

Agradecimientos

Antes que nada quisiera agradecer a mi familia (grande y chiquita) por todo. A ellos está dedicada esta tesis.

Un agradecimiento especial es para el Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS por su apoyo en múltiples ocasiones y más que nada por brindarme la oportunidad de aprender y seguir aprendiendo. En particular al Dr. Jorge Ize pues, indudablemente, tuvo mucho que ver en mi decisión de estudiar Matemáticas Aplicadas. También quisiera mencionar al Dr. Arturo Vargas pues siempre estuvo dispuesto a ayudarme y, más que nada, por su sentido práctico. Al Dr. Antomaría Minzoni le agradezco esos escasos pero tremendamente jugosos minutos.

En la Facultad de Ciencias tuve la oportunidad de encontrar un medio para escapar de las garras de La Ciencia. Éste era el CCC. De ahí adquirí la mala costumbre de andar consultando carteleras para saber que hay en el cine. Una mención especial a Marcelino y Mercedes Perelló por revolverme la cabeza hasta quedar exhausto, y aun así disfrutarlo.

Hay por ahí desperdigado un grupo de frenéticos individuos con los que tuve la fatalidad de encontrarme, éste es la banda. A ellos les debo conebencia y diversión de antología mientras durante y después de dedicar muchas horas de talachas en la cafetería o en el ya mítico San Nicolás. Sin ellos no hubiera soportado mucho tiempo con algunos de los citados en los párrafos anteriores.

A mis escuchas: Vanesa, Carlos, Ramón, Maru, Fanny, Mónica y Eli, pues supieron combinar pláticas soporíferas con banquetes, aplicando la máxima “con la barriga llega se piensa menos” . A Ernesto, Julia y Toña les agradezco los asilos. En particular a Ernesto

esas oportunidades de tratarnos bien y fino. A la Cervecería Modelo por tantas tardes-noches-madrugadas coronadas con la victoria. Y a la comparsa culinaria por darme cosas de que hablar.

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo que describe la evolución de ondas rodantes. Estas ondas se observan en canales con fondo plano. El modelo consiste en un estudio del perfil de la superficie del agua descrita mediante la aproximación para aguas someras, además se le agrega un término proporcional al cuadrado de la velocidad, con el objeto de aproximar la pérdida de energía debido a la fricción con las paredes. El sistema de ecuaciones así obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales cuasilineal para la velocidad u y el perfil h del agua. El análisis lineal muestra que las ondas rodantes se producen debido a la inestabilidad generada cuando el número de Froude es mayor que dos ($F > 2$). Esta inestabilidad provoca que las condiciones iniciales periódicas evolucionen hacia una solución discontinua (salto hidráulico). Mediante un análisis de dos escalas de tiempo se encuentran las ecuaciones que describen evolución de la amplitud para el caso ligeramente inestable. Finalmente se encuentran el perfil y la velocidad del salto hidráulico en el caso ligeramente inestable relacionándolos con las condiciones iniciales.

Índice

Introducción	7
Capítulo 1. Construcción del modelo	11
<i>Sección 1.1. Introducción</i>	11
<i>Sección 1.2. El modelo de aguas someras</i>	12
1.2.1 Ecuaciones de conservación	12
1.2.2 Teorema de Helmholtz	16
1.2.3 Condiciones de frontera	18
1.2.4 Aproximación para ondas largas	19
1.2.5 Relación entre las ecuaciones de gas ideal y aguas someras	23
<i>Sección 1.3. El coeficiente de Chézy</i>	24
<i>Sección 1.4. Las ecuaciones constitutivas</i>	26
Capítulo 2. Evolución de condiciones iniciales	33
<i>Sección 2.1. Estudio lineal</i>	33
<i>Sección 2.2. Estudio por el método de dos escalas de tiempo</i>	40
Capítulo 3. El salto hidráulico	53
<i>Sección 3.1. Relaciones para el problema completo</i>	53

<i>Sección 3.2. Relaciones en la aproximación por perturbaciones</i>	63
Conclusiones	71
Apéndice I	73
Apéndice II	81
Bibliografía	85

Introducción

*Overhead the albatross hangs motionless upon the air.
And deep beneath the rolling waves,
in labyrinths of coral caves.
The echo of a distant tide.
Comes willowing across the sand
And everything is green and submarine...*

Waters, Wright, Mason, Gilmour.

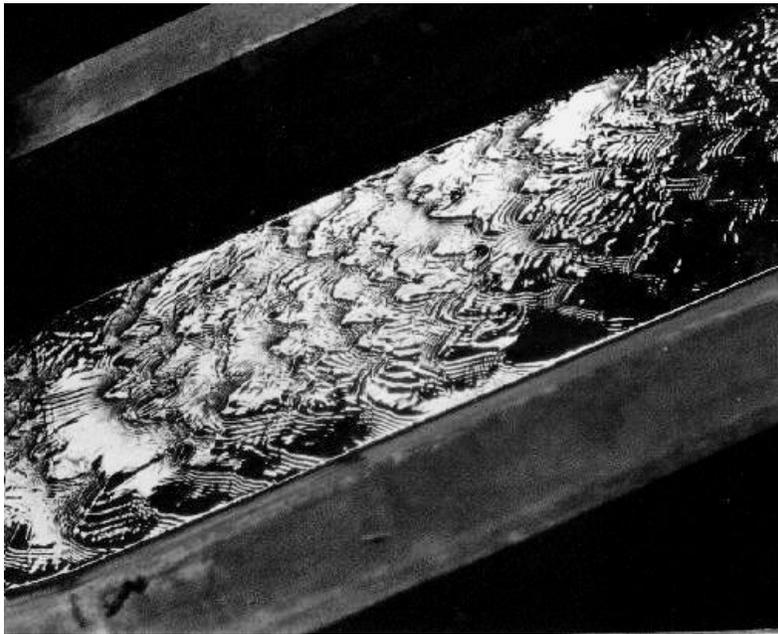


Figura 1. *Ondas rodantes en un canal. En este caso las ondas se mueven de derecha a izquierda.*

Infinidad de fenómenos se producen en el agua. Una mirada a la superficie de un

lago nos despierta la curiosidad sobre la multitud de efectos observados. Algunos efectos interesantes se producen al observar flujos en ríos y canales. El fenómeno a estudiar en este trabajo recibe el nombre de ondas rodantes y se presentan al deslizar agua sobre un plano inclinado (Figura 1).

En 1903 Vaughan Cornish [C] fotografió y describió este comportamiento en su libro. Las ondas rodantes consisten en pequeñas protuberancias que se forman en la superficie del agua. Estas avanzan más rápido que el flujo. Las perturbaciones avanzan hacia abajo formando líneas perpendiculares a la dirección de propagación. Además, Cornish notó que se propagaban a distancias regulares entre sí.

Este fenómeno depende de la rugosidad del suelo del canal, pues en un fondo de grava no aparecían, mientras que en un piso de cemento (liso) se forman, crecen y se mantienen. En 1949 Robert F. Dressler planteó el problema como una serie de saltos hidráulicos distribuidos periódicamente a lo largo del eje x ; en este caso se supone que el canal tiene fondo plano y recto (ver Dressler [D]). La reproducción en laboratorio de estas ondas muestra un hecho más: la velocidad de las ondas rodantes es mayor cuanto mayor sea la altura que tengan las ondas además que al encontrarse dos de éstas coalescen formando una ola rodante más rápida y más grande (ver Mayer [M]). A pesar de la aparente estabilidad en el perfil, el flujo ciertamente dista de ser uniforme. Las observaciones del fenómeno señalan el siguiente comportamiento en el flujo dentro de la ola (Figura 2).

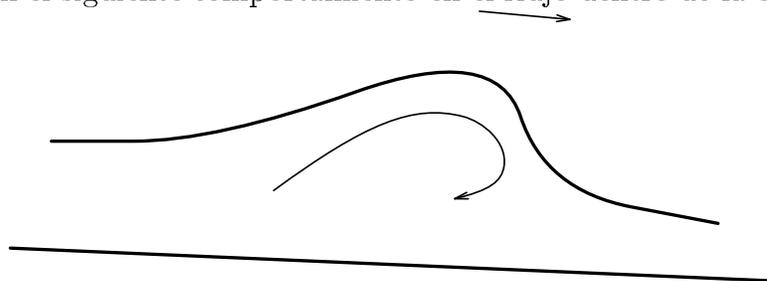


Figura 2. *Flujo dentro de la onda rodante*

Las ondas rodantes se producen en aguas poco profundas comparadas con la longitud de éstas y el ancho del canal, sin embargo llegan a desbordar canales diseñados para transportar esa cantidad de líquido pero considerando que el flujo es uniforme; además, generan esfuerzos no deseados sobre las paredes (ver Stoker [S]).

El estudio de el fenómeno en este trabajo se basa en un modelo conocido como de aguas someras, al que se le agrega un término hidráulico de disipación de energía atribuido a la viscosidad. Se considerarán condiciones iniciales periódicas con el fin de aproximar la regularidad en la distribución de las ondas. Mediante este modelo se planea relacionar las condiciones iniciales periódicas y continuas con la velocidad y el tamaño del perfil de las ondas rodantes, así como el estado estacionario final de éstas, es decir de los saltos hidráulicos. Dadas las características citadas anteriormente se usará un modelo de aguas poco profundas (modelo no viscoso) al que se le agregará un término hidráulico que represente la pérdida de energía debida a la fuerza viscosa.

En el capítulo 1 se explica en qué consiste y cuáles son las hipótesis del modelo de aguas someras. En él se explican las características de un flujo de este tipo así como las hipótesis hidráulicas involucradas al considerar la disipación de energía debida a la viscosidad. Esta hipótesis considera que la disminución del momento en el flujo de agua debido a la viscosidad se comporta proporcionalmente al cuadrado de la velocidad. Esta suposición es usual en Hidráulica y es una aproximación propuesta por Antoine Chézy hace más de dos siglos. Posteriormente, se deduce el sistema de ecuaciones que describen tanto el perfil como la velocidad para el flujo en un plano inclinado, considerando condiciones iniciales periódicas, además de encontrar las soluciones para flujo uniforme. La velocidad sólo dependerá de las coordenadas (x, t) , por lo que la altura h define el perfil de la onda rodante. No se describe el comportamiento turbulento del fenómeno. Finalmente, se define

el número de Froude F , parámetro adimensional, que relaciona la componente horizontal de la fuerza gravitacional con la fuerza “viscosa” debida a la disipación de energía.

En el capítulo 2 se estudia la evolución del sistema de ecuaciones cuasilineal, primero mediante un estudio lineal. En este estudio se encuentra el valor de la constante F a partir del cual el sistema se vuelve inestable para tiempos largos. Este fenómeno de inestabilidad define el crecimiento de una perturbación inicial de tal manera que modela la evolución de la onda rodante. En la sección (2.2) se plantea un estudio basado en el método de dos tiempos para una inestabilidad pequeña $0 < F - 2 = \alpha\epsilon$. Al exigir soluciones acotadas para tiempos largos se eliminan los términos cuya amplitud crece indefinidamente (términos seculares). Las relaciones así encontradas definen la evolución tanto de la amplitud de la onda como de la velocidad del flujo.

En el capítulo 3 se describen las características del salto hidráulico para el problema completo, tal y como se definió en el capítulo 1. Basándose en el símil con las ecuaciones constitutivas del gas ideal politrópico (ver Landau y Lifshitz [L]) se definirá la solución periódica discontinua del modelo, tanto la velocidad del salto como las ecuaciones que definen el perfil y la distribución de velocidades. Posteriormente, se encuentran las mismas relaciones que definen el salto hidráulico, pero para la aproximación obtenida mediante el método de dos escalas de tiempo, encontrando de manera explícita las relaciones entre las condiciones iniciales, la velocidad y el perfil del salto hidráulico.

Finalmente, se presentan las conclusiones relativas a este estudio. Es necesario mencionar que el presente trabajo está basado en el artículo de Kevorkian y Yu [K-Y]: *Nonlinear evolution of small disturbances into roll waves in an inclined open channel*.

Capítulo 1

Construcción del Modelo

*I told you about strawberry fields,
you know the place where nothing is real,
well here's another place you can go,
where everything flows...*

Lennon, McCartney.

1.1 Introducción

En este capítulo se establecerán las ecuaciones constitutivas que describen la evolución del perfil del agua en un plano inclinado. Por una parte, se plantea el modelo de aguas someras. Esto simplifica enormemente el problema, aunque sigue siendo un problema no lineal. El modelo de aguas someras es un modelo en que el flujo se considera no viscoso e incompresible además de establecer la fuerza gravitacional como única fuerza volumétrica. Al eliminar la viscosidad se está despreciando la disipación. Se definen las ecuaciones de conservación de masa y momento para el sistema, así como la condiciones de frontera e iniciales. La aproximación de ondas largas permite considerar que la presión es hidrostática; posteriormente, se deduce la aproximación del campo de velocidades \mathbf{v} para ondas largas. Entonces se agregará al modelo el coeficiente de Chézy, coeficiente hidráulico que aproxima la pérdida de momento debido a la fricción producida en las paredes. Se

deducen las ecuaciones constitutivas y se encontrará la solución correspondiente a un flujo estacionario. Dada la regularidad en la distribución de los saltos, señalada por Dressler [D], se considerará que las condiciones iniciales para el perfil h y la velocidad de u consisten en funciones periódicas con el mismo período.

1.2 El Modelo de Aguas Someras

1.2.1 Ecuaciones de Conservación

Se considera un elemento de fluido V_0 . La hipótesis del continuo consiste en considerar que este elemento es pequeño en comparación con las dimensiones del sistema, aunque no tan pequeño como para compararse con el camino libre medio entre dos partículas. La masa del fluido que sale del volumen V_0 por unidad de tiempo es

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie S y \mathbf{v} es la velocidad del fluido $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

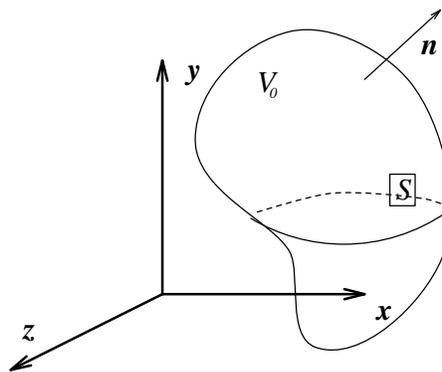


Figura 3. Elemento de fluido V_0 . La disposición de ejes en la figura será la misma para todo el trabajo

El flujo de agua es igual a la masa que sale a través de la superficie S por unidad de

tiempo. Es decir

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV,$$

entonces la conservación de masa (si no hay fuentes o sumideros de masa) se escribe como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho \, dV = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.2.1)$$

Esta ecuación también es conocida como la ecuación de continuidad.

Si el volumen es fijo con respecto al tiempo, usando el teorema de la divergencia se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2.2)$$

En el caso del agua, la densidad será considerada constante en todo el espacio y en el tiempo. En consecuencia la ecuación de conservación de masa deriva en la condición siguiente (en coordenadas cartesianas).

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = u_x + v_y + w_z = 0. \quad (1.2.3)$$

Los subíndices representan las derivadas parciales.

En la deducción de las ecuaciones de conservación de momento no se consideran los términos viscosos. Es decir, el tensor de esfuerzos tiene todos sus términos fuera de la diagonal iguales a cero (ver Batchelor [B]). Por lo tanto, en el modelo de aguas someras no hay disipación por fricción. Se considera, además, que no hay flujo de energía debido a la conducción térmica. En otras palabras el sistema es isentrópico. Los términos de la diagonal en el tensor de esfuerzos representan fuerzas en la dirección normal interior a la superficie S que rodea el volumen V_0 (fuerzas compresivas), por lo que las fuerzas superficiales sobre el elemento de fluido corresponden únicamente a la presión.

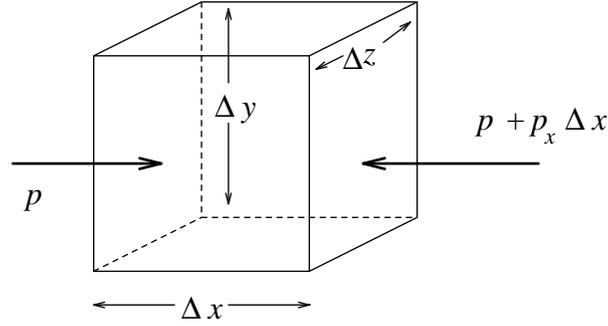


Figura 4. Fuerzas superficiales sobre un cubo de lados $\Delta x, \Delta y$ y Δz .

