Los nodos son los puntos donde la amplitud de la onda es cero, y en esos puntos no hay intercambio de energía entre los paquetes. Vemos que las ondas sinusoidales poseen la propiedad dispersiva, es decir, que la velocidad de propagación depende del número de onda. El efecto de la dispersión es el de provocar que una perturbación general se pueda descomponer en sus distintas componentes, las cuales se caracterizan por su número de onda. Es por ello que una superficie libre puede aproximarse localmente, por una onda sinusoidal [L.2, p.209].

Consideremos ahora el caso más general, donde no tenemos ondas superpuestas, sino una infinidad de ondas, tales que el número de onda varía gradualmente, por lo que $\omega = \omega(k)$ varía del mismo modo. Siguiendo el razonamiento de Sommerfeld escribimos al desplazamiento como

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \exp(i\alpha) dk,$$

donde ζ es en realidad la parte real de esta integral, y

$$\alpha = \omega(k)t - kx = \omega_0 t - k_0 x + (\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x.$$

Entonces $\zeta = C(x, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$, con

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \exp[i(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x] dk.$$

En este caso podemos también reducir el problema a una onda sinusoidal, cuya amplitud C depende de x y de t . Sin embargo, para que ζ defina a un paquete de ondas es necesario que C sea una función que varía gradualmente, por lo que se requiere que

$$(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x,$$

el argumento del integrando, sea aproximadamente constante. Imponiendo esa condición y diferenciando, tendríamos

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{dx}{dt},$$

y en el límite cuando Δk es muy pequeño, obtenemos la velocidad de grupo, i.e., la velocidad de propagación de la amplitud, como

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dx}{dt}.$$

Vamos ahora a usar lo expuesto anteriormente para encontrar ciertas características de los parámetros k y ω . Suponderemos ahora que el desplazamiento se escribe como

$$\zeta = D(x, t) \Re [\exp [i\alpha(x, t)]],$$

donde α es la función de fase. De modo a que ζ sea en efecto una función casi sinusoidal, por lo menos localmente, α debe de satisfacer

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -k \quad \text{y} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \omega.$$

Entonces k ya no será una constante, en general; k se define como el retraso de la fase. k solo puede definirse si α varía gradualmente; en ese caso podemos aproximar a α por su desarrollo de Taylor a segundo orden, es decir

$$\alpha \approx \alpha(x_0, t_0) - k_0(x - x_0) + \omega_0(t - t_0), \quad \text{y.}$$

Como α varía lentamente, consideramos que se cumple

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial t}.$$

Entonces k y ω deben ser tales que

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Pero si $\omega = \omega(k)$, $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial x}$, y tenemos

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \text{con} \quad U = \frac{d\omega}{dk}.$$

En el caso en que ω dependa también de la posición, podemos definir a la velocidad de grupo como

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

entonces $U \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}$. Además, se sigue cumpliendo que $\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, por lo que $U \frac{\partial k}{\partial t} = -U \frac{\partial \omega}{\partial x}$. En este caso tenemos una ecuación parcial de primer orden para ω dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Esta ecuación es fácil de resolver usando el método de características. En efecto, cuando

$$\frac{dx}{dt} = U,$$

tenemos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Por lo tanto, ω es constante sobre curvas en el plano (x, t) que satisfagan $\frac{dx}{dt} = U$. En el caso de la cóclea esta conclusión es muy importante, pues en ese caso consideramos que la frecuencia de la onda es una constante -debido a que el estímulo es una onda monotonal. Además, la figura 3.14 del capítulo 3 nos indicó que la velocidad de grupo de la onda tendía a cero conforme nos acercábamos a la posición característica de la onda. Por lo tanto, son las propiedades mecánicas de la cóclea las que provocan que se detenga la onda en la posición característica.

Apéndice C

Ondas gravitacionales en un canal. Consideraciones generales sobre energías medias.

En este apéndice consideraremos primero ondas propagándose sobre la superficie de un canal cuya profundidad h es arbitraria y constante. Supondremos que la única fuerza que actúa sobre el fluido es la fuerza de gravedad y consideraremos el problema bidimensional. Sin embargo, consideraremos la aproximación lineal de la ecuación de conservación de momento. También consideraremos que el fluido es irrotacional, por lo que $\vec{u} = \nabla\phi$. Entonces ϕ es solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{C.1}$$

dentro de la región ocupada por el fluido. si consideramos que la compresibilidad del fluido es muy pequeña podemos suponer que la ecuación de continuidad es $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Por otro lado, cuando la superficie está en reposo, la presión a una distancia $-y$ de dicha superficie esta dada por la suma de la presión atmosférica y de la presión hidrostática debida al agua [L.2, p.94], y entonces

$$p_0 = p_a - \rho_0 g. \tag{C.2}$$

Si ahora perturbamos la superficie, ésta ya no se encuentra en $y = 0$, sino a una altura $y = \zeta(x, t)$. En una sección transversal (con x fija), la presión sería ahora la suma de la presión del fluido en reposo y de la presión p_e debida a la perturbación, es decir,

$$p = p_0 + p_e.$$

Pero $p = p_a$ cuando $y = \zeta$, por lo que se deduce que

$$p_e = \rho_0 g \zeta \quad (\text{C.3})$$

Por otro lado, en el capítulo 1 (flujo acústico) determinamos la ecuación de conservación de momento tal que

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_e}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.4})$$

por lo que

$$p_e = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (\text{C.5})$$

Igualando las dos relaciones que encontramos para p_e , vemos que en la superficie libre se debe de satisfacer la condición

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=\zeta} = -g\zeta. \quad (\text{C.6})$$

Esta condición puede relajarse para el caso de perturbaciones pequeñas y considerarse en $y = 0$. Para ver una justificación detallada de esto se puede consultar la referencia [S.2, pp.19-22]. Otra condición de frontera proviene de la continuidad de la velocidad en la superficie libre: la velocidad $\vec{u}$ del fluido en la frontera es igual a la derivada total con respecto al tiempo de ζ , por lo que

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta = (u_y)_{y=\zeta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=\zeta}. \quad (\text{C.7})$$

Pero $\vec{u} \cdot \nabla \zeta$ es un término pequeño y también aproximamos la condición en $y = 0$, obteniéndose

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{sobre } y = 0. \quad (\text{C.8})$$

Finalmente, nos falta la condición de frontera en $y = -h$, donde h es la profundidad. Esta frontera es sólida por lo que no depende del tiempo; en dichas fronteras, la componente normal de la velocidad se anula [S.2, p.11]. Entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{si} \quad y = -h. \quad (\text{C.9})$$

En resumen, debemos de resolver el problema:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{en} \quad -h \leq y \leq 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{en} \quad y = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h. \quad (\text{C.12})$$

La condición en $y = 0$ se deduce de las dos condiciones (C.6) y (C.8) que teníamos antes sobre esta frontera.

Resolveremos el problema proponiendo una solución ϕ separable y además tal que sea sinusoidal en la dirección x :

$$\phi(x, y; t) = \Phi(y) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (\text{C.13})$$

Por lo anterior Φ es solución del sistema

$$\Phi''(y) - k^2 \Phi(y) = 0 \quad \text{en} \quad -h \leq y \leq 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\Phi'(-h) = 0. \quad (\text{C.15})$$

La condición en $y = 0$ es más complicada y la estudiaremos después.