La ecuación de movimiento se obtiene usando la segunda ley de Newton. Al tomar un elemento de fluido con caras paralelas a los ejes coordenados obtenemos en la dirección x la ecuación siguiente

$$[-(p + p_x \Delta x) + p] \Delta y \Delta z + F_1 \rho \Delta x \Delta y \Delta z = \rho a_1 \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1.2.4)$$

donde p es la presión. El vector $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ representa la fuerza externa volumétrica por unidad de masa y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ denota a la aceleración. Tanto \mathbf{F} como \mathbf{a} son funciones que dependen de \mathbf{x} y t . Al tomar el límite $\Delta V \rightarrow 0$ la relación (1.2.4) se encuentra

$$-p_x + \rho F_1(x, y, z, t) = \rho a_1(x, y, z, t). \quad (1.2.5a)$$

De manera análoga se calculan las ecuaciones de movimiento para las otras dos coordenadas

$$-p_y + \rho F_2(x, y, z, t) = \rho a_2(x, y, z, t), \quad (1.2.5b, c)$$

$$-p_z + \rho F_3(x, y, z, t) = \rho a_3(x, y, z, t),$$

que en su forma vectorial se escriben como

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \mathbf{F} = \mathbf{a}. \quad (1.2.6)$$

La fuerza volumétrica que vamos a considerar es la fuerza gravitacional $\mathbf{F} = (0, -g, 0)$ donde g es la aceleración debida a la gravedad.

Las ecuaciones de movimiento describen las trayectorias de una partícula (esta es la definición del sistema de coordenadas lagrangiano). Se considera conveniente transformar la ecuación (1.2.5) al sistema euleriano $(u, v, w; t)$. En el sistema de coordenadas euleriano las variables a observar son las componentes del vector velocidad $\mathbf{v}=(u, v, w)$ y el tiempo t .

Supóngase que $G = G(x, y, z; t)$ es una función que depende de la posición y el tiempo; dado que $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es la trayectoria de la partícula, entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = (u, v, w).$$

Usando la regla de la cadena se encuentra que la derivada de G con respecto al tiempo corresponde a

$$\frac{dG}{dt} = G_x \dot{x} + G_y \dot{y} + G_z \dot{z} + G_t = G_x u + G_y v + G_z w + G_t. \quad (1.2.7)$$

En particular se obtiene la expresión para la componente a_1 de la aceleración

$a_1 = \frac{du}{dt} = uu_x + vu_y + wu_z + u_t$. De manera análoga se calculan las expresiones para a_2 y a_3 .

En consecuencia la ecuación (1.2.5) se escribe en variables eulerianas como

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -\frac{1}{\rho} p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -\frac{1}{\rho} p_y - g, \\ u_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

El sistema (1.2.3) y la ecuación (1.2.8) conforman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales incompleto para u, v, w, ρ y p . Falta establecer las condiciones iniciales y de frontera, además, del comportamiento de la presión. En la sección (1.2.4) se describirán estas condiciones y se planteará el comportamiento de la presión. Antes de definir estas condiciones es conveniente simplificar el problema mediante el Teorema de Helmholtz.

1.2.2 Teorema de Helmholtz

La circulación $\Gamma(t)$ del campo de velocidades \mathbf{v} se define como (ver Courant y John [C-J])

$$\Gamma(t) = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, dl = \oint_C (u \, dx + v \, dy + w \, dz),$$

donde \mathbf{T} es la tangente a C . La curva C es una curva cerrada dada por $\mathbf{x}(\sigma, t)$ con σ tal que $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(1, t)$ ($0 \leq \sigma \leq 1$). Al fijar σ , \mathbf{x} define la posición de una partícula de la curva Γ . Es decir, la circulación está dada en forma lagrangiana. Debido a la parametrización, la tangente a la curva Γ es tal que $\mathbf{T} = \mathbf{x}_\sigma$. Al derivar con respecto al tiempo se observa que

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \int_0^1 (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{T}}) \, d\sigma. \quad (1.2.9)$$

Esta ecuación se reescribe al sustituir $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{F} = (0, -g, 0) = -\text{grad}(gy)$ en la relación (1.2.5) y usando el hecho que $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{v}_\sigma$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \text{grad}(p) - g \mathbf{T} \cdot \text{grad}(y) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\sigma \right] \, d\sigma \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\rho} p_\sigma - g y_\sigma + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})_\sigma \right] \, d\sigma = 0, \end{aligned}$$

pues \mathbf{v} , ρ e y coinciden al evaluar en $\sigma = 0$ y $\sigma = 1$ (ρ y g son constantes). Por lo tanto $\Gamma(t)$ es constante, en esta última relación consiste el teorema de Helmholtz.

Al considerar en las condiciones iniciales a un fluido en reposo, se tiene el caso en que $\Gamma(t) = 0$ para todo el tiempo y para cualquier curva cerrada. De esta última condición se infiere que †

$$\text{rot}(\mathbf{v}) = 0. \quad (1.2.10)$$

Por lo que el campo vectorial \mathbf{v} es el gradiente de una función potencial $\phi = \phi(x, y, z, t)$,
y

$$\mathbf{v} = \text{grad}(\phi) = (\phi_x, \phi_y, \phi_z). \quad (1.2.11)$$

La función ϕ está dada por la integral de línea

$$\phi(x, y, z, t) = \int (u \, dx + v \, dy + w \, dz).$$

Al considerar que el flujo es irrotacional en la ecuación de continuidad se obtiene que ϕ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0. \quad (1.2.12)$$

Es decir ϕ es una función armónica. Además, el potencial de velocidades permite que las ecuaciones (1.2.8) tomen la forma

$$\text{grad}(\phi_t) + \frac{1}{2} \text{grad}(u^2 + v^2 + w^2) = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \text{grad}(gy).$$

Al integrar esta última relación obtenemos una versión de la ecuación de Bernoulli

$$\phi_t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t), \quad (1.2.13)$$

† Otra deducción de la irrotacionalidad del fluido puede encontrarse en Landau y Lifshitz [L]

donde $C = C(t)$ no depende de las variables espaciales.

Dado que al sumar una función de t la ecuación (1.2.13) no se altera, se puede agregar un término a la función potencial sin cambiar la estructura de las ecuaciones de conservación antes citadas. De hecho es posible definir

$$\phi = \phi^* + \int^t C(\xi) d\xi,$$

con ϕ^* es una función armónica. Al plantear este potencial la ecuación (1.2.13) pierde el término $C(t)$. Por lo que podemos suponer que $C(t) = 0$ sin que se pierda generalidad.

Las ecuaciones (1.2.12) y (1.2.13) son las ecuaciones de movimiento del nuestro fluido; sólo falta determinar las condiciones de frontera e iniciales, además del comportamiento de la presión.

1.2.3 Condiciones de Frontera

Una de las fronteras del fluido a estudiar es la superficie de éste, que se denotará por S . La condición de frontera en S exige que las partículas que se encuentran sobre la superficie permanezcan ahí. Se describirá la superficie por una función $\zeta(x, y, z; t) = 0$, por lo que al considerar la relación (1.2.7) se obtiene la condición en S (ver Stoker [S])

$$\frac{d\zeta}{dt} = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z + \zeta_t = 0. \quad (1.2.14)$$

La ecuación (1.2.14) se puede reescribir al tomar en cuenta que el vector $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$ es normal a la superficie. Aquí \mathbf{n} es el vector normal a la superficie libre S definido como $\mathbf{n} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z) / (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)^{1/2}$ (ver Courant y John [C-J])

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}}. \quad (1.2.15)$$

Esta es la condición de frontera. En el caso de un canal, el fondo está fijo, así como las paredes, en consecuencia

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en las paredes y el fondo.} \quad (1.2.16)$$

La altura y de la superficie libre se puede definir como una función de x, z y t

$$y = \eta(x, z; t), \quad (1.2.17)$$

por lo tanto, en la superficie $\zeta = y - \eta = 0$ cumple con la ecuación (1.2.14)

$$\phi_x \eta_x - \phi_y + \phi_z \eta_z + \eta_t = 0, \quad \text{en } y = \eta, \quad (1.2.18)$$

y la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$g\eta + \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \frac{p}{\rho} = 0. \quad (1.2.19)$$

En esta última expresión $p = p(x, y, z; t)$. Hay que notar que las relaciones (1.2.17) y (1.2.18) son no lineales para η y ϕ pues $\phi = \phi(x, \eta, z; t)$.

1.2.4 Aproximación para ondas largas

Dado que los frentes de ondas se mueven en líneas rectas perpendiculares a la dirección de flujo río abajo, se considerará que tanto la función ϕ como la función η no dependen de la coordenada Z^\dagger . Entonces el perfil obtenido en $Z = 0$ será el mismo para todo el ancho del canal. Por lo tanto, $\phi = \phi(X, Y; T)$ satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones dentro del fluido (ver la ecuación (1.2.12))

$$\Delta \Phi = \Phi_{XX} + \Phi_{YY} = 0. \quad (1.2.20)$$

[†] En esta sección se usarán mayúsculas para las coordenadas $(X, Y, Z; T)$ y la función Φ , ya que se adimensionalizarán las ecuaciones.

La ecuación de Bernoulli (1.2.13) se expresa entonces

$$gY + \Phi_t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} = 0, \quad (1.2.21)$$

ya que se exige que $\Phi_Z = w = 0$. La superficie del fluido está definida por $Y_s = H\eta(X/L_0, T/T_0)$ (ver figura 5). L_0 es la longitud de la onda, así como T_0 es el período de la misma.

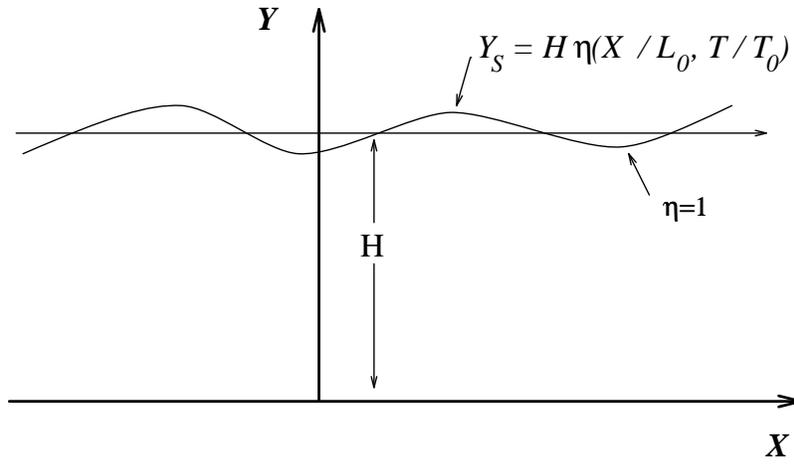


Figura 2. Perfil del fluido

El canal tiene el fondo plano, horizontal; la altura para el fluido en reposo es H . En consecuencia la condición de frontera para el fondo es (ecuación (1.2.16))

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial Y} \Phi(X, 0, T) = 0, \quad (1.2.22)$$

Para la superficie $Y_s = H\eta(X, T)$ la condición (1.2.18) indica que

$$H \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \eta}{\partial X} - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} + H \frac{\partial \eta}{\partial T} = 0. \quad (1.2.23)$$

Dado que en la superficie libre la presión debida al fluido es cero, la ecuación de Bernoulli para la superficie será

$$gH\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = 0 \quad \text{en } Y = H\eta. \quad (1.2.24)$$

Las condiciones iniciales corresponden a una perturbación en la superficie con amplitud A y la longitud característica L_0

$$H\eta\left(\frac{X}{L_0}, 0\right) = Ah\left(\frac{X}{L_0}\right), \quad (1.2.25)$$

con velocidad inicial cero

$$\Phi(X, Y, 0) = 0. \quad (1.2.26)$$

Al introducir las variables adimensionales

$$x = \frac{X}{L_0}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad t = \frac{VT}{L_0} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\Phi}{VL_0}; \quad (1.2.27)$$

en la ecuación de Bernoulli se obtiene la relación entre las constantes L_0 , H y V . Esta es la velocidad característica

$$V = \sqrt{gH}. \quad (1.2.28)$$

En consecuencia la ecuación de Laplace toma la forma

$$\delta^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (1.2.29)$$

donde $\delta = H/L_0$. Las condiciones de frontera son las siguientes

$$\phi_y(x, 0; t) = 0 \quad \text{en el fondo}, \quad (1.2.30)$$

mientras que en la superficie libre se satisface

$$\phi_y(x, \eta; t) = \delta^2 [\eta_t + \phi_x(x, \eta; t)\eta_x], \quad (1.2.31)$$

además la ecuación de Bernoulli para la superficie libre es

$$\phi_t(x, \eta, t) + \frac{1}{2}[\phi_x^2(x, \eta; t) + \phi_y^2(x, \eta; t)] + \eta = 0. \quad (1.2.32)$$

Las condiciones iniciales se escriben como

$$\begin{aligned}\phi(x, y, 0) &= 0, \\ \eta(x, 0) &= \frac{A}{H}h(x).\end{aligned}\tag{1.2.33}$$

Al considerar que las ondas son mucho más largas que la altura H se pide que $\delta \ll 1$. Aquí δ es el parámetro alrededor del cual se aproximará la ecuación elíptica por medio de perturbaciones alrededor de δ . La expansión asintótica para ϕ es (ver Kevorkian, Cole [K-C])

$$\phi(x, y; t; \delta) = \alpha(\delta) \left\{ \phi_0(x, y; t; \delta) + \delta^2 \phi_1(x, y; t; \delta) + \delta^4 \phi_2(x, y; t; \delta) + O(\delta^6) \right\}.$$

Donde $\alpha(\delta)$ es la amplitud de la función ϕ . Ésta se fija por las condiciones iniciales. En esta aproximación la condición de frontera relativa al fondo determina nuestra solución. Por lo que al exigir que la expansión se elimine término a término para cada orden de δ se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_{0yy} &= 0; & \phi_0 &= \varphi_0(x; t) \\ \phi_{1yy} &= -\phi_{0xx}; & \phi_1 &= \varphi_1(x; t) - \frac{y^2}{2}\varphi_{0xx}(x; t) \\ \phi_{2yy} &= -\phi_{1xx}; & \phi_2 &= \varphi_2(x; t) - \frac{y^2}{2}\varphi_{1xx}(x; t) + \frac{y^4}{24}\varphi_{0xxxx}(x; t).\end{aligned}$$

En consecuencia las expansiones correspondientes a las velocidades u y v serán

$$u = \phi_x = \alpha \left\{ \begin{aligned} &\varphi_{0x} + \delta^2 \left(\varphi_{1x} - \frac{y^2}{2}\varphi_{0xxx} \right) \\ &+ \delta^4 \left(\varphi_{2x} - \frac{y^2}{2}\varphi_{1xxx} + \frac{y^4}{24}\varphi_{0xxxx} \right) + O(\delta^6) \end{aligned} \right\}$$

y

$$v = \phi_y = \alpha \left\{ -\delta^2 y \varphi_{0xx} + \delta^4 \left(-y \varphi_{1xx} + \frac{y^3}{6} \varphi_{0xxxx} \right) + O(\delta^6) \right\}.$$

Entonces, para la primera aproximación, la velocidad para ondas largas es paralela al fondo del canal, debido a la condición de frontera en el fondo. Por lo que se considerará,

a partir de este momento, que la velocidad \mathbf{v} sólo depende de u . Este razonamiento es análogo a considerar que el promedio de la componente de la velocidad v sobre las coordenadas x, y, z, t , son iguales a cero; también se considera a $u(x, t)$ como el promedio de $u(x, y, z, t)$ sobre y y z . Cabe notar que, al considerar $w = 0$ el flujo en esa dirección es cero lo que simplifica el problema a estudiar. El que la condición de frontera en el fondo domine la solución para $\delta \ll 1$ es análogo a considerar que la curvatura de la onda es pequeña. Sólo falta definir la presión para tener cerrado el problema. Debido a que los términos correspondientes a la aceleración en el eje y (ecuación (1.2.8, b)) son de orden δ^2 , el lado izquierdo de ésta es cero en la aproximación para orden 1 al considerar el caso ondas largas, por lo tanto en esta ecuación la presión queda definida como la hidrostática.