La solución de la ecuación (C.14) del sistema anterior se escribe, en forma general, como

$$\Phi(y) = A \exp(-ky) + B \exp(ky). \quad (\text{C.16})$$

La condición en $-h$ nos va a dar una condición relacionando a las dos constantes A y B . Dicha condición se obtiene derivando a $\Phi(y)$ e igualando a cero, dando como resultado

$$A \exp(kh) = B \exp(-kh). \quad (\text{C.17})$$

Para simplificar la forma de $\Phi(y)$, igualamos las dos constantes $A \exp(kh)$ y $B \exp(-kh)$ a $1/2\Phi_0$, y reemplazando en $\Phi(y)$,

$$\Phi(y) = \Phi_0 \left\{ \frac{\exp[k(y+h)] + \exp[-k(y+h)]}{2} \right\} = \Phi_0 \cosh[k(y+h)]. \quad (\text{C.18})$$

La condición en $y = 0$ nos va a permitir encontrar la relación de dispersión para el caso de ondas gravitacionales. De hecho,

$$\text{en } y = 0 : \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{C.19})$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \phi = -g \Phi'(0) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (\text{C.20})$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \Phi = -g \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} \Phi \quad (\text{C.21})$$

$$\Rightarrow \left[\omega^2 - g \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} \right] \Phi = 0. \quad (\text{C.22})$$

Esta relación debe de cumplirse para todo $(x, y; t)$. Por lo tanto se debe de satisfacer

$$\omega^2 = g \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} = g \frac{\Phi_0 k \sinh(kh)}{\Phi_0 \cosh(kh)} = gk \tanh(kh). \quad (\text{C.23})$$

Es importante constatar que las ondas de gravedad son un ejemplo de ondas dispersivas, pues c depende de λ como

$$c = \frac{\omega}{k} = [gk^{-1} \tanh(kh)]^{1/2} = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \right]^{1/2}. \quad (\text{C.24})$$

En la figura se muestra la forma que tiene la función anterior. También se muestran las funciones a las cuales converge c para λ pequeño y para λ grande. Estas funciones son $\left(\frac{gh}{2\pi}\right)^{1/2}$ y $(gh)^{1/2}$, respectivamente.

La velocidad de grupo (del apéndice B) se define como

$$V = \frac{d\omega}{dk}, \quad (\text{C.25})$$

pero si $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{d}{dk} = \frac{d\lambda}{dk} \frac{d}{d\lambda}$ y $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{2\pi\lambda^2}{(2\pi)^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$, por lo que

$$V = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \left[-\frac{2\pi}{\lambda^2} c + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dc}{d\lambda} \right].$$

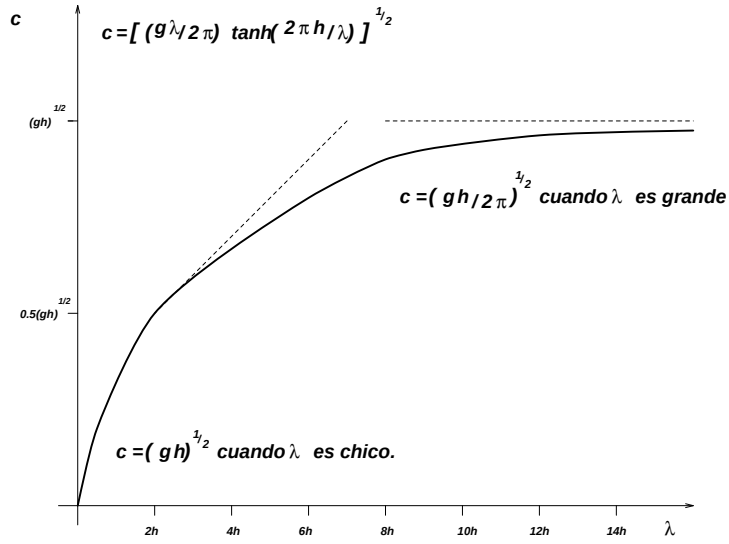


Figura C.1: Velocidad de fase c de la onda dada como función de la longitud de onda λ de la misma.

Finalmente, concluimos que

$$V = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (\text{C.26})$$

Por la definición de V , es más sencillo obtener a ω como función de k y graficar dicha función. Entonces V es simplemente la pendiente de la curva obtenida.