1.2.5 Relación entre las ecuaciones de gas ideal y aguas someras

Considérese que para aguas someras la presión es hidrostática

$$p = g\rho(\eta - y). \quad (1.2.34)$$

Donde $\eta = \eta(x, t)$ es la función que define la superficie libre. Entonces $p_x = g\rho\eta_x$, no depende de y . En consecuencia la ecuación de movimiento (1.2.8) es ($u_y = u_z = 0$)

$$u_t + uu_x = -g\eta_x.$$

Esto concuerda con los resultados obtenidos en la subsección anterior. Por lo tanto la velocidad u sólo depende de (x, t) . Se introducirá la densidad por altura $\bar{\rho}$ definida como

$$\bar{\rho} = \rho\eta.$$

La densidad ρ antes definida puede variar con respecto al tiempo y la posición. Además, se define a la presión por altura como

$$\bar{p} = \int_0^\eta p \, dy.$$

Por la relación (1.2.34) se encuentra

$$\bar{p} = \int_0^\eta g\rho(\eta - y) dy = \frac{g\rho}{2}\eta^2 = \frac{g}{2\rho}\bar{\rho}^2.$$

Es decir las funciones \bar{p} y $\bar{\rho}$ mantienen una relación de la forma

$$\bar{p} = A\bar{\rho}^\gamma,$$

donde $A = g/2\rho$ y $\gamma = 2$. Esta relación corresponde al de un gas ideal politrópico con constante adiabática γ igual a 2. En este sistema el análogo a la velocidad del sonido es la velocidad de propagación a entropía S constante (ver Landau [L])

$$\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}}\right)_S = \mathbf{c}^2 = \frac{g}{\rho}\bar{\rho} = g\eta.$$

Entonces

$$\mathbf{c} = \sqrt{g\bar{H}},$$

\mathbf{c} es la velocidad de propagación de una perturbación en aguas someras. Dado que la superficie η depende de (x, t) , la velocidad de propagación de una perturbación depende de x y t .

Tal y como sucede para gases ideales, el comportamiento del flujo difiere esencialmente para el caso en que la velocidad u sea mayor o menor que \mathbf{c} . De manera análoga al de flujos compresibles, si el flujo tiene velocidad $u > \mathbf{c}$ se le llama flujo supercrítico y el caso $u < \mathbf{c}$ corresponde al caso subcrítico.

1.3 El Coeficiente de Chézy

Hasta este momento se ha considerado que el flujo no es viscoso, lo que permite simplificar enormemente el problema. Sin embargo, no se puede diseñar un conducto para

transportar agua sin considerar la pérdida de energía asociada a la fricción con las paredes del canal, es decir la producida por los esfuerzos cortantes. Conforme fue desarrollándose la Hidráulica nació la necesidad de modelar estas pérdidas de alguna manera. Dado que el comportamiento del agua (y en general de cualquier fluido) es difícil de estudiar, las fórmulas deducidas para estos problemas son para flujos donde la altura de la columna, el área transversal del canal y la velocidad u son constantes para todo x y t , así como la pendiente del canal. La condición de velocidad constante puede interpretarse de tal manera que la velocidad promedio tanto en el tiempo como a lo largo del canal es constante. El tipo de flujos que se acaba de plantear difícilmente se encuentra en la vida diaria, sin embargo los resultados obtenidos en la práctica producen soluciones satisfactorias para los problemas hidráulicos.

Dado que en este caso se considera que el flujo es uniforme, las únicas fuerzas involucradas en el eje x son la correspondientes a la componente horizontal de la aceleración gravitacional (el canal está inclinado) y la debida a la fricción en las paredes y el fondo del canal. Éstas deben de estar en equilibrio. Debido a la uniformidad en los factores físicos del problema, la resistencia dependerá de la velocidad del flujo (ver Chow [Ch]).

En general los cálculos de velocidad media en el flujo uniforme se expresan en la forma

$$V = CR^\kappa s^v,$$

donde V es la velocidad media, $R = A/P$ es el radio hidráulico definido como el área A del canal dividida entre el perímetro mojado, s es la pendiente del canal y κ, v son exponentes. C es el factor de resistencia. Para el flujo, este factor depende de la viscosidad, rugosidad, etc. Existen una multitud de fórmulas de este tipo, de entre éstas relaciones las de Chézy y de Manning son las más usadas.

En 1769 Antoine Chézy propuso la primera aproximación que describe la disipación debida a la viscosidad en un flujo uniforme, con el objeto de diseñar un canal de abastecimiento de agua para la ciudad de París. Esta fórmula fue deducida experimentalmente y se expresa como

$$V = k\sqrt{Rs},$$

donde k es el coeficiente de Chézy. Esta relación describe la dependencia de la velocidad media con respecto al radio hidráulico R y la pendiente s . Para obtener esta fórmula, Chézy supuso que la disipación es proporcional al cuadrado de la velocidad CV^2 con $C = 1/k$ (ver Chow [Ch]). Esta es la aproximación que se usará para describir la disipación debida a la rugosidad. Los valores de C pueden encontrarse en tablas para rugosidades diversas, por lo que la constante C puede ser especificada para un arreglo experimental dado.

En este trabajo se utilizará esta fórmula para flujo uniforme, aunque obviamente en el fenómeno real el flujo se encuentra lejos de ser uniforme. Este tipo de suposiciones ha sido útil durante más de 200 años demostrando su validez como aproximación.

1.4 Las ecuaciones constitutivas

Una vez especificadas las características físicas del modelo de aguas someras se plantearán las ecuaciones de conservación de masa y la ecuación de evolución del momento para el caso de un plano inclinado como el de la figura 6.

El canal tiene forma rectangular con un ancho B_0 e inclinación s , constantes. La superficie del fluido se denotará por $H = H(X, T) = H_0(X/L_0, T/T_0)$ y la velocidad (horizontal) del fluido es $U = U(X, T)$ †. L_0 es la longitud típica de la onda y T_0 es el período típico de la misma. Por lo tanto, el cambio en la masa en el volumen contenido

† Una vez más se usan mayúsculas antes de adimensionalizar el sistema.

entre los planos X_1 y X_2 es el flujo a través del plano X_1 y el plano X_2 (ver Kevorkian [K])

$$B_0 \rho \frac{d}{dT} \int_{X_1}^{X_2} H dX = B_0 \rho (HU)|_{X_2}^{X_1}. \quad (1.4.1)$$

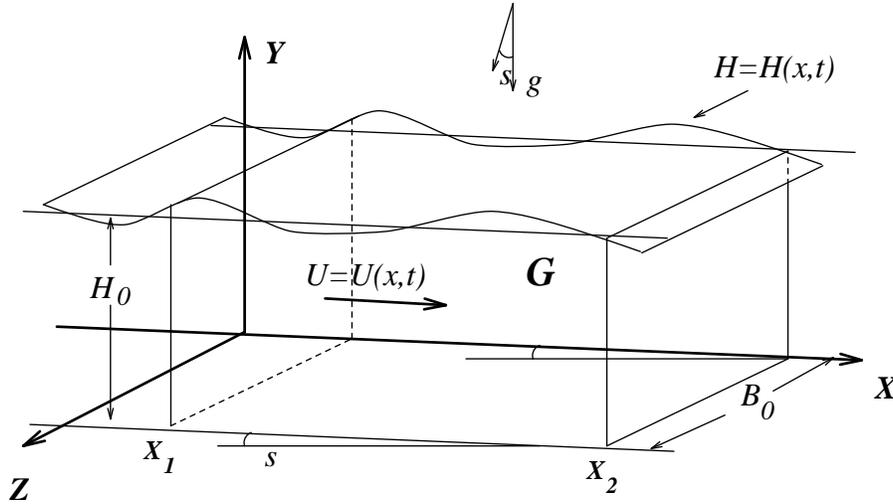


Figura 1. Plano inclinado. La región G está delimitada por los planos X_1 , X_2 , $Z = 0$, $Z = B_0$ y Y_0 ; además de la superficie libre $H = H(x, t)$.

Para encontrar la ecuación de movimiento en X se considerará el cambio en el momento total de la región G (ver figura 6)

$$\frac{d}{dT} \int_{X_1}^{X_2} B_0 H \rho U dX,$$

el flujo de momento a través de los planos X_1 y X_2 (dS es el elemento de superficie en estos planos). Dado que la velocidad es paralela al fondo del canal, ésta se puede escribir como $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$; \mathbf{n} es la normal sobre los planos. Entonces el flujo de momento es

$$\iint \rho U \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} dS = (\rho U^2 H B_0)|_{X_2}^{X_1}.$$

La contribución debida a la presión hidrostática en las paredes $X = X_1$ y X_2

$$\left\{ \int_0^H \rho g B_0 \cos s (H - Y) dY \right\} \Big|_{H=H(X_2, T)}^{H=H(X_1, T)} = \rho g B_0 \cos s \frac{H^2}{2} \Big|_{X_2}^{X_1}.$$

Al inclinar el canal debemos tomar en cuenta la componente sobre el eje X del peso de la región G

$$\int_{X_1}^{X_2} g \rho H B_0 \operatorname{sen} s dX.$$

Debido a que un factor importante es la rugosidad, se introducirá un término de disipación hidráulico donde la fuerza debida a la fricción por unidad de área es proporcional al cuadrado de la velocidad (coeficiente de Chézy) $-CU^2$. Es decir, la disipación debida a la rugosidad es

$$- \int_{X_1}^{X_2} \rho C (B_0 + 2H) U^2 dX.$$

Al reunir todos estos términos y eliminando los factores comunes la ecuación de conservación de momento queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \int_{X_1}^{X_2} HU dX + \left(U^2 H + g \cos(s) \frac{H^2}{2} \right) \Big|_{X_1}^{X_2} &= \int_{X_1}^{X_2} g H \operatorname{sen}(s) dX \\ &- \int_{X_1}^{X_2} C \left(1 + 2 \frac{H}{B_0} \right) U^2 dX. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Al observar el lado izquierdo de la ecuación (1.4.2) se puede notar que el caso $s = 0$ es la aproximación de aguas someras para un plano horizontal. El término $gH \operatorname{sen}(s)$ es la componente horizontal de la aceleración debida a la gravedad. En conclusión las fuerzas externas se encuentran del lado derecho de la igualdad. En el caso de estacionario la componente horizontal de la fuerza de gravedad y el término de disipación se anulan. Este caso corresponde a un flujo uniforme $U = U_0$, $H = H_0$ con U_0 , H_0 constantes;

$$\int_{X_1}^{X_2} C \left(1 + 2 \frac{H_0}{B_0} \right) U_0^2 dX = \int_{X_1}^{X_2} g H_0 \operatorname{sen}(s) dX, \quad \text{para todo } (X, T).$$

Por lo tanto

$$U_0 = \left\{ \frac{gH_0 \operatorname{sen} s}{C(1+2\sigma)} \right\}^{1/2},$$

con $\sigma = H_0/B_0$. Si se considera que el canal es muy ancho comparado con la profundidad, es decir $\sigma \ll 1$

$$U_0 = \left(\frac{gH_0 \operatorname{sen}(s)}{C} \right)^{1/2}, \quad (1.4.3)$$

y la H_0 correspondiente

$$H_0 = \frac{CU_0^2}{g \operatorname{sen}(s)}.$$

Se usará H_0 como escala vertical del modelo. Es conveniente transformar el sistema a variables adimensionales

$$x = \frac{X}{L_0}, \quad u = \frac{U}{V_0}, \quad h = \frac{H}{H_0} \quad \text{y} \quad t = \frac{T}{T_0}.$$

Por lo que la ecuación (1.4.1) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx = (hu)|_{x_2}^{x_1}. \quad (1.4.4)$$

Aquí obviamente $V_0 = L_0/T_0$. La ecuación de conservación del momento es

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hu \, dx + \left(u^2 h + \frac{h^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{F^2} \int_{x_1}^{x_2} u^2 (1+2\sigma h) \, dx - \int_{x_1}^{x_2} h \, dx = 0. \quad (1.4.5)$$

De esta ecuación surge la relación

$$V_0 = (gH_0 \cos(s))^{1/2}, \quad (1.4.6)$$

que permite relacionar L_0 y H_0 mediante $L_0 = H_0/\tan(s)$. Si el ángulo s es pequeño se está aproximando para ondas largas.

La F es un parámetro adimensional, llamado número de Froude ($F > 0$)

$$F^2 = \frac{\tan(s)}{C} = \frac{U_0^2(1 + 2\sigma)}{gH_0 \cos(s)}. \quad (1.4.7)$$

Para el caso del canal ancho $\sigma \ll 1$ la ecuación (1.4.5) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hu \, dx + \left(u^2 h + \frac{h^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{u^2}{F^2} - h \right) dx = 0, \quad (1.4.8)$$

y al aproximar $\cos s \sim 1$ el número de Froude al cuadrado es

$$F^2 = \frac{U_0^2}{gH_0}. \quad (1.4.9)$$

Si u y h son funciones continuas, con primeras derivadas continuas, las ecuaciones se reescriben usando el teorema fundamental del cálculo (ver Courant y John [C-J])

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + \left(u^2 h + \frac{h^2}{2} \right)_x &= h - \frac{u^2}{F^2}. \end{aligned} \quad (1.4.10a, b)$$

La ecuación (1.4.10a) permite simplificar (1.4.10b) quedando el sistema como

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + h_x &= 1 - \frac{u^2}{hF^2}. \end{aligned} \quad (1.4.11a, b)$$

Expresando este último sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & h \\ 1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{u^2}{hF^2} \end{pmatrix}. \quad (1.4.12)$$

Este es el sistema a estudiar en el resto del trabajo. Falta por establecer las condiciones iniciales del problema, ya que la condición de frontera en el fondo plano especifica que la velocidad es paralela al eje x . Se considerará que en $t = 0$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f_0(x), \\ u(x, 0) &= g_0(x), \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

con f_0, g_0 funciones continuas y periódicas con período $2l$.

La ecuación (1.4.12) es de la forma $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(u, h)\mathbf{u}_x = \mathbf{f}$ con

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ 1 & u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{u^2}{hF^2} \end{pmatrix}. \quad (1.4.14a, b, c)$$

Por lo tanto \mathbf{u} satisface una ecuación diferencial cuasilineal.

El lado derecho de la ecuación (1.4.12) representa el balance entre la fuerza de gravedad y la disipación ($\sim u^2/F^2$) debida a la fricción en el fondo. El número de Froude F es positivo, si el ángulo de inclinación s es mayor que cero. Si F es pequeño la fuerza dominante es la fuerza de fricción “viscosa”. Por lo tanto se espera que para F pequeño las partículas del fluido se desaceleren. En cambio para F grande la fuerza de gravedad acelerará las partículas del fluido. El comportamiento de $F = \tan s/C$ sólo depende de la inclinación s del plano y de la constante C de fricción asociada a la rugosidad, cuyo valor se puede encontrar en tablas.

El número de Froude permite hacer modelos a escala del canal, con el objeto de estudiar este fenómeno. De hecho el número de Froude se usa en infinidad de problemas, donde la fuerza de gravedad está involucrada en las condiciones para frontera libre (ver Levi [Le]).

Cabe señalar que para este modelo la velocidad de propagación de perturbaciones \mathbf{c} es

$$\mathbf{c} = \sqrt{gH}.$$

La definición de flujo supercrítico corresponde al caso $U > \sqrt{gH}$, así como la de flujo subcrítico a $U < \sqrt{gH}$.

En consecuencia se ha definido el modelo para el flujo de agua poco profunda en un plano inclinado. Las características de este modelo consisten en que el agua es incompre-

sible, no viscosa, irrotacional y con velocidad paralela al eje x . Las ecuaciones que definen al sistema son la de conservación de masa y la de evolución de momento, con condiciones iniciales periódicas tanto para el perfil h como para la velocidad u . Además la evolución del sistema depende del parámetro de Froude F . En el siguiente capítulo se estudiará en detalle la evolución de las condiciones iniciales periódicas para este modelo.

Capítulo 2

Evolución de Condiciones Iniciales

2.1 Estudio Lineal

En el capítulo anterior se obtuvo el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que modela el flujo de agua en un canal inclinado, dado por

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & h \\ 1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{u^2}{hF^2} \end{pmatrix}, \quad (2.1.1)$$

con condiciones iniciales

$$h(x, 0) = f_0(x) \quad u(x, 0) = g_0(x) \quad (2.1.2a, b).$$

Donde f y g son funciones periódicas con período $2l$.

En este capítulo se estudiará la evolución de las condiciones iniciales periódicas. Primero mediante un análisis lineal, que permitirá definir el número de Froude F a partir del cuál el sistema es inestable. En la aproximación lineal la inestabilidad señalará que, tanto la velocidad como el perfil aumentarán su amplitud indefinidamente conforme avanza el tiempo. Es decir, el flujo se acelerará debido a que los coeficientes en la expansión de Fourier crecen exponencialmente. Dado que la disipación de energía en el sistema es de orden cuadrático, es de esperar que las soluciones sean estables para tiempos grandes

tal y como se observa el fenómeno en el laboratorio, por lo que se estudiará el sistema para el caso ligeramente inestable mediante el método de dos escalas de tiempo. Parte de esta técnica consiste en eliminar los términos que crecen indefinidamente para tiempos infinitos, conocidos en la Teoría de Perturbaciones como términos seculares. Al eliminar éstos es posible describir la solución completa a primer orden considerando que, tanto el perfil como la velocidad de las olas respetan la definición de aproximación asintótica. La solución encontrada de esta manera crece conforme avanza el tiempo hasta un estado estacionario, el salto hidráulico.