Antes de determinar a V para el caso de las ondas de gravedad, vamos a ver algunas propiedades del movimiento del fluido. Determinamos anteriormente el potencial de velocidades como

$$\Phi = \Phi_0 \cosh[k(y + h)] \exp[i(\omega t - kx)], \quad (\text{C.27})$$

y las componentes horizontal u y vertical v de la velocidad serían entonces

$$\begin{aligned} u &= -ik\Phi_0 \cosh[k(y + h)] \exp[i(\omega t - kx)], \\ v &= k\Phi_0 \sinh[k(y + h)] \exp[i(\omega t - kx)]. \end{aligned}$$

Siguiendo el razonamiento de A. Sommerfeld, integramos con respecto al tiempo las ecuaciones anteriores para obtener el desplazamiento horizontal ξ y el vertical η , respectivamente. Las constantes de integración se deben de anular para que se preserve la periodicidad de la solución, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{k}{\omega} \Phi_0 \cosh[k(y + h)] \exp[i(\omega t - kx)], \\ \eta &= -\frac{ik}{\omega} \Phi_0 \sinh[k(y + h)] \exp[i(\omega t - kx)]. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{\omega} \Phi_0 \cosh[k(y+h)], & y \\ b &= \frac{k}{\omega} \Phi_0 \sinh[k(y+h)].^4 \end{aligned}$$

Como ξ y η son en realidad la parte real de cada una de las ecuaciones del sistema anterior, deducimos que

$$\xi = -a \cos(\omega t - kx) \quad (\text{C.28})$$

$$\eta = b \sin(\omega t - kx), \quad (\text{C.29})$$

donde a y b están dadas por (C.28) y (C.28), respectivamente. La trayectoria de las partículas se obtiene eliminando a t de las expresiones (C.28) y (C.29), de modo que

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \quad (\text{C.30})$$

La ecuación anterior es la ecuación de una elipse, cuyos ejes a y b se relacionan por ¹

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} = \tanh[k(y+h)] &= \tanh(kh) \quad \text{si } y = 0, \\ &= 0 \quad \text{si } y = -h. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

y cuya excentricidad

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{k\Phi_0}{\omega} \quad (\text{C.32})$$

no depende de la profundidad considerada.

En el límite en que la profundidad es muy grande, cerca de la superficie -o relativamente cerca, de modo que y sea pequeño con respecto a h - $\frac{b}{a}$ sería

$$\frac{b}{a} \approx \tanh(\infty) = 1. \quad (\text{C.33})$$

En el caso de agua profunda, las partículas siguen una trayectoria circular. Los radios de dicho movimiento serían

$$a = \frac{k}{\omega} \Phi_0 \cosh[k(y+h)] = \frac{k\Phi_0}{\omega} \cosh(kh) [\cosh(ky) + \sinh(ky) \tanh(kh)], \quad (\text{C.34})$$

¹En el caso en que λ es pequeño $\tanh(kh) \approx kh \ll 1$ en $y = 0$, y $\frac{b}{a} = 0$ en $y = -h$. Entonces en ese caso el movimiento es casi horizontal, pues $b \ll a \forall y$.

cuando h es grande, es decir cuando $\tanh(kh) \approx 1$, y por ende

$$a = \frac{k\Phi_0}{\omega} \cosh(kh) \exp(ky). \quad (\text{C.35})$$

Lo mismo encontraríamos para b considerando la misma aproximación. Por lo tanto, el radio de la trayectoria circular de las partículas decrece exponencialmente, conforme la profundidad y considerada aumenta. Además, cuando tomamos a $\Phi_0 = 2B \exp(-kh)$ -por definición de Φ_0 - la dependencia de a con respecto a h puede despreciarse, pues

$$\Phi_0 \cosh(kh) = B[1 + \exp(-2kh)] \approx B, \quad (\text{C.36})$$

cuando h es grande. Entonces a es simplemente

$$\frac{kB}{\omega} \exp(ky), \quad (\text{C.37})$$

por lo que decae exponencialmente como función de la profundidad.

Es importante constatar que las ondas gravitacionales son un ejemplo de ondas dispersivas, donde c depende de λ , o de k . c es simplemente

$$c = \frac{\omega}{k} = [gk^{-1} \tanh(kh)]^{1/2} = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \right]^{1/2} \quad (\text{C.38})$$

Ahora vamos a calcular la velocidad de grupo U para este tipo de ondas.

Como

$$\frac{d}{dk}(\omega^2) = 2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)}, \quad (\text{C.39})$$

y $c = \frac{\omega}{k}$,

$$\frac{U}{c} = \frac{gk}{2\omega^2} \left[\tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh^2(kh)} \right]. \quad (\text{C.40})$$

Por lo tanto

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{kh}{\sinh(kh) \cosh(kh)} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]. \quad (\text{C.41})$$

Vemos que U es aproximadamente igual a c sólo para el caso de agua poco profunda, en el que h es pequeño y el segundo término de la cantidad en corchetes de la fórmula anterior es aproximadamente igual a 2.

Vamos ahora a determinar la constante α tal que, si $h > \alpha\lambda$, el error cometido al aproximar a c por su forma para agua profunda sea menor que 3% . Esto quiere decir que queremos que

$$\left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} \tanh^{1/2} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) - \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{-1/2} = \tanh^{1/2} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right),$$

sea tal que

$$1 - 0.03 < \tanh^{1/2} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) < 1,$$

o

$$0.97 < \tanh^{1/2} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) < 1.$$

Como la función $x^{1/2}$ es creciente, la desigualdad anterior es equivalente a

$$0.9409 < \tanh \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) < 1.$$

Si $h = \alpha\lambda$ y $\tanh \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) = \tanh(\alpha) = 0.9409$, entonces,

$$\alpha = 0.278. \quad (\text{C.42})$$

Por las propiedades de la función $\tanh(x)$, basta con que tomemos $2\pi > 0.28\lambda$ para que el error cometido al aproximar a c por el valor $\left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}$ que toma para agua profunda sea a lo más de 3% [L.2, p.216].

Vamos ahora a estudiar las energías cinética y potencial, por unidad de area horizontal para el caso h grande. Para un flujo irrotacional, la energía cinética puede escribirse como

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iiint_R (\vec{u})^2 dR = \frac{\rho}{2} \iiint_R \nabla \phi \cdot \nabla \phi dR. \quad (\text{C.43})$$

Además, como $\nabla^2 \phi = 0$, podemos sumarle el término $\phi \nabla^2 \phi = 0$ al integrando de la ecuación (C.43). Y Como

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot [\phi (\nabla \phi)],$$

usando el teorema de la divergencia obtenemos a E_k de la forma

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (\text{C.44})$$

es decir, como una integral sobre la frontera del fluido. En el caso de ondas en agua, en $y = -h$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, por lo que la integral anterior se reduce a una integral sobre la superficie libre - en el caso de la aproximación lineal. Por lo anterior, la energía cinética, por unidad de área horizontal, puede escribirse como [L.2, p.213]

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{1}{2} \rho k^{-1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{C.45})$$

Entonces

$$E_k = \frac{1}{2} \rho k^{-1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{C.46})$$

Determinemos ahora el exceso de energía potencial para ondas en agua, por unidad de area horizontal. Esta energía potencial se escribe como $(E_p)_\zeta = \int_{-h}^{\zeta} \rho g y \, dy = \frac{1}{2} \rho g (\zeta^2 - h^2)$ y para $\zeta = 0$,

$$(E_p)_{\zeta=0} = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2.$$

Por lo que

$$\Delta E_p = -\frac{1}{2} \rho g h^2. \quad (\text{C.47})$$

Esta es la forma de la energía potencial, pues sabemos son diferencias de energía potencial las importantes para el movimiento.