Es decir, debido a la no linealidad de las ecuaciones que rigen el sistema, las condiciones iniciales continuas evolucionan a la solución discontinua definida por el salto hidráulico. Físicamente, el flujo se acelera hasta alcanzar la velocidad de propagación c . En ese momento se genera el equivalente a una onda de choque para un gas ideal politrópico.

Dado que el término de Chézy CU^2 está definido para flujos en la dirección x (río abajo) se considerará que $u > 0$. por lo tanto la matriz

$$\mathbf{A}(u, h) = \begin{pmatrix} u & h \\ 1 & u \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

es una matriz positiva. Para tiempos muy pequeños $0 < t_1 \ll 1$ la matriz (2.1.3) se aproxima por las condiciones iniciales

$$\mathbf{A}(u, h) \approx \begin{pmatrix} g_0(x) & f_0(x) \\ 1 & g_0(x) \end{pmatrix},$$

esta matriz es periódica por tener condiciones iniciales periódicas en x (ver John [J]). En consecuencia posee valores propios periódicos $\mu_1 = g_0 + \sqrt{f_0}$, $\mu_2 = g_0 - \sqrt{f_0}$. Estos valores propios definen las características $\frac{dx}{dt} = \mu_1$, $\frac{dx}{dt} = \mu_2$, que para $t = t_1$ tendrán la pendiente $\mu_1 = g_0 + \sqrt{f_0}$ y $\mu_2 = g_0 - \sqrt{f_0}$. Por lo tanto para $0 < t_1 \ll 1$ la solución es periódica

en x . Este método se puede usar para extender la solución a $t_2 > t_1$ a partiendo de que tanto $u(x, t_1)$ como $h(x, t_1)$ son periódicas definiendo de nuevo una matriz periódica para el tiempo $t = t_2$. Por lo tanto la solución del sistema (2.1.1) es periódica para todo $t > 0$.

El sistema (2.1.1) tiene solución estacionaria u_0 y h_0 constantes si

$$\frac{u_0^2}{h_0 F^2} = 1. \quad (2.1.3)$$

Fijando $h_0 = 1$, para respetar las escalas, se obtiene

$$u_0^2 = F^2.$$

Se considerará sólo la raíz positiva pues $u > 0$, entonces

$$u_0 = F. \quad (2.1.4)$$

La solución (h_0, u_0) corresponde a la solución de equilibrio entre fuerza gravitacional y la fricción (H_0, U_0) definidas en la sección (1.4) por la ecuación (1.4.3).

Se usará (h_0, u_0) como primeros términos de una expansión lineal para u y h de la forma

$$h = 1 + \epsilon \tilde{h} \quad (2.1.5),$$

$$u = F + \epsilon \tilde{u}. \quad (2.1.6).$$

Y las condiciones iniciales correspondientes

$$h(x, 0; \epsilon) = 1 + \epsilon f(x) \quad (2.1.7a, b)$$

$$u(x, 0; \epsilon) = F + \epsilon g(x).$$

Aquí f y g son periódicas de período $2l$. Se supone que ϵ es pequeño, por lo que se está aproximando la solución h y u cerca de la solución estacionaria $h = 1$, $u = F$. También se

esta suponiendo que el sistema completo (2.1.1) tendrá soluciones parecidas a las obtenidas por estas expansiones al considerar $\epsilon \ll 1$. Por lo anterior la matriz $\mathbf{A}(u, h)$ se escribe en la forma

$$\mathbf{A}(u, h) = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & F \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \tilde{u} & \tilde{h} \\ 0 & \tilde{u} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^0 + \epsilon \mathbf{A}^1. \quad (2.1.8)$$

Obviamente el sistema de orden ϵ^0 se satisface ($h_0 = 1, u_0 = F$). Para orden ϵ el sistema correspondiente es el sistema lineal con coeficientes constantes

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2/F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

La matriz \mathbf{A}^0 es una matriz simétrica, positiva definida; en consecuencia tiene valores propios reales, por ello el sistema es un sistema hiperbólico y los valores propios definen las curvas características (ver Kevorkian [K]). Los valores propios son $\lambda_1 = F + 1$ y $\lambda_2 = F - 1$ y los vectores propios asociados son $p_1 = (1, 1)$ y $p_2 = (1, -1)$ respectivamente. La matriz

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

transforma el sistema a las nuevas funciones w_1 y w_2 tales que

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{w} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.10)$$

La transformación (2.1.10) convierte al sistema (2.1.9) en

$$\mathbf{w}_t + \begin{pmatrix} F+1 & 0 \\ 0 & F-1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{F} & -1 - \frac{2}{F} \\ 1 - \frac{2}{F} & 1 + \frac{2}{F} \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.11)$$

con condiciones iniciales

$$w_1(x, 0) = f(x) + g(x), \quad w_2(x, 0) = f(x) - g(x). \quad (2.1.11a, b)$$

El sistema (2.1.11) se puede desacoplar para obtener una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes para w_2

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (F+1)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + (F-1)\frac{\partial}{\partial x}\right)w_2 + \frac{2}{F}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3F}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)w_2 = 0, \quad (2.1.13)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} w_2(x, 0) &= f - g, \\ w_{2t}(x, 0) &= (1-F)(f' - g') - \left(1 + \frac{2}{F}\right)(f - g) - \left(1 - \frac{2}{F}\right)\left(\frac{f+g}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

La función w_1 también satisface la ecuación (2.1.13) aunque con diferentes condiciones iniciales.

Esta ecuación es un caso particular del sistema

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)W + \delta\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)W = 0, \quad (2.1.15)$$

con $\lambda_1 > \lambda_2$, $a > 0$ y $\delta > 0$. La ecuación (2.1.15) es equivalente a

$$W_{tt} + (\lambda_1 + \lambda_2)W_{xt} + \lambda_1\lambda_2W_{xx} + \delta W_t + a\delta W_x = 0 \quad (2.1.16).$$

La periodicidad de las condiciones iniciales permite estudiar la estabilidad del sistema mediante el análisis de los coeficientes correspondientes a la serie de Fourier que aproxima la solución.

En la ecuación (2.1.16) el discriminante $\Delta = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/2 > 0$, sigue siendo un sistema hiperbólico. Sea W_k una solución del tipo de onda viajera

$$W_k = A \exp(ikx - i\omega t) \quad \text{con} \quad W_k(x, 0) = a_k \exp(ikx) \quad (2.1.17),$$

donde en general ω es un número complejo $\omega(k) = \alpha + i\beta$. Expresando W_k en función de α y β .

$$W_k = A \exp(\beta t) \exp[i(kx - \alpha t)].$$

Entonces el caso $\beta > 0$ corresponde a un crecimiento exponencial en la amplitud de las soluciones, por lo tanto el sistema es inestable. Para el caso $\beta < 0$ la solución disminuye su amplitud exponencialmente conforme crece el tiempo, en este caso no se generan las ondas rodantes. Las ondas rodantes se generan para el caso inestable entonces, es conveniente observar con cuidado el caso $\beta > 0$.

Al sustituir (2.1.17) en (2.1.16) se obtiene un polinomio de segundo orden

$$\omega^2 - \omega[(\lambda_1 + \lambda_2)k - i\delta] + \lambda_1\lambda_2k^2 - ia\delta k = 0. \quad (2.1.18)$$

La parte compleja de las soluciones ω_1 y ω_2 indicará la estabilidad de la solución. Las raíces son

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)k - i\delta \pm [(-(\lambda_1 + \lambda_2)k + i\delta)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2k^2 - ia\delta k)]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.1.19)$$

La expresión $\omega = \omega(k)$ es conocida en propagación de ondas como la relación de dispersión. Es necesario estudiar la parte imaginaria de la raíz y compararla con $-i\delta$. Sea z el número complejo dentro de la raíz en la expresión anterior, es decir $\sqrt{z} = [(-(\lambda_1 + \lambda_2)k + i\delta)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2k^2 - ia\delta k)]^{1/2}$. Simplificando $z = (\lambda_1 - \lambda_2)^2k^2 - \delta^2 + i2\delta k(2a - \lambda_1 - \lambda_2)$. Por lo tanto

$$|z|^2 = [(\lambda_1 - \lambda_2)^2k^2 - \delta^2]^2 + 4\delta^2k^2[2a - (\lambda_1 + \lambda_2)]^2. \quad (2.1.20)$$

Definiendo θ tal que

$$\cos \theta = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2k^2 - \delta^2}{|z|}, \quad \text{sen } \theta = \frac{2\delta k(2a - \lambda_1 - \lambda_2)}{|z|}.$$

Dado que $\sqrt{z} = |z|^{1/2}(\cos(\theta/2) + i \text{sen}(\theta/2))$, usando las relaciones del ángulo medio se obtiene

$$\sqrt{z} = \left[\frac{|z| + (\lambda_1 - \lambda_2)^2k^2 - \delta^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + i \left[\frac{|z| + \delta^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2k^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Usando esta última relación y la ecuación (2.1.16) se obtiene

$$\beta = \text{Im}[\omega(k)] = -\delta + \text{Im}[\sqrt{z}] = -\delta + \left[\frac{|z| + \delta^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 k^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

donde $|z|$ está dada por (2.1.20). Se supone que $k > 0$ y $\lambda_1 < \lambda_2$. Al sustituir el valor de \sqrt{z} en la ecuación anterior y simplificar se obtiene que la condición de inestabilidad $\beta > 0$ es equivalente a exigir que

$$(a - \lambda_1)(a - \lambda_2) > 0;$$

por lo tanto, el sistema es inestable si $a > \lambda_1$ o $a < \lambda_2$. La ecuación (2.1.13) tiene $\lambda_1 = F + 1$ y $\lambda_2 = F - 1$ por lo que la condición $a > \lambda_1$ ($a = 3F/2$) implica

$$\frac{3F}{2} > F + 1.$$

En consecuencia la condición de inestabilidad es para el caso $F > 2$. La condición $a < \lambda_2$ no se satisface para $F > 0$. Hay que notar que la inestabilidad no depende de k , por lo que todos los términos de la expansión de Fourier

$$w_2(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \exp[i(kx - \alpha t)],$$

correspondiente a las condiciones iniciales

$$w_2(x, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(ikx).$$

crecen exponencialmente conforme avanza el tiempo. Consecuentemente la amplitud de la solución \tilde{h} , \tilde{u} crece indefinidamente para $F > 2$. Es decir la ecuación es inestable para $F > 2$.

En el caso $F < 2$ las amplitudes de las soluciones \tilde{h} y \tilde{u} decrecen de forma exponencial conforme t crece. Entonces para $F < 2$ la solución a tiempos largos se reduce al flujo estacionario $h = 1$, $u = F$.

En el caso $F > 2$ la solución (\tilde{h}, \tilde{u}) no es válida para tiempos arbitrariamente largos pues la perturbación regular exige que

$$\frac{\epsilon \tilde{h}}{\tilde{h}_0} = \frac{\epsilon \tilde{h}}{1} \sim O(\epsilon);$$

esta misma condición se exige para \tilde{u} .

Sin embargo en la ecuación completa (2.1.1) se observa que el término de disipación es de orden cuadrático, por lo que es de esperarse que la solución no crezca indefinidamente. A continuación se hará un estudio por el método de dos tiempos para $0 < F - 2 \approx O(\epsilon)$ con el fin de analizar la inestabilidad.

2.2 Estudio por el método de dos escalas de tiempos

Hasta este momento la aproximación lineal sólo señala un crecimiento exponencial para $F > 2$. De ninguna manera se describe el fenómeno de las ondas rodantes. En esta sección se encontrarán las ecuaciones que describen la evolución de condiciones iniciales en ondas rodantes. El método consiste en estudiar el caso ligeramente inestable $F = 2 + \epsilon\alpha$ con $\alpha \sim O(1) > 0$. Por lo tanto la amplitud de la onda crecerá exponencialmente aunque en una escala de tiempo \tilde{t} diferente a la escala t del problema. Es decir, $\tilde{t} = \epsilon t$ es el tiempo lento ($\epsilon \ll 1$) y la amplitud de la solución para el caso ligeramente inestable es

$$\exp(\alpha \epsilon t) = \exp(\alpha \tilde{t}).$$

Entonces u y h dependerán de x, t y \tilde{t} .

$$u = u(x, t, \tilde{t})$$

$$h = h(x, t, \tilde{t}).$$

Haciendo una expansión cerca del flujo estacionario $u_0 = F, h_0 = 1$.

$$u = F + \epsilon u_1(x, t, \tilde{t}) + \epsilon^2 u_2(x, t, \tilde{t})$$

$$h = 1 + \epsilon h_1(x, t, \tilde{t}) + \epsilon^2 h_2(x, t, \tilde{t}), \quad (2.2.1)$$

Entonces las derivadas parciales con respecto al tiempo se expresan como

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad (2.2.2)$$

mientras que las derivadas con respecto a x conservan su forma.

Para el caso ligeramente inestable $F = 2 + \epsilon \alpha u$ se expresa como

$$u = 2 + \epsilon(\alpha + u_1) + \epsilon^2 u_2. \quad (2.2.3)$$

Al introducir las expansiones (2.2.1) y (2.2.3) tomando en cuenta la relación (2.2.2) se obtienen los sistemas de ecuaciones siguientes. Para orden ϵ

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Y para orden ϵ^2

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -h_1 \tilde{t} - (\alpha + u_1) h_{1x} - h_1 u_{1x} \\ -u_1 \tilde{t} - (\alpha + u_1) u_{1x} + \frac{\alpha u_1}{2} - (h_1 - \frac{u_1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.5a, b)$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} h(x, 0, 0) &= 1 + \epsilon f, \\ u(x, 0, 0) &= F + \epsilon g. \end{aligned} \quad (2.2.6a, b)$$

El sistema (2.2.4) es el sistema lineal (2.1.9) con $F = 2$. Entonces los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Estos valores propios corresponden a los vectores propios $\mathbf{p}_1 = (1/2)(1, 1)$ y $\mathbf{p}_2 = (1/2)(1, -1)$. Por lo tanto, la transformación

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{P} \mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1, \quad (2.2.7)$$

con $\mathbf{v} = (h_1, u_1)^T$ y $\mathbf{S}_1 = (S_1, R_1)^T$, permite diagonalizar la matriz. Hecho esto, el sistema (2.2.4) es equivalente a

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Donde $S_1 = h_1 + u_1$ y $R_1 = h_1 - u_1$. Además, los vectores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$ definen a las variables características (ver John [J])

$$\xi = x - 3t, \quad \eta = x - t. \quad (2.2.9a, b)$$

Al introducir las variables (2.2.9) en el sistema (2.2.8) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} S_{1\eta} &= \frac{1}{2}R_1, \\ R_{1\xi} &= \frac{1}{2}R_1. \end{aligned} \quad (2.2.10a, b)$$

El sistema (2.2.10) se resuelve fácilmente. Al integrar la ecuación (2.2.10b) se obtiene la solución

$$R_1(\xi, \eta, \tilde{t}) = r(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (2.2.11)$$

Introduciendo ésta en la ecuación (2.2.10a) se deduce

$$S_1(\xi, \eta, \tilde{t}) = q(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) + s(\xi, \tilde{t}). \quad (2.2.12)$$

Donde $q(\eta, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} r(\nu, \tilde{t}) d\nu$. Se desconoce la dependencia tanto de r como de s con respecto a \tilde{t} . Esta dependencia se encontrará al sustituir las soluciones S_1, R_1 en la ecuación a orden ϵ^2 . En las condiciones iniciales (2.2.6a,b) las funciones f y g son periódicas en x con período $2l$. El sistema (2.1.1) tiene soluciones periódicas por lo tanto R_1 y S_1 conservan esta propiedad. Esta condición de periodicidad se extiende para $s(\xi, \tilde{t})$, $r(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right)$ y $q(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Se definirá $r(\eta, \tilde{t}) = \tilde{r} \exp(-\eta/2)$ y $q = \tilde{q} \exp(-\eta/2)$ pues

$$r \exp(\xi/2) = \tilde{r} \exp\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) = \tilde{r} \exp(-t), \quad (2.2.13)$$

y

$$q \exp(\xi/2) = \tilde{q} \exp\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) = \tilde{q} \exp(-t), \quad (2.2.14)$$

permiten exigir periodicidad en x para \tilde{q} y \tilde{r} . Para el estudio del sistema a orden ϵ^2 es necesario sustituir las funciones $h_1 = (S_1 + R_1)/2$ y $u_1 = (S_1 - R_1)/2$ en el lado derecho (términos n_1 y n_2) del sistema (2.2.5). Este sistema tiene los mismos valores propios ($\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$) por lo tanto se plantea el sistema diagonalizado para las funciones S_2 y R_2 mediante la transformación lineal definida en (2.2.7). Posteriormente se realiza el cambio de variables correspondiente a las características ξ y η †. Entonces la ecuación correspondiente a S_2 es

$$\begin{aligned} S_{2\eta} = & \frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2}S_{1\bar{t}} - \frac{1}{8}(4\alpha + 3S_1 - R_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) \\ & + \frac{1}{8}(R_1 + S_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Para R_2 este proceso genera la ecuación

$$\begin{aligned} R_{2\xi} - \frac{1}{2}R_2 = & \frac{1}{2}R_{1\bar{t}} + \frac{1}{8}(4\alpha - 3R_1 + S_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) \\ & + \frac{1}{8}(R_1 + S_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Esta ecuación es de primer orden no homogénea para R_2 . Al multiplicar ambos lados de ésta por el factor integrante $\exp(\xi/2)$ y sustituir R_1 y S_1 por las expresiones (2.2.11) y

† Los detalles de los cálculos correspondientes a esta sección aparecen en el Apéndice I.