Por las ecuaciones (C.46) y (C.47), vemos que para ondas en agua profunda podemos considerar al desplazamiento ζ de la superficie libre como una coordenada generalizada, a ρg como una rigidez generalizada, y a ρk^{-1} como una masa generalizada. En efecto si calculamos los promedios en un periodo, tanto de E_k como de E_p , tenemos que

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} \rho k^{-1} \left\langle \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \frac{\rho k}{2} \Phi_0^2 \langle \exp \left[2i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \rangle,$$

y

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} \rho g \left\langle \frac{1}{g^2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=0} \right]^2 \right\rangle = \frac{\rho}{2g} \omega^2 \Phi_0^2 \langle \exp \left[2i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \rangle.$$

Una condición para que $\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle$ es que $\omega^2 = \frac{\rho g}{\rho k^{-1}} = gk$, la cual se cumple para ondas en agua profunda. Siguiendo un razonamiento análogo para ondas a una profundidad arbitraria obtendríamos un resultado análogo. De hecho, si la relación de dispersión en un sistema en vibración se puede escribir

$$\omega^2 = \frac{\text{rigidez generalizada}}{\text{inercia generalizada}}, \quad (\text{C.48})$$

entonces probaremos que las energías cinética y potencial medias son iguales entre sí.

En efecto, siguiendo un razonamiento análogo al anterior, podemos llegar a las mismas conclusiones para agua cuya profundidad es arbitraria, es decir que $\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle$ y que

$$\langle E \rangle = \langle E_p \rangle + \langle E_k \rangle = 2\langle E_p \rangle.$$

En efecto, en el caso en que h es arbitrario,

$$\phi = 2B \exp(-kh) \cosh[k(y+k)] \exp[i(\omega t - kx)].$$

Usando la condición (C.6) podemos determinar ζ , dando como resultado

$$\zeta = \frac{\omega}{g} 2B \exp(-kh) \cosh(kh) \sin(\omega t - kx). \quad (\text{C.49})$$

Por lo que

$$E_p = \frac{1}{2} g \rho \zeta^2 = \frac{2}{g} \rho \omega^2 B^2 \exp(-2kh) \cosh^2(kh) \sin^2(\omega t - kx). \quad (\text{C.50})$$

Por otra parte, de (C.49) podemos determinar $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Además, en este caso $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} \phi$, por lo que la energía cinética, en este caso, se escribe como

$$E_k = \frac{1}{2} \rho [k \tanh(kh)]^{-1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2,$$

es decir,

$$E_k = \rho k B^2 \exp(-2kh) \sinh(2kh) \cos^2(\omega t - kx). \quad (\text{C.51})$$

De (C.50) y (C.51) podemos deducir que

$$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle = \frac{\rho}{2} k B^2 \exp(-2kh) \sinh(2kh), \quad (\text{C.52})$$

si $\omega^2 = \frac{\text{Rigidez}}{\text{Inercia}} = gk \tanh(kh)$, que es exactamente el valor dado en (C.23), y también que

$$E = \langle E \rangle = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = \rho k B^2 \exp(-2kh) \sinh(2kh). \quad (\text{C.53})$$

Vamos ahora a demostrar que U , la velocidad de grupo, es la velocidad de propagación de la energía. Para ello necesitamos determinar el flujo de energía a través de una superficie S dada. Sea R la región que ocupa el fluido considerado, tal que S es su frontera. Siguiendo el razonamiento de Stoker [S.2, p.47-54], tenemos que la energía dentro de la región R está dada por

$$E = \rho \iiint_R \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gy \, dx \, dy \, dz. \quad (\text{C.54})$$

Pero la ecuación de Navier-Stokes, para el caso en que el fluido es irrotacional, incompresible e invíscido y cuando la fuerza externa es la fuerza de gravedad, se escribe como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\hat{y}, \quad (\text{C.55})$$

donde $\hat{y}$ es el vector unitario en la dirección y . Pero $\vec{u} = \nabla \phi$ y $g\hat{y} = \nabla(gy)$. Además, es fácil ver que

$$(\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi).$$

Entonces la ecuación (C.55) se puede expresar en función de ϕ como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gy = 0 \quad (\text{C.56})$$

A la ecuación (C.56) se le conoce como *ecuación de Bernoulli*. A partir de ella podemos reescribir a (C.54) como

$$E = - \iiint_R \left(p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz. \quad (\text{C.57})$$