(2.2.12), considerando que $q_\eta = r/2$, se encuentra la relación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(R_2 \exp(-\xi/2)) &= \frac{1}{2} \left[r_{\tilde{t}} + \alpha r_\eta + \frac{1}{4} \alpha r + \frac{1}{4} \alpha q \right] & (T_1) \\ &+ \frac{1}{8} \exp(-\xi/2) \left[s s_\xi + \alpha s - \frac{1}{4} s^2 \right] & (T_2) \\ &+ \frac{1}{8} \exp(\xi/2) \left[q r_\eta - 3 r r_\eta - \frac{13}{4} r^2 + \frac{1}{4} q^2 \right] & (T_3) \\ &+ \frac{1}{8} \left[s r_\eta - \frac{r s}{2} + s_\xi r + s_\xi q \right]. & (T_4) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Donde $r = r(\eta, \tilde{t})$, $q = q(\eta, \tilde{t})$ y $s = s(\eta, \tilde{t})$. Al introducir la variable lenta $\tilde{t} = \epsilon t$ es necesario exigir que las funciones r y s no generen soluciones no acotadas en R_2 y S_2 cuando el tiempo es muy grande. Esta exigencia proviene nuevamente de que tanto R_2 como S_2 son expansiones asintóticas de la solución. Es necesario estudiar la contribución de cada término T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) al ser integrado con respecto a ξ para obtener R_2 , así como la integral con respecto a η en el momento de calcular S_2 .

Al integrar con respecto a ξ , el término T_1 no está acotado para valores de x grandes; en consecuencia se exige que

$$r_{\tilde{t}} + \alpha r_\eta + \frac{\alpha}{4} r + \frac{\alpha}{4} q = 0, \quad (2.2.18)$$

donde $q(\eta, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \int^\eta r(\nu, \tilde{t}) d\nu$. Esta relación define la dependencia de r con respecto a \tilde{t} y η . Los términos (T_3) y (T_4) son acotados al integrar con respecto a ξ y η (ver Apéndice I). Al integrar por partes (T_2) con respecto a ξ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\xi/2)}{8} \int^\xi (s s_\xi + \alpha s - \frac{1}{4} s^2) \exp(-\nu/2) d\nu \\ = \frac{\alpha}{8} \exp(\xi/2) \int^\xi s \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{s^2}{16} + C_1. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Este término está acotado para toda ξ, η . Sin embargo, al integrar con respecto a η la amplitud no está acotada pues (T_2) sólo depende de ξ . Entonces es necesario tomarlo en

cuenta en el momento de calcular S_2 . En resumen, al integrar la ecuación no homogénea (2.2.17) se obtiene la relación (2.2.18) con el objeto de que la amplitud $r(\eta, \tilde{t})$ sea acotada para toda x, \tilde{t} . Los términos en la relación (2.2.18) son llamados en Teoría de Perturbaciones como términos seculares. Falta encontrar la relación análoga para $s(\xi, \tilde{t})$. Al reescribir la ecuación (2.2.16) en función de s , r , y q mediante las expresiones (2.2.11) y (2.2.12) se encuentra

$$S_{2\eta} = \frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2} \left(s_{\tilde{t}} + \alpha s_{\xi} + \frac{3}{4}ss_{\xi} + \frac{1}{16}s^2 - \frac{\alpha}{4}s \right) \quad (T_5)$$

$$- \frac{1}{2} \exp(\xi/2) \left(q_{\tilde{t}} + \frac{3}{4}qs_{\xi} - \frac{1}{4}rs_{\xi} + \frac{3}{4}\alpha r + \frac{5}{8}sr + \frac{\alpha}{4}q + \frac{1}{2}sq - \frac{1}{4}sr_{\eta} \right) \quad (T_6)$$

$$- \frac{\exp(\xi)}{4} \left(qr + \frac{7}{8}q^2 - \frac{5}{8}r^2 - \frac{1}{2}qr_{\eta} - \frac{1}{2}rr_{\eta} \right). \quad (T_7)$$

(2.2.20)

Al integrar con respecto a η , los términos (T₆) y (T₇) generan funciones acotadas (ver Apéndice 1). Los términos en (T₅) no dependen de η por lo que, sumados a los provenientes de R_2 (relación (2.2.19)) deberán ser cero. En resumen, eliminando los términos seculares correspondientes a la ecuación (2.2.20) se obtiene la condición

$$s_{\tilde{t}} + \left(\alpha + \frac{3}{4}s \right) s_{\xi} - \frac{\alpha}{4}s - \frac{\alpha}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu - \frac{\alpha \exp(\xi/2)}{8} C_1 = 0. \quad (2.2.21)$$

Esta ecuación define a s como función de ξ y \tilde{t} . Las relaciones (2.2.18) y (2.2.21) cierran el sistema de ecuaciones planteado para orden ϵ al agregar \tilde{t} como variable adicional en u y h .

De esta manera, el problema del sistema de ecuaciones diferencial cuasilineal acoplada se ha aproximado por un sistema de ecuaciones integro-diferenciales no acoplado.

Reescribiendo la ecuación (2.2.21) en función de \tilde{r} ($\tilde{q} = (1/2) \int_{\eta} r(\nu, \tilde{t}) d\nu$) se encuentra

$$\tilde{r}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{r}_{\eta} - \frac{\alpha}{4} \tilde{r} + \frac{\alpha \exp(\eta/2)}{8} \left[\int^{\eta} \tilde{r} \exp(-\nu/2) d\nu + C_2 \right] = 0. \quad (2.2.22)$$

Multiplicando la ecuación (2.2.22) por $\exp(-\eta/2)$ y derivando con respecto a η se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\alpha \tilde{r}_{\eta\eta} + \tilde{r}_{\tilde{t}\eta} - \frac{3\alpha}{4} \tilde{r}_{\eta} - \frac{1}{2} \tilde{r}_{\tilde{t}} + \frac{\alpha}{4} \tilde{r} = 0. \quad (2.2.23)$$

La ecuación es hiperbólica ya que $\Delta = 1/4 > 0$; se hará un análisis similar al hecho para la ecuación lineal (2.1.12). Al suponer una solución del tipo onda viajera

$$\tilde{r}_k = A \exp[i(k\eta - \omega\tilde{t})]$$

se encuentra que la relación de dispersion ω es

$$\omega = \frac{\alpha k (k^2 + \frac{1}{8})}{(k^2 + \frac{1}{4})} + i \frac{\alpha (k^2 + \frac{1}{2})}{4 (k^2 + \frac{1}{4})}.$$

Esta relación se obtiene también al sustituir $F = 2 + \epsilon\alpha$ en la relación de dispersión (2.1.18) correspondiente al caso lineal. Esto se debe a que $\tilde{r}(\eta, \tilde{t})$ es la amplitud de la propagación para el caso ligeramente inestable pues $\alpha(k^2 + 1/2)/4(k^2 + 1/4)$ es positivo para toda k y $\alpha > 0$

Análogamente es posible multiplicar la ecuación (2.2.21) por $\exp(-\xi/2)$ y derivar, lo que genera la ecuación de segundo orden parcial y no lineal dada por

$$\left(\alpha + \frac{3}{4}s\right) s_{\xi\xi} + s_{\tilde{t}\xi} + \frac{1}{4} \left(\alpha + 3s_{\xi} - \frac{3}{2}s\right) s_{\xi} - \frac{1}{2} s_{\tilde{t}} = 0 \quad (2.2.24).$$

Como las funciones \tilde{r} y s son periódicas es posible encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2 de las ecuaciones (2.2.21) y (2.2.22). Debido a que la función s es periódica con período $2l$, de la ecuación (2.2.21) se obtiene la siguiente relación

$$\int_{-l}^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu + C_1 = \exp(l) \left(\int_{-l}^{\xi+2l} s \exp(-\nu/2) d\nu + C_1 \right).$$

Esta relación es válida para todo ξ , en particular para $\xi = -l$. Entonces la constante C_1 se escribe como

$$C_1 = \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l s \exp(-\nu/2) d\nu.$$

De manera análoga se encuentra el valor de C_2 . Este es

$$C_2 = \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l r \exp(-\nu/2) d\nu. \quad (2.2.25)$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (2.2.21) y (2.2.22) se generan las relaciones

$$\tilde{r}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{r}_{\eta} = \frac{\alpha}{4} \tilde{r} - \frac{\alpha \exp(\eta/2)}{8} \left[\int_{-l}^{\eta} \tilde{r} \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{\exp(-l)}{1 + \exp(l)} \int_{-l}^l s \exp(-\nu/2) d\nu \right], \quad (2.2.26)$$

$$s_{\tilde{t}} + \left(\alpha + \frac{3}{4}s \right) s_{\xi} = \frac{\alpha}{4}s + \frac{\alpha}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l s \exp(-\nu/2) d\nu. \quad (2.2.27)$$

La relación (2.2.35) nos permite expresar q en función de r para el caso periódico

$$q(\eta, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \int_{-l}^{\eta} r(\nu, \tilde{t}) d\nu + \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^{\eta} \tilde{r}(\nu, \tilde{t}) \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l \tilde{r} \exp(-\nu/2) d\nu \right].$$

Por lo tanto la relación entre \tilde{q} y \tilde{r} es

$$\tilde{q} = \frac{\exp(\eta/2)}{2} \left[\int_{-l}^{\eta} \tilde{r}(\nu, \tilde{t}) \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l \tilde{r} \exp(-\nu/2) d\nu \right].$$

Las funciones \tilde{r} y s determinadas por las ecuaciones diferenciales (2.2.26) y (2.2.27) conforman la solución a primer orden siguiente

$$h(x, t, \tilde{t}) = 1 + \epsilon h_1 = 1 + \epsilon \left(\frac{S_1 + R_1}{2} \right)$$

$$u(x, t, \tilde{t}) = 1 + \epsilon(\alpha + u_1) = 1 + \epsilon \left(\alpha + \frac{S_1 - R_1}{2} \right).$$

Al sustituir $R_1 = r \exp(\xi/2) = \tilde{r} \exp(-t)$ y $S_1 = q \exp(\xi/2) + s = \tilde{q} \exp(-t) + s$ se encuentra que, las soluciones hasta orden ϵ de h y u son

$$\begin{aligned} h(x, t, \tilde{t}) &= 1 + \frac{\epsilon}{2} [s(x - 3t, \tilde{t}) + (\tilde{q} + \tilde{r}) \exp(-t)] , \\ u(x, t, \tilde{t}) &= F + \epsilon \left[\alpha + \frac{s(x - 3t, \tilde{t})}{2} + (\tilde{q} - \tilde{r}) \frac{\exp(-t)}{2} \right] , \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

donde s y \tilde{r} satisfacen las condiciones iniciales (2.2.6a,b)

$$\tilde{r}(x, 0) = f(x) - g(x), \quad S(x, 0) = f(x) + g(x) - \tilde{q}(x, 0). \quad (2.2.29a, b)$$

En las ecuaciones (2.2.28a,b) las amplitudes \tilde{q} y \tilde{r} decrecen exponencialmente conforme aumenta el tiempo, aún considerando que \tilde{r} (y por ende \tilde{q}) son inestables pues la amplitud \tilde{r} crece exponencialmente ($\tilde{r} \sim \exp(\alpha/4)\tilde{t}$). Si el tiempo T transcurrido es de orden ϵ^{-1} , $T \sim O(1/\epsilon)$, las amplitudes \tilde{r} y \tilde{q} son un orden de magnitud más pequeños comparados con s . En consecuencia, para tiempos $t > (1/\epsilon)$, el comportamiento de la solución depende únicamente de la función s , siendo ésta determinada por la ecuación (2.2.27).

La ecuación (2.2.27) se resuelve mediante un método numérico, que predice la evolución del perfil y la velocidad del flujo. La inestabilidad del sistema indica que el flujo se acelera hasta que éste alcanza la velocidad de propagación \mathbf{c} . En ese momento se produce el equivalente de una onda de choque, que para el caso de aguas someras es un salto hidráulico. Dado que el estudio por el método de dos escalas de tiempo es para el caso ligeramente inestable, el salto hidráulico se alcanzará en un tiempo infinito. Sin embargo se desconoce si la función $s(\xi, \tilde{t})$ es periódica cuando t se acerca al infinito. A continuación se demostrará que en un tiempo infinito $s(\xi, \tilde{t})$ es periódica.

La ecuación diferencial (2.2.24) define nuestra función s . Al plantear el cambio de variable $\tau = 1/t$ en $\xi = x - 3t$ y $\tilde{t} = \epsilon t$ se obtiene la ecuación

$$\frac{\tau^2}{9} \left(\alpha + \frac{3}{4}s - 3\epsilon \right) s_{\tau\tau} + \frac{1}{12} (\alpha \tau^2 s_{\tau} - \frac{3}{2}s + \epsilon \frac{\tau^2}{2}) s_{\tau} = 0. \quad (2.2.30)$$

Pues las derivadas parciales con respecto a \tilde{t} y ξ corresponden a

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = -\epsilon \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\tau^2}{3} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

En la variable τ el caso $t \sim \infty$ es análogo a tomar $\tau \sim 0$. En este caso la ecuación (2.2.30) se reduce a

$$\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{3}{2} s \right) s_\tau = 0.$$

Es decir $s(\tau) = (2/3)\alpha$ para todo τ . Por lo tanto s es periódica pues $s(\tau(x)) = s(\tau(x+2l))$. Debido a la inestabilidad, las condiciones iniciales periódicas crecen hasta formar ondas rodantes periódicas.

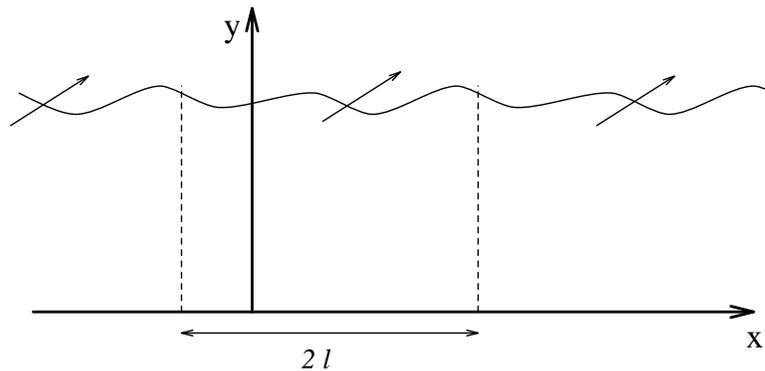


Figura 7. Condición inicial periódica.

Conforme pasa el tiempo las ondas rodantes se van empinando cada vez más.

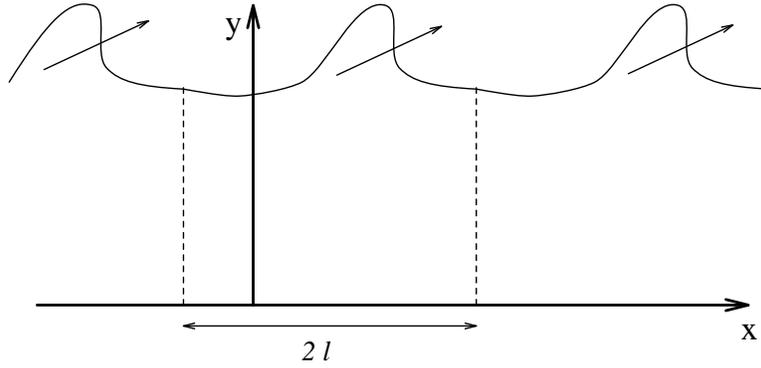


Figura 8. *Ondas rodantes periódicas.*

Hasta que, para tiempo infinito el perfil se convierte en saltos hidráulicos periódicos.