Entonces el flujo de enegía por unidad de tiempo, $\frac{dE}{dt}$, es

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint_R (p + \rho \phi_t)_t \, dx \, dy \, dz - \iint_S (p + \rho \phi_t) v_n \, dS,$$

donde v_n es la componente normal de la velocidad de S . Suponiendo que p no depende del tiempo,

$$\iiint_R (p + \rho\phi_t)_t \, dx \, dy \, dz = \rho \iiint_R \phi_x \phi_{xt} + \phi_y \phi_{yt} + \phi_z \phi_{zt} \, dx \, dy \, dz = \rho \iiint_R \nabla \phi \cdot \nabla \phi_t \, dV,$$

es decir,

$$\iiint_R (p + \rho\phi_t)_t \, dx \, dy \, dz = \iint_S \phi_t \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS,$$

donde ϕ_n es la componente de la velocidad del fluido tomada en la dirección de la normal a S y cuyo sentido es hacia afuera de R .

Entonces

$$\frac{dE}{dt} = \iint_S \rho \phi_t (\phi_n - v_n) - p v_n \, dS. \quad (\text{C.58})$$

Nos interesa el caso en que S es una superficie geométrica fija de la forma $x = \text{constante}$. En este caso $v_n \equiv 0$ y el flujo de energía a través de esta superficie es

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{x = \text{constante}} = \rho \int_{-h}^0 \phi_t \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dy. \quad (\text{C.59})$$

Si ϕ es una onda progresiva de la forma

$$\phi = \Phi(y, z) \exp[i(\omega t - kx)]$$

entonces $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x}$, y (C.59) se escribe como

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{-h}^0 c \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \, dy. \quad (\text{C.60})$$

El signo se debe a que R se encuentra a la izquierda de S , por lo que el flujo de energía de una onda progresiva propagándose hacia la derecha hace que disminuya la energía dentro de R . La ecuación (C.60) determina el flujo de energía por unidad de tiempo. Para el caso de ondas en agua,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2kB \exp(-kh) \cosh[k(y + h)] \sin(\omega t - kx),$$

por lo que

$$\frac{dE}{dt} = -2c\rho B^2 k^2 \exp(-2kh) \left[\frac{\sinh(2kh) + 2kh}{2k} \right] \sin^2(\omega t - kx), \quad y \quad (\text{C.61})$$

$$\left| \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \right| = \frac{c\rho B^2 k^2 \exp(-2kh)}{2k} [\sinh(2kh) + 2kh]. \quad (\text{C.62})$$

Comparando a la ecuación (C.62) con (C.53) y (C.41), vemos que

$$\left| \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \right| = U E, \quad (\text{C.63})$$

lo que nos permite concluir que U , la velocidad de grupo, es también la velocidad de propagación de la energía.

Concluimos este apéndice demostrando que para vibraciones en general la energía cinética promedio es igual a la energía potencial media. Consideramos que el movimiento puede expresarse como una superposición de ondas del tipo

$$\xi = A(y, z) \cos(\omega t - kx). \quad (\text{C.64})$$

Entonces definimos a una rigidez generalizada $s(x, k)$ y a una inercia generalizada, $m(x, k)$, tales que

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} s \xi^2, \quad y \\ E_k &= \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \xi^2 &= A^2 \cos^2(\omega t - kx) \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 &= \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Remplazando los valores anteriores en las definiciones de las energías potencial y cinética, y determinando el promedio sobre un periodo de las mismas, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle E_p \rangle &= \frac{s A^2}{4}, \quad y \\ \langle E_k \rangle &= \frac{m \omega^2 A^2}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las energías medias son iguales cuando se satisface la condición

$$\omega^2 = \frac{s}{m}. \quad (\text{C.65})$$

Además, podemos escribir al promedio de una superposición de movimientos del tipo (C.64) como una superposición de promedios, por lo que el resultado (C.65) sigue siendo válido. Este

resultado es muy importante pues la mayoría de los movimientos pueden escribirse como una superposición de movimientos del tipo (C.64), es decir, como una serie de Fourier. En particular, consideramos que nuestro problema es de este tipo, por lo que se aplican los resultados aquí obtenidos. También es posible demostrar que la descripción en términos de flujo de energía es equivalente a estudiar el problema usando el método WKB. Una demostración detallada de esto puede encontrarse en el capítulo 11 del libro de Whitham [W.2, pp.384-403], por lo que es correcto el procedimiento utilizado para encontrar el flujo acústico en el problema de la cóclea.