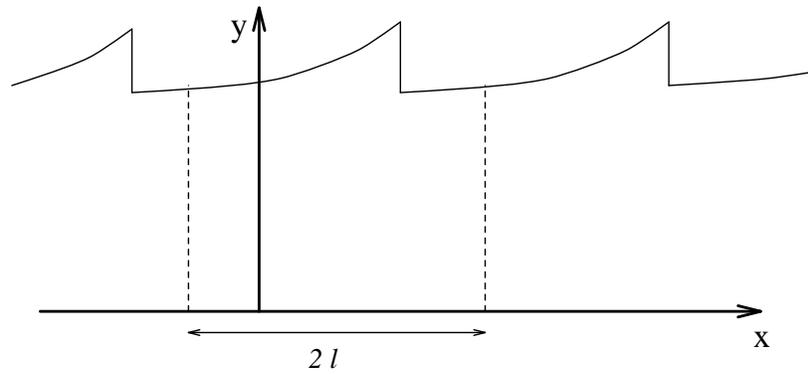


Figura 9. *Saltos hidráulicos periódicos.*

La función $s(\xi, \tilde{t})$ define el salto hidráulico cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que se necesita sólo una ecuación para definir el salto hidráulico (ver Apéndice II). Entonces es necesario encontrar la forma de divergencia asociada

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \psi + \frac{\partial}{\partial \xi} \phi - \Lambda = 0.$$

Dado que

$$\left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{3}{4} s \right)^2 \right)_{\xi} = \frac{3}{4} \left(\alpha + \frac{3}{4} s \right) s_{\xi},$$

la forma de divergencia buscada es

$$\left(\frac{3}{4}s\right)_{\tilde{t}+} \left[\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{3}{4}s \right) \right]_{\xi} = \frac{3\alpha}{16}s + \frac{3\alpha}{32} \exp(\xi/2) \left(\int_{-l}^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{\exp(l)}{1 - \exp(l)} \int_{-l}^l s \exp(-\nu/2) d\nu \right).$$

En consecuencia la relación

$$\frac{d\xi}{d\tilde{t}} = \frac{[\phi]}{[\psi]} = \frac{\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{3}{4}s_+ \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{3}{4}s_- \right)^2}{\frac{3}{4}(s_+ - s_-)},$$

definirá la velocidad del salto hidráulico. Los subíndices + y - corresponden a los valores límite tomados por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Finalmente, la velocidad del salto hidráulico es

$$\frac{d\xi}{d\tilde{t}} = \alpha + \frac{3}{8}(s_+ + s_-). \quad (2.2.31)$$

En conclusión el sistema de ecuaciones (2.1.1) tiene soluciones periódicas para todo t . La aproximación lineal señala que éste es inestable para $F > 2$. En el caso $F < 2$ la amplitud de las perturbaciones a primer orden decrece exponencialmente, por lo tanto la amplitud de las condiciones iniciales decae a la solución estacionaria $h = 1$, $u = F$. Al estudiar el caso inestable por el método de dos escalas de tiempos se obtiene una sola ecuación válida para tiempos del orden $O(1/\epsilon)$ (ecuación (2.2.27)). Esta ecuación describe la evolución de la onda rodante tanto en el perfil h como de la velocidad u . Para tiempo infinito la solución generada por s evoluciona hacia el salto hidráulico. Es decir, debido a la no linealidad de $\mathbf{A}(h, u)$ las condiciones iniciales periódicas evolucionan en ondas rodantes que crecen hasta convertirse en saltos hidráulicos para tiempo infinito. En el siguiente capítulo se describirán las características del salto hidráulico, basándose en el símil existente entre las aguas someras y el gas ideal, señalando la analogía entre una onda de choque y el salto hidráulico.

Capítulo 3

El Salto Hidráulico

3.1 Relaciones para el problema Completo

En el capítulo anterior se mostró que, para este modelo, las ondas rodantes se generan debido a la inestabilidad del sistema para el caso $F > 2$. Es decir, para condiciones iniciales periódicas, la inestabilidad hará crecer la amplitud de la perturbación hasta ir alcanzando el valor asintótico correspondiente a un estado en equilibrio. Hasta este momento se ha supuesto que la solución de h y u son continuas y poseen primeras derivadas continuas. Sin embargo, falta estudiar la solución discontinua para el problema, el salto hidráulico. En este capítulo se estudiará el caso de un sólo salto, es decir el punto ζ_s que se mueve a velocidad constante de tal manera que las funciones son continuas con primeras derivadas continuas en todo el dominio excepto en $\zeta_s + 2lm$, con m entero. El estudio del salto hidráulico se hará para el sistema de ecuaciones cuasilineal (1.4.12) con el objeto de encontrar la velocidad con que se propaga la discontinuidad, así como las alturas por la izquierda y por la derecha del perfil (y por ende las velocidades correspondientes). Posteriormente se usarán estas relaciones en la aproximación obtenida por el método de dos escalas de tiempo con el objeto de obtener el perfil final s^* del salto hidráulico definido como el $\lim_{t \rightarrow \infty} s(\xi, \tilde{t})$,

relacionándolo con las condiciones iniciales. Es decir, se encuentra la velocidad y el perfil del salto hidráulico en función de las condiciones iniciales.

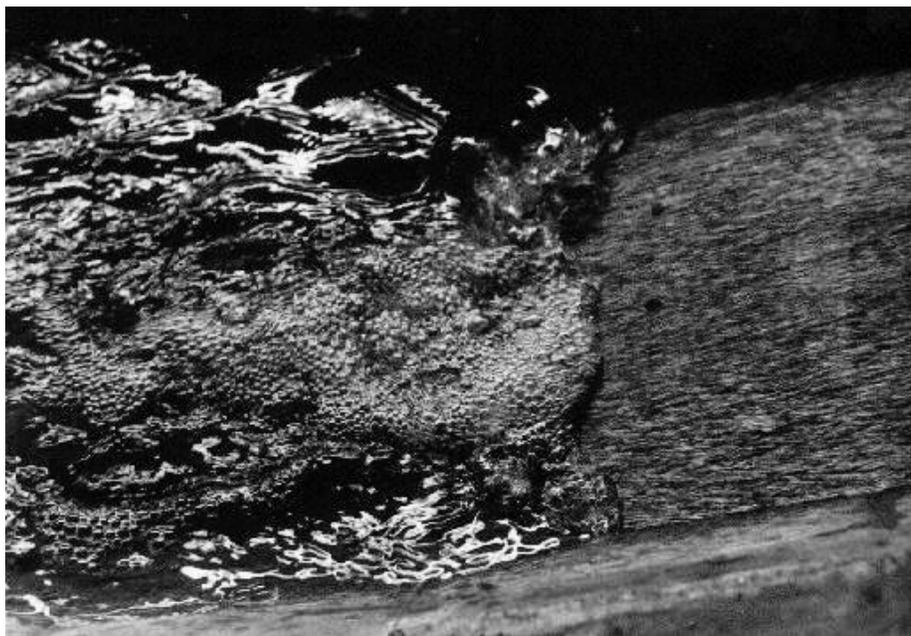


Figura 10. *Salto hidráulico. El salto se mueve de izquierda a derecha.*

Dresler [D] demostró que la única solución periódica estacionaria para el problema del plano inclinado consiste en un arreglo periódico de saltos hidráulicos. Los saltos hidráulicos son discontinuidades tanto en el perfil h como en la velocidad u . En estas discontinuidades se conservarán tanto la masa como el momento. Sin embargo la energía no se conserva para partículas que cruzan el salto (ver Kevorkian [K]). Se denotará como h_- a la altura y a u_- como la velocidad correspondiente al tomar el límite por la izquierda del salto. De manera análoga h_+ , u_+ representan los límites por el lado derecho. El salto hidráulico se mueve hacia la derecha.

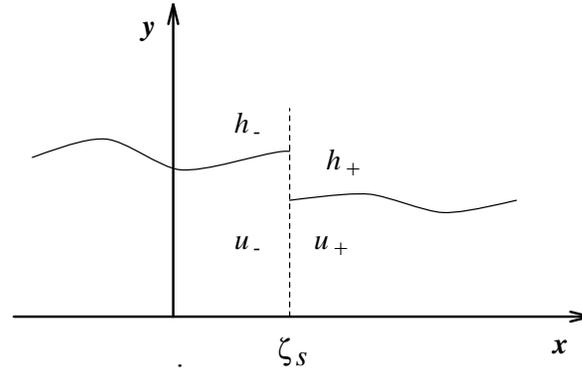


Figura 11. Definición matemática del salto hidráulico.

Se hará el cambio de variables $t^* = t$, $\zeta = x - ct$ donde c es la velocidad del salto hidráulico. No hay que confundir ésta velocidad con la velocidad de propagación \mathbf{c} . Se denotará además a la velocidad $u^* = u - c$ (velocidad relativa). Entonces las derivadas parciales toman la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} - c \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Por lo que al usar la forma diferencial de las ecuaciones completas (1.4.10) se obtiene la expresión correspondiente a la ley de conservación de masa

$$h_{t^*} + (u^*h)_{\zeta} = 0. \quad (3.1.1)$$

De manera análoga la conservación de momento se escribe como

$$(u^*h)_{t^*} + \left(u^{*2}h + \frac{1}{2}h^2 \right)_{\zeta} = h - \frac{(u^* + c)^2}{F^2}. \quad (3.1.2)$$

Dado que el salto hidráulico es un perfil h fijo con velocidad u^* fija con respecto a t^* las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) se simplifican de tal manera que

$$(u^*h)_{\zeta} = 0 \quad \text{y} \quad (3.1.3)$$

$$\left(u^{*2}h + \frac{1}{2}h^2\right)_\zeta = h - \frac{(u^* + c)^2}{F^2}. \quad (3.1.4)$$

De la ecuación (3.1.3) se obtiene una relación entre u^* y h (pues sólo dependen de ζ). Ésta es

$$u^*h = k, \quad (3.1.5)$$

donde k es una constante. Esta última ecuación implica que la razón de descarga es constante. Entendiéndose a la descarga como el cambio en el volumen de líquido por unidad de tiempo. De hecho al derivar con respecto a ζ la relación (3.1.5) indica que

$$u^{*'} = -\frac{u^*h'}{h},$$

donde la prima señala la derivada con respecto a ζ . Al sustituir esta relación en la ecuación (3.1.4) se obtiene

$$h' = \frac{F^2h - (u^* + c)^2}{F^2(h - u^{*2})}. \quad (3.1.6)$$

Esta ecuación diferencial define el perfil $h(\zeta)$ en función de u^* . Dado que la razón de descarga es constante, existen dos tipos de discontinuidades. El primero es el caso en que h_- se encuentra por encima de h_+ ($h_- > h_+$), y $u_-^* < u_+^*$

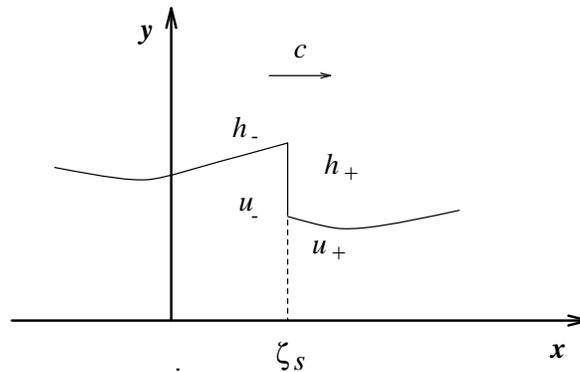


Figura 12. Salto hidráulico con $h_- > h_+$.

o el caso contrario ($h_+ > h_-$) y $u_-^* > u_+^*$

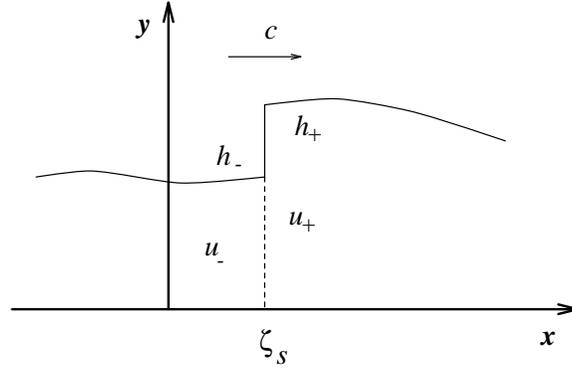


Figura 13. Salto hidráulico con $h_- < h_+$.

Para el caso de aguas someras se establece que en una discontinuidad que se propaga hacia la derecha, la altura h_- tiene que ser mayor que la altura h_+ (ver Stoker [S]); pues de otra manera la discontinuidad produciría un aumento en la energía aún en el caso de un plano horizontal (ver Kevorkian [K]). Esta relación es consistente con la analogía entre el salto hidráulico y una onda de choque que se propaga a la derecha para un gas ideal politrópico unidimensional, ya que la densidad ρ es menor en la región a la derecha del choque comparada con la densidad a la izquierda de éste $\rho_- < \rho_+$ (ver Landau [L]). Usando la relación politrópica asociada al modelo de aguas someras $\bar{p} = (g/2\rho)\bar{p}^2$, con $\bar{p} = \rho H h$, se obtiene $h_- > h_+$. En consecuencia, de la relación (3.1.5) se tiene que

$$u_-^* h_- = k = u_+^* h_+. \quad (3.1.7)$$

En consecuencia se deduce que $u_-^* < u_+^*$. Es decir, una partícula que pasa del lado derecho del salto al izquierdo de éste perderá energía cinética. Es conveniente recordar que la velocidad u sólo depende de x y t , es decir la misma u a lo largo del eje y . Por lo tanto, el salto convierte parte de la energía cinética en potencial, otra parte se disipa por efecto

de la discontinuidad. De esta manera se explica que el salto sea un estado estacionario aún para el caso inestable $F > 2$.

En el sistema de referencia del salto hidráulico se observa que la región a la izquierda del salto tiene velocidad subcrítica mientras que la velocidad a la derecha de éste es supercrítica, es decir la velocidad es menor (o mayor) que la correspondiente a la velocidad c de propagación (ver subsección (1.2.5) y sección (1.4)). Una vez más esta condición respeta la analogía de gas ideal. La región a la derecha de la onda de choque se mueve a velocidad supersónica con respecto a la discontinuidad.

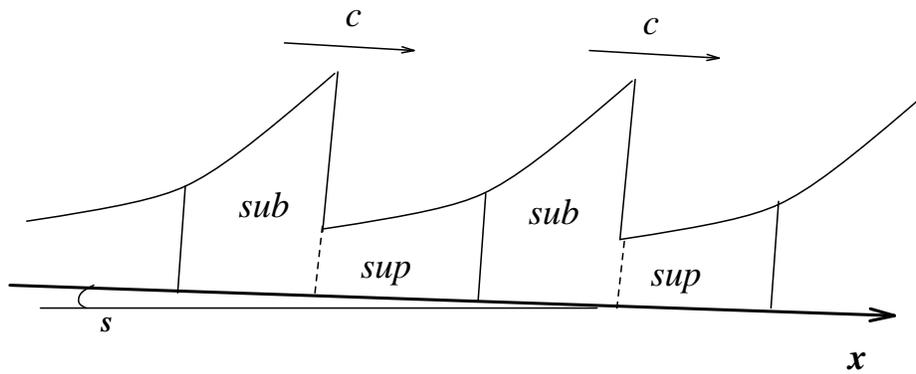


Figura 14. Salto hidráulico mostrando las regiones de velocidades subcrítica (*sub*) y supercrítica.

Por periodicidad y, considerando que la función h es continua para $\zeta \neq \zeta_s$, se concluye que existe un punto ζ_c donde la velocidad es crítica, es decir en ese punto la velocidad de propagación U_c del flujo satisface

$$c = \sqrt{gH_c} = U_c,$$

al expresar esta igualdad en función de las variables adimensionales $H_c = H_0 h_c$, $U_c = V_0 u_c^*$ con $V_0 = \sqrt{gH_0}$ (relación (1.4.6)) se obtiene

$$u_c^{*2} = h_c. \quad (3.1.8)$$

Por lo que el denominador de la ecuación (3.1.6) se anula en el punto ζ_c . Entonces la relación (3.1.5) se escribe como

$$u_c^* h_c = k. \quad (3.1.9)$$

Al usar la relación (3.1.5) se puede reescribir la ecuación (3.1.6) en función de h y k como

$$h' = \frac{F^2 h^3 - (k + ch)^2}{F^2(h^3 - k^2)}.$$

Donde $h_c^3 = k^2$ es el punto donde se alcanza la velocidad crítica u_c . Esta última relación se reescribe como

$$h' = \frac{F^2 h^3 - (\pm h_c^{\frac{3}{2}} + ch)^2}{F^2(h^3 - h_c^3)}. \quad (3.1.10)$$

Aquí h es continua en h_c . Supóngase que el numerador en esta ecuación es diferente de cero en $\zeta = \zeta_c$

$$F^2 h^3 - (\pm h_c^{\frac{3}{2}} + ch)^2 \neq 0,$$

se concluye que h tiene tangente vertical en h_c . En consecuencia la imagen del perfil sería como la figura

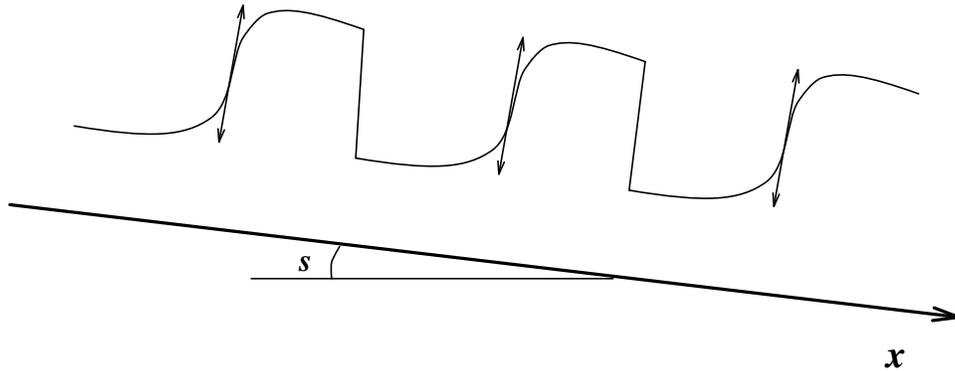


Figura 15. Saltos hidráulicos con tangencia vertical.