Finalmente, es importante aclarar que es posible demostrar que la velocidad de propagación de la energía sigue siendo la velocidad de grupo U . La demostración de lo anterior es un poco tediosa. Recomendamos consultar el libro de Lighthill, referencia [L.2].

Bibliografía

- [A.1] Abramowitz, M, Stegun, I. A., eds, **Handbook of Mathematical Functions**. Dover Publications, Inc., New York, 1964.
- [B.1] Batchelor, G.K., **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967.
- [B.2] Békésy, G. von, **Experiments in Hearing**. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1980.
- [C.1] Courant, R., John, F., **Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II**. Springer-Verlag, 1989.
- [C.2] Currie, I. G., **Fundamental Mechanics of Fluids**. Second Edition, McGraw Hill, Inc., 1974.
- [D.1] Dowling, A.P., Ffowcs Williams, J.E., **Sound and Sources of Sound**. Ellis Horwood Limited, 1983.
- [F.1] Frick, H., Starck, D., Leonhardt, H., Ruano, G. D., Falgueras, E. R., **Manual de anatomía humana II**. Edición española. Ediciones Omega, S. A., Barcelona, 1981.
- [F.2] Fung, Y.C., **A First Course in Continuum Mechanics**. Prentice Hall Inc., 1994.
- [I.1] Irving, J., Mullineux, N., **Mathematics in Physics and Engineering**. Primera edición, Academic Press Inc., 1959.
- [H.1] **El Hombre**. Edición en Lengua castellana. Círculo de Lectores, S. A., 1985.
- [H.2] Hinze, J.O., **Turbulence**, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., 1975.
- [H.3] Huxley, A.F., *Is resonance posible in the cochlea after all?*. Nature, vol. 221, March 8, 1969.
- [L.1] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., **Fluid Mechanics**. Second edition. Course on Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press, 1987.

- [L.2] Lighthill, J., **Waves in Fluids**. Cambridge University Press, First published: 1978.
- [L.3] Lighthill, J., *Acoustic Streaming*, Journal of Sound and vibration (1978) **61**(3), p. 391-418.
- [L.4] Lighthill, J., *Acoustic Streaming in the Ear Itself*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 239, 1992, p. 551-606.
- [L.5] Lighthill, J., *Energy Flow in the Cochlea*. Journal of Fluid Mechanics (1981), vol. 106, p. 149-213.
- [L.6] Lighthill, J., *Biomechanics of Hearing Sensitivity*. Journal of Vibration and Acoustics, 113, 1, 1991.
- [M.1] Morse, P.M., Ingard, K. U., **Theoretical Acoustics**. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1968.
- [Q.1] Quiroz Gutiérrez, F., **Anatomía Humana**. Tratado de Anatomía humana, Tomo III, tercera edición. Editorial Porrúa, S.A., 1959.
- [R.1] Rhode, W. S., *Observations of the Vibration of the Basilar Membrane in Squirrel Monkeys using the Mössbauer Technique*. Journal Acoustic Society of America, vol. 49, No. 4, 1971, p. 1218-1231.
- [S.1] Sommerfeld, A., **Mechanics of Deformable Bodies**. Academic Press, Inc., 1950.
- [S.2] Stoker, J.J., **Water Waves**. Second Edition. John Wiley and Sons, Inc., 1992.
- [V.1] Voldřich, L., *Mechanical Properties of the Basilar Membrane*, Acta Otolaryngologica 86, p. 331-335.
- [W.1] Watson, G.N., **A Treatise on the Theory Bessel Functions**. Cambridge University Press, 1966.
- [W.2] Whitham, G.B., **Linear and Nonlinear Waves**. John Wiley and Sons, 1974.