Si además h'' es una función continua, entonces h tiene un punto de inflexión en ζ_c .

Calculando la segunda derivada de ζ con respecto a h en la ecuación (3.1.10) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2} = \frac{3F^2 h^2}{F^2 h^3 - \left(\pm h_c^{\frac{3}{2}} + ch\right)^2} - \frac{F^2(h^3 - h_c^3)(3F^2 h^2 - 2c(\pm h_c^{3/2} + ch))}{\left(F^2 h^3 - (\pm h_c^{\frac{3}{2}} + ch)^2\right)^2}.$$

Al evaluar esta expresión en $h = h_c$ el segundo término es igual a cero (pues el denominador es diferente de cero) y el primer término es diferente de cero. Por lo tanto $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2} \neq 0$. En consecuencia no tiene punto de inflexión, por lo anterior el numerador evaluado en h_c es cero. Es decir

$$F^2 h_c^3 - (\pm h_c^{3/2} + ch_c)^2 = 0.$$

El numerador igual a cero permite obtener una expresión explícita de h_c y u_c en función de c y F

$$h_c = \frac{c^2}{(F \pm 1)^2} \quad \text{y} \quad u_c = \frac{\pm c}{(F \pm 1)}.$$

Debido a que el caso inestable $F > 2$ genera las ondas rodantes y considerando que $u_c > 0$, el valor de u_c correcto es

$$u_c^* = \frac{c}{F + 1}, \quad (3.1.11)$$

en consecuencia la correspondiente altura crítica h_c está dada por

$$h_c = \frac{c^2}{(F + 1)^2}. \quad (3.1.12)$$

Dado que h_c es raíz tanto del numerador como del denominador de la ecuación (3.1.10), entonces ésta se simplifica como

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{F^2 h^2 + (h_c F^2 - c^2)h + h_c^2}{F^2(h^2 + hh_c + h_c^2)}. \quad (3.1.13)$$

Hasta aquí h está definida en forma implícita, sin embargo, se puede obtener $\zeta = \zeta(h)$ integrando la ecuación

$$\frac{d\zeta}{dh} = \frac{F^2(h^2 + hh_c + h_c^2)}{F^2 h^2 + (h_c F^2 - c^2)h + h_c^2}.$$

Expresando $h_c F^2 - c^2 = -(2F + 1)/h_c$ se obtiene a ζ en función de h como la integral de esta ecuación ($\zeta = x - ct = \zeta(h)$), con $\zeta \in (-l, \zeta)$ y fijando $h(-l) = 1$, es decir

$$\zeta(h) - l = \int_1^h \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{F+1}{F}\right)^2 h h_c + \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) h_c^2}{h^2 - \frac{2F+1}{F^2} h h_c + \left(\frac{h_c}{F}\right)^2} \right\} dh.$$

Las raíces del denominador

$$h^2 - \frac{2F+1}{F^2} h h_c + \left(\frac{h_c}{F}\right)^2,$$

son h_A y h_B definidas como

$$h_{A,B} = \frac{2F+1 \pm \sqrt{4F+1}}{2F^2} h_c. \quad (3.1.14)$$

Después de integrar $\zeta(h)$ corresponde a la expresión

$$\zeta(h) = h - 1 + k_1 \log \left(\frac{h - h_A}{1 - h_A} \right) - k_2 \log \left(\frac{h - h_B}{1 - h_B} \right). \quad (3.1.15)$$

donde

$$k_1 = \frac{h_A^2 + h_A h_c + h_c^2}{h_A - h_B} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{h_B^2 + h_B h_c + h_c^2}{h_A - h_B}.$$

De la relación (3.1.14) se observa que $h_A > h_B$, y para $F > 2$ $h_c > h_A > h_B > 0$.

La ecuación (3.1.15) define implícitamente el perfil. Sin embargo, falta todavía encontrar la velocidad de la discontinuidad, es decir los valores límite h_- , h_+ . Usando las relaciones de discontinuidad (Apéndice 2) para las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) se obtiene

$$\dot{\zeta}[h] = [hu^*] \quad \text{y} \quad (3.1.16)$$

$$\dot{\zeta}[hu^*] = \left[u^{*2} h + \frac{1}{2} h^2 \right]. \quad (3.1.17)$$

Donde el corchete $[\phi(h, u)] = \phi_+ - \phi_- = \phi(h_+, u_+) - \phi(h_-, u_-)$.

Dado que el salto está fijo en este sistema de referencia $\dot{\zeta} = 0$ por lo que las relaciones entre h_- y h_+ son

$$[hu^*] = 0, \quad (3.1.18)$$

$$\left[u^{*2}h + \frac{1}{2}h^2 \right] = 0. \quad (3.1.19)$$

La relación (3.1.18) es un caso particular de la expresión (3.1.5) pues

$$h_-u_- = h_+u_+ = k = h_c^{3/2}.$$

Usando esta última relación en la ecuación (3.1.19) se concluye que h_- y h_+ satisfacen la igualdad

$$(h_+ - h_-) \left(\frac{1}{2}(h_+ + h_-) - \frac{h_c^3}{h_+h_-} \right) = 0$$

Para una discontinuidad en la superficie $h_+ \neq h_-$, entonces la relación entre los valores límite h_- y h_+ es

$$h_+ = \frac{1}{2} \left\{ -h_- + \sqrt{h_-^2 + \frac{8h_c^3}{h_-}} \right\}. \quad (3.1.20)$$

Por otra parte, la condición de periodicidad $\zeta(h_-) = \zeta(h_+) + 2l$ permite obtener una ecuación más, que junto a (3.1.20) permita obtener los valores de h_- y h_+ . Esta condición es

$$h_- - h_+ - 2l + k_1 \log \left(\frac{h_- - h_A}{h_+ - h_A} \right) - k_2 \log \left(\frac{h_- - h_B}{h_+ - h_B} \right). \quad (3.1.21)$$

Sin embargo las relaciones (3.1.20) y (3.1.21) sólo definen a h_- y h_+ implícitamente y dependen de h_c .

Ahora el objetivo consiste en encontrar una relación entre la discontinuidad estacionaria y las condiciones iniciales del problema. Con este propósito se define el promedio de una función $\phi(\zeta)$ en un período como

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} \phi(\zeta, t^*) d\zeta. \quad (3.1.22)$$

Por lo tanto, al promediar la ecuación de conservación de masa (3.1.1) se obtiene

$$\overline{h_{t^*}} + \overline{(u^*h)_\zeta} = 0.$$

Dado que h es periódica el promedio de la conservación de masa se reduce a la condición

$$\overline{h_{t^*}} = 0.$$

En consecuencia $\overline{h(t^*)}$ es una constante. Al evaluar en $t^* = 0$ se obtiene el valor de esta constante (ecuación (2.1.2a))

$$\overline{h(t^*)} = 1 + \epsilon \bar{f}. \quad (3.1.23)$$

El promedio de la ecuación de conservación de momento (3.1.2) es

$$\overline{(hu^*)_{t^*}} + \overline{(u^{*2}h + \frac{1}{2}h^2)_\zeta} = \bar{h} - \frac{\overline{(u^* + c)^2}}{F^2}.$$

De nuevo la periodicidad de h y u simplifica esta última relación. Entonces el promedio de la conservación de momento se escribe como

$$\overline{(hu^*)_{t^*}} = \bar{h} - \frac{\overline{(u^* + c)^2}}{F^2} = 1 + \epsilon \bar{f} - \frac{\overline{(u^* + c)^2}}{F^2}. \quad (3.1.24)$$

En general, el lado derecho de esta ecuación es diferente de cero pues el sistema no está en equilibrio, por lo que el promedio del momento no es constante, sino depende del tiempo.

Sustituyendo el perfil $\zeta(h)$ dado por la ecuación (3.1.15) en la relación (3.1.23) se encuentra que

$$\frac{1}{2l} \int_{\zeta_s - 2l}^{2l} h \, d\zeta = \frac{1}{2l} \int_{h_+}^{h_-} h \frac{d\zeta}{dh} \, dh = 1 + \epsilon \bar{f},$$

donde ζ_s es el lugar donde se encuentra el salto hidráulico. Al integrar por partes esta relación y usar el hecho que $\zeta(h_-) = \zeta(h_+) + 2l$ se obtiene

$$h_+ + \frac{1}{2l}(h_- - h_+)\zeta_s - \frac{1}{2l} \int_{h_+}^{h_-} \zeta(h) \, dh = 1 + \epsilon \bar{f}. \quad (3.1.25)$$

En consecuencia el perfil inicial define, aunque de manera implícita, la velocidad del salto hidráulico, así como los valores h_- y h_+ (y las velocidades u_- y u_+). Hasta este momento las relaciones obtenidas son exactas y su solución depende de un método numérico de la misma manera como la ecuación (1.4.12). El paso siguiente consiste en aplicar estos resultados en la ecuación (2.2.37).

3.2 Relaciones para la aproximación por perturbaciones

En el capítulo 2 se encontró que la ecuación (2.2.37) define el comportamiento para tiempos largos de h y u pues

$$h(x, t) = 1 + \frac{\epsilon}{2}s(x - 3t, \tilde{t}),$$

$$u(x, t) = F + \epsilon(\alpha + \frac{1}{2}s(x - 3t, \tilde{t})).$$

Dado que el salto hidráulico es un perfil fijo en el tiempo, se considerará que s^* es el valor asintótico de s cuando $t \rightarrow \infty$ aproxima al salto hidráulico. Por lo tanto h y u quedan expresadas como

$$h = 1 + \frac{1}{2}\epsilon s^*, \quad (3.2.1)$$

$$u = 1 + \epsilon(\alpha + \frac{s^*}{2}), \quad (3.2.2)$$

donde $s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} s(x - 3t, \tilde{t})$.

Para ecuaciones lineales la velocidad de propagación de una discontinuidad está dada por la velocidad definida mediante las características. Sin embargo, para el caso no lineal la velocidad de la onda de choque es mayor que la definida por las características. La función s depende de $\xi = x - 3t$ y \tilde{t} , por lo que se considerará que la velocidad del salto hidráulico c es cercana y mayor que la pendiente de la característica $\mathfrak{3}$, es decir

$$c = 3 + \epsilon\beta + O(\epsilon^2). \quad (3.2.3)$$

Entonces $c > u$. El salto hidráulico es más rápido que la velocidad del flujo. En consecuencia el cambio de variables $\zeta = x - ct$ corresponde a

$$\zeta = x - 3t - \epsilon\beta t = \xi - \beta\tilde{t}. \quad (3.2.4)$$

Por lo que las relaciones para las derivadas parciales son

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = -\beta \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Usando estas relaciones la ecuación (2.2.37) se reescribe de la manera siguiente

$$(\alpha - \beta + \frac{3}{4}s^*)s_\zeta^* = \frac{\alpha}{4}s^* + \frac{\alpha}{8}\exp(\zeta/2)\exp(\beta\tilde{t}) \left(\begin{array}{l} \int_{-l+\beta\tilde{t}}^{l+\beta\tilde{t}} s^* \exp(-\nu/2) d\nu \\ + \frac{\exp l}{1 - \exp l} \int_{-l+\beta\tilde{t}}^{l+\beta\tilde{t}} s^* \exp(-\nu/2) d\nu \end{array} \right),$$

al hacer un cambio de variables las integrales se simplifican obteniendo

$$(\alpha - \beta + \frac{3}{4}s^*)s_\zeta^* = \frac{\alpha}{4}s^* + \frac{\alpha}{8}\exp(\zeta/2) \left(\begin{array}{l} \int_{-l}^{\zeta} s^* \exp(-\nu/2) d\nu \\ + \frac{\exp l}{1 - \exp l} \int_{-l}^l s^* \exp(-\nu/2) d\nu \end{array} \right). \quad (3.2.5)$$

Considerando el cambio de variable (3.2.4) la condición de salto (2.2.31) se escribe como

$$\alpha - \beta + \frac{3}{8}(s_+^* + s_-^*) = 0. \quad (3.2.6)$$

Si se deriva la ecuación (3.2.5) con respecto a ζ y se eliminan los términos integrales, se obtiene

$$\frac{3}{4}s_\zeta^{*2} + (\alpha - \beta + \frac{3}{4}s^*)s_{\zeta\zeta}^* - s_\zeta^* (\frac{3}{4}\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{3}{8}s^*) = 0,$$

Mediante algunas simplificaciones la ecuación anterior se expresa como derivada total con respecto a ζ , sin los términos integrales

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \{16(\alpha - \beta)s^{*2} + 6s^*\} = \frac{d}{d\zeta} \{3s^{*2} + 4(3\alpha - 2\beta)s^*\}. \quad (3.2.7)$$

Que al ser integrada se expresa como

$$s_{\zeta}^*(\alpha - \beta + \frac{3}{4}s^*) = \frac{3}{16}\{s^{*2} + \frac{4}{3}(3\alpha - 2\beta)s^* + K_1\}. \quad (3.2.8)$$

donde K_1 es la constante de integración. Las expansiones (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3) describen a u_c^2 y h_c como

$$u_c^{*2} = (u - c)^2 = \{2 + \epsilon(\alpha + \frac{1}{2}s^*) - (3 + \epsilon\beta) + O(\epsilon^2)\}^2,$$

$$h_c = 1 + \frac{1}{2}\epsilon s^*.$$

Exigiendo la condición de velocidad crítica (3.1.8) para orden ϵ se obtiene

$$s_c^* = \frac{4}{3}(\beta - \alpha). \quad (3.2.9)$$

Entonces, en el punto en que la velocidad es crítica el término a la izquierda de la ecuación (3.2.8) se hace cero de manera similar a la ecuación (3.1.10). Basándose en el argumento del punto de inflexión utilizado en la sección anterior, el lado derecho de la ecuación (3.2.8) también se tiene que anular en $s = s_c$. Usando el valor de s_c obtenido en la relación (3.2.9) se encuentra el valor de la constante K_1 . Este valor es

$$K_1 = \frac{16}{9}(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha). \quad (3.2.10)$$

En consecuencia la ecuación (3.2.8) se escribe como

$$\frac{ds^*}{d\zeta} = \frac{3}{16} \frac{s^{*2} + (4/3)(3\alpha - 2\beta)s^* + (16/9)(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)}{\alpha - \beta + (3/4)s^*},$$

Esta relación se simplifica al factorizar el monomio correspondiente a la raíz en $s = s_c$ tanto del denominador como del numerador. Entonces s^* satisface

$$\frac{ds^*}{d\zeta} = \frac{1}{4}(s^* - \frac{4}{3}(\beta - 2\alpha)). \quad (3.2.11)$$

Esta ecuación define $\zeta = \zeta(s^*)$,

$$\frac{d\zeta}{ds^*} = \frac{4}{s^* - (4/3)(\beta - 2\alpha)}. \quad (3.2.12)$$

De igual manera que en la sección anterior se fijó $h(-l) = 1 = 1 + (\epsilon/2)s^*$, por lo que $s^*(-l) = 0$. Entonces el perfil $\zeta = \zeta(s^*)$ corresponde a

$$\zeta = -l + 4 \log \left| 1 + \frac{3s^*}{4(2\alpha - \beta)} \right|, \quad (3.2.13)$$

A diferencia de la ecuación (3.1.15), la ecuación (3.2.13) permite encontrar $s^*(\zeta)$ explícitamente

$$s^*(\zeta) = \frac{4(2\alpha - \beta)}{3} \left(\exp \left(\frac{\zeta + l}{4} \right) - 1 \right). \quad (3.2.14)$$

Usando la condición de periodicidad $\zeta = \zeta + 2l$, la ecuación (3.2.13) también se escribe como

$$\zeta = l + 4 \log \left| 1 + \frac{3s^*}{4(2\alpha - \beta)} \right|. \quad (3.2.15)$$

Ahora hay que encontrar los valores límite s_-^* y s_+^* . Usando las relaciones (3.2.12), (3.2.14) y la condición de periodicidad $\zeta(s_-^*) = 2l + \zeta(s_+^*)$ se obtiene

$$-l + 4 \log \left| 1 + \frac{3s_-^*}{4(2\alpha - \beta)} \right| = l + 4 \log \left| 1 + \frac{s_+^*}{4(2\alpha - \beta)} \right|. \quad (3.2.16)$$

Que, de manera análoga a (3.1.20) define la relación entre s_+ y s_- . Utilizando la relación de discontinuidad (3.2.6) se pueden encontrar las expresiones exactas s_-^* y s_+^*

$$s_-^* = \frac{4}{3} \left(\beta + \frac{2\alpha}{\exp(l/2) + 1} \right) \quad (3.2.17)$$

y

$$s_+^* = \frac{4}{3} \left(\beta - \frac{2\alpha}{\exp(l/2) + 1} \right). \quad (3.2.18)$$

Sin embargo, no se conoce aun la velocidad de propagación c pues se desconoce el valor de β . Al sustituir (3.2.17) en (3.2.15) se encuentra el lugar del salto $\zeta = \zeta_s$. Este es

$$\zeta_s = -4 \log \left| \frac{(2\alpha - \beta)}{\alpha} \cosh \frac{l}{4} \right|. \quad (3.2.19)$$

Sólo falta encontrar la velocidad del salto hidráulico pues ya conocemos tanto el perfil como la velocidad de éste. Una vez más se usará el promedio definido en (3.1.22), y la relación (3.1.23), donde

$$\overline{h(t^*)} = 1 + \epsilon \overline{f} = 1 + \epsilon \frac{\overline{s^*}}{2}.$$

Por lo tanto

$$\overline{s^*} = 2\overline{f}. \quad (3.2.20)$$

Usando la expresión de s^* establecida por la ecuación (3.2.14) se obtiene

$$8 \exp(\zeta_s/4) \sinh\left(\frac{l}{4}\right) - 2l = \overline{f}.$$

Al sustituir ζ_s dada por la relación (3.2.19) en esta ecuación y después de algunas manipulaciones se encuentra β explícitamente dada por

$$\beta = \frac{3\overline{f}}{2} + 2\alpha \left(1 - \frac{2}{l} \tanh \frac{l}{4}\right). \quad (3.2.21)$$

Con ella se pueden encontrar los valores que definen el salto hidráulico para el caso ligeramente inestable. Dada la inestabilidad del sistema el perfil estacionario final para $s(\xi, \tilde{t})$ para $t \rightarrow \infty$ es el generado mediante las relaciones del salto hidráulico. El perfil final consiste en un arco de exponencial cuya amplitud es mayor si α también lo es. Pues al sustituir β de la expresión (3.2.20) en la relación (3.2.13) se obtiene

$$s = \left(\frac{4\alpha}{l} \tanh \frac{l}{4} - \frac{3\overline{f}}{2}\right) \left(\exp \frac{\zeta - l}{4} - 1\right).$$

De la misma manera la velocidad del salto es mayor si α aumenta. Asimismo, la constante β es la misma para dos funciones del mismo período pero con el mismo promedio en la condición inicial \bar{f} .

En resumen, el salto hidráulico se mueve a la derecha con una altura h_- mayor que h_+ con velocidad mayor a la del flujo. La discontinuidad disipa energía de tal manera que el perfil es estacionario. La evolución de la condición inicial para el caso ligeramente inestable tarda un tiempo infinito en formar el salto hidráulico y el perfil éste para la aproximación de dos escalas de tiempo consiste en un arco de exponencial creciente en ζ . En el sistema de referencia con velocidad igual a la del salto la velocidad al frente de éste es supercrítica y la velocidad atrás del mismo es subcrítica.

Conclusiones

Las hipótesis involucradas en el estudio por medio del modelo de aguas someras hecho en este trabajo son usuales para problemas de Hidráulica. Es decir, considerar al flujo como incompresible y bidimensional, además de considerar a la presión como hidrostática. Una vez hechas estas suposiciones se agrega un término de disipación asociada a la viscosidad.

El modelo definido por las ecuaciones de conservación de masa y evolución de momento, con las variables h y u acopladas, es cuasilineal. No es posible encontrar una solución analítica exacta que describa las ondas rodantes como una evolución de perturbaciones iniciales. Las únicas soluciones exactas son correspondientes a perfiles estacionarios, es decir el flujo uniforme $h = 1$, $u = F$ ó el caso del salto hidráulico. La evolución de las ondas rodantes se describe mediante simulaciones numéricas. Sin embargo, en este trabajo se encuentra una aproximación que describe éste fenómeno. Primero, mediante la aproximación lineal, se encuentra que el sistema de ecuaciones es inestable cuando el número de Froude F es mayor que 2. Por lo tanto, para $F > 2$ el sistema generará ondas rodantes periódicas que eventualmente se convertirán en saltos hidráulicos. Es decir, el fenómeno de las ondas rodantes se debe a la inestabilidad del sistema cuando la aceleración debida a la gravedad excede en cierta proporción a la disipación asociada a la viscosidad.

Para el caso ligeramente inestable, la aproximación por el método de dos tiempos describe el sistema para tiempos del orden $O(1/\epsilon)$ mediante una sola ecuación integro-

diferencial no lineal. La solución numérica de esta ecuación es más sencilla que la que describe el problema completo. Además, exige que el perfil permanezca acotado para todo $t > 0$. Otra consecuencia, consiste en que el perfil de la perturbación inicial evolucionará en un tiempo infinito hacia un arco de exponencial cuya velocidad será mayor que la del flujo.

Sin embargo, el modelo no predice el comportamiento para números de Froude mucho más grandes que 2. Tal y como lo señala Mayer [M] para canales muy inclinados se rompe la condición de regularidad de el patrón (los frentes de onda formando rectas perpendiculares al flujo río abajo) debido a la turbulencia, pues las velocidades y las presiones serían muy grandes, generándose flujos en la dirección z .

Queda como trabajo posterior el estudio numérico de la ecuación (2.2.27) para diversas condiciones iniciales, comparándola con la solución numérica al problema completo (1.4.10). Además de extender todo el estudio a perturbaciones iniciales no periódicas con el objeto de verificar por lo menos cualitativamente, la interacción entre dos ondas rodantes con diferente velocidad, en consecuencia de diferente tamaño, para el caso ligeramente inestable.

También se puede extender el modelo al considerar que la constante $\sigma = H_0/B_0$ no es cero sino que ésta sea de orden ϵ , con objeto de establecer una estimación del efecto de las paredes sobre la velocidad y el perfil de la onda rodante, así como el del salto hidráulico para el caso $F + \epsilon\alpha$.

Apéndice I

Estudio de términos seculares en el método de dos escalas de tiempo

En la sección (2.2) se encuentra que la solución a primer orden para el método de dos escalas de tiempo es (ecuaciones (2.1.12) y (2.2.13))

$$R_1(\xi, \eta, \tilde{t}) = r(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{y} \quad (I.1)$$

$$S_1(\xi, \eta, \tilde{t}) = q(\eta, \tilde{t}) \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) + s(\xi, \tilde{t}). \quad (I.2)$$

Donde $q(\eta, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \int^{\eta} r(\nu, \tilde{t}) d\nu$. Sin embargo se desconoce la dependencia tanto de r como de s con respecto a \tilde{t} . Esta dependencia se encontrará al sustituir las soluciones S_1, R_1 en la ecuación a orden ϵ . El sistema tiene soluciones periódicas, por lo tanto, $s(\xi, \tilde{t}) r(\eta, \tilde{t}) \exp(\xi/2)$ y $q(\eta, \tilde{t}) \exp(\xi/2)$ son periódicas. Al definir $r(\eta, \tilde{t}) = \tilde{r} \exp(-\eta/2)$ y $q = \tilde{q} \exp(-\eta/2)$ permite considerar a \tilde{r} y \tilde{q} periódicas en x pues

$$r \exp(\xi/2) = \tilde{r} \exp\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) = \tilde{r} \exp(-t), \quad (I.3)$$

y

$$q \exp(\xi/2) = \tilde{q} \exp\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) = \tilde{q} \exp(-t), \quad (I.4)$$

lo son.

Para orden ϵ^2 el sistema asociado es (ecuaciones (2.2.5a,b))

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -h_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)h_{1x} - h_1u_{1x} \\ -u_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)u_{1x} + \frac{\alpha u_1}{2} - (h_1 - \frac{u_1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (I.5a, b)$$

Para el estudio del sistema a orden ϵ^2 es necesario sustituir las funciones $h_1 = (S_1 + R_1)/2$ y $u_1 = (S_1 - R_1)/2$ en el lado derecho (términos n_1 y n_2) del sistema (I.5). Para n_1 se obtiene

$$\begin{aligned} -h_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)h_{1x} - h_1u_{1x} &= -\frac{1}{2}(S_{1\bar{t}} + R_{1\bar{t}}) - \frac{1}{4}(2\alpha + S_1 - R_1)(S_{1x} + R_{1x}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(S_1 + R_1)(S_{1x} - R_{1x}) = n_1. \end{aligned}$$

Al expresar esta última relación en función de ξ y η se encuentra que

$$\begin{aligned} -h_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)h_{1x} - h_1u_{1x} &= -\frac{1}{2}(S_{1\bar{t}} + R_{1\bar{t}}) - \frac{1}{2}(\alpha + S_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha - R_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) = n_1. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Análogamente el término del lado derecho (n_2) de la ecuación (I.5b) se expresa como

$$\begin{aligned} -u_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)u_{1x} + \frac{\alpha u_1}{2} - (h_1 - \frac{u_1}{2})^2 &= -\frac{1}{2}(S_1 - R_1)\bar{t} \\ &\quad - \frac{1}{4}(2\alpha + S_1 - R_1)(S_1 - R_1)_x + \frac{\alpha}{4}(S_1 - R_1) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2. \end{aligned}$$

Expresándolo en función de $\xi = x - 3t$ y $\eta = x - t$ se obtiene

$$\begin{aligned} -u_{1\bar{t}} - (\alpha + u_1)u_{1x} + \frac{\alpha u_1}{2} - (h_1 - \frac{u_1}{2})^2 &= -\frac{1}{2}(S_{1\bar{t}} - R_{1\bar{t}}) - \frac{1}{4}(2\alpha + S_1 - R_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(2\alpha + S_1 - R_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) + \frac{\alpha}{4}(S_1 - R_1) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2 = n_2. \end{aligned} \quad (I.7)$$

Al diagonalizar la matriz mediante la transformación (2.2.7), el sistema (I.5) toma la forma siguiente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_2 \\ R_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ R_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ R_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \\ = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (I.8)$$

que en el cambio de variables ξ, η queda como

$$2S_{2\eta} = R_2 + n_1 + n_2, \quad (I.9)$$

$$-2R_{2\xi} = -R_2 + n_1 - n_2. \quad (I.10)$$

Al escribir la ecuación (I.9) en términos de R_1, S_1 toma la forma (ecuación (2.2.15))

$$\begin{aligned} S_{2\eta} = \frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2}S_{1\bar{i}} - \frac{1}{8}(4\alpha + 3S_1 - R_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) \\ + \frac{1}{8}(R_1 + S_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2 \end{aligned} \quad (I.11)$$

Correspondiendo a la ecuación (I.10) la relación

$$\begin{aligned} R_{2\xi} - \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{2}R_{1\bar{i}} + \frac{1}{8}(4\alpha - 3R_1 + S_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) \\ + \frac{1}{8}(R_1 + S_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2, \end{aligned} \quad (I.12)$$

Análisis para la ecuación (I.12)

Todos los términos no homogéneos de la ecuación(I.12) tienen que ser integrados con respecto a ξ . Al multiplicar la ecuación (I.12) por el factor integrante $\exp(-\xi/2)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (R_2 \exp(-\xi/2)) = \exp\left(\frac{-\xi}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2}R_{1\bar{i}} + \frac{1}{8}(4\alpha + S_1 - 3R_1)(R_{1\eta} + R_{1\xi}) \right. \\ + \frac{1}{8}(S_1 + R_1)(S_{1\eta} + S_{1\xi}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (I.13)$$

Al sustituir las soluciones (I.1) y (I.2) del sistema a orden ϵ en la ecuación para R_2 (I.13) y considerando que $q_\eta = r/2$ se encuentra la ecuación siguiente (ecuación (2.2.17))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(R_2 \exp(-\xi/2)) &= \frac{1}{2} \left[r_{\tilde{t}} + \alpha r_\eta + \frac{1}{4} \alpha r + \frac{1}{4} \alpha q \right] & (T_1) \\ &+ \frac{1}{8} \exp(-\xi/2) \left[s s_\xi + \alpha s - \frac{1}{4} s^2 \right] & (T_2) \\ &+ \frac{1}{8} \exp(\xi/2) \left[q r_\eta - 3 r r_\eta - \frac{13}{4} r^2 + \frac{1}{4} q^2 \right] & (T_3) \\ &+ \frac{1}{8} \left[s r_\eta - \frac{r s}{2} + s_\xi r + s_\xi q \right]. & (T_4) \end{aligned} \quad (I.14)$$

Donde $r = r(\eta, \tilde{t})$, $q = q(\eta, \tilde{t})$ y $s = s(\eta, \tilde{t})$. Al introducir la variable lenta $\tilde{t} = \epsilon t$ es necesario exigir que las funciones r y s no generen soluciones no acotadas en R_2 y S_2 cuando el tiempo es muy grande †. Por lo tanto se estudiará la contribución de cada término T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) tanto a la solución R_2 como para S_2 .

Los términos incluidos en T_1 sólo dependen de η y \tilde{t} . En consecuencia al integrar con respecto a ξ se produce una contribución

$$\frac{\xi}{2} \exp(\xi/2) \left(r_{\tilde{t}} + \alpha r_\eta + \frac{1}{4} \alpha r + \frac{1}{4} \alpha q \right).$$

Al expresarlo en función de \tilde{r} y \tilde{q} (ecuaciones (I.3) y (I.4)) tomando en cuenta que $r_\eta = (\tilde{r} \exp(-\eta/2))_\eta = \left(\tilde{r}_\eta - \frac{\tilde{r}}{2} \right) \exp(-\eta/2)$ se encuentra que

$$\frac{\xi}{2} \exp(-t) \left(\tilde{r}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{r}_\eta - \alpha \frac{\tilde{r}}{2} + \frac{1}{4} \alpha \tilde{r} + \frac{1}{4} \alpha \tilde{q} \right). \quad (I.15)$$

Hay que notar que la amplitud del término (I.16) crece indefinidamente conforme a x (pues $\xi = x - 3t$). Por lo tanto este término es inaceptable.

† Esta exigencia proviene de que tanto R_2 como S_2 son expansiones asintóticas de la solución.

Al integrar la suma en el término (T_2) se obtiene

$$\frac{1}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} (ss_{\xi} + \alpha s - \frac{1}{4}s^2) \exp(-\nu/2) d\nu, \quad (I.16)$$

que no crece indefinidamente. Sin embargo, considerando que $s = s(\xi, \tilde{t})$, este término presentará problemas al integrar R_2 con respecto η (ecuación (I.11)) pues aparecerá la variable η

$$\frac{\eta}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} (ss_{\xi} + \alpha s - \frac{1}{4}s^2) \exp(-\nu/2) d\nu,$$

que es un caso análogo a la ecuación (I.15) pues su amplitud crece conforme a x ($\eta = x - t$).

Con respecto al término (T_3) es fácil notar que la única dependencia con respecto a ξ proviene de $\exp(\xi/2)$, por lo tanto después de integrarlo presentará un comportamiento

$$\frac{\exp(\xi/2)}{16} \left(qr_{\eta} - 3rr_{\eta} - \frac{13}{4}r^2 + \frac{1}{4}q^2 \right).$$

Al expresarlo en función de \tilde{q} y \tilde{r} se obtiene

$$\frac{\exp(-2t)}{16} \left(\tilde{q}\tilde{r}_{\eta} - \frac{\tilde{q}\tilde{r}}{2} - 3\tilde{r}\tilde{r}_{\eta} - \frac{7}{4}\tilde{r}^2 + \frac{1}{4}\tilde{q}^2 \right). \quad (I.17)$$

Estos términos están acotados si \tilde{r} y \tilde{q} no crecen más rápido que $\exp(-t)$, consideración que se justificará posteriormente.

Finalmente el término (T_4)

$$\frac{1}{8} \exp(-\xi/2) \left[\left(r_{\eta} - \frac{r}{2} \right) \int^{\xi} s(\nu, \tilde{t}) d\nu + (q + r)s \right],$$

se reescribe como

$$\frac{1}{8} \exp(-t) \left[(\tilde{r}_{\eta} - \tilde{r}) \int^{\xi} s(\nu, \tilde{t}) d\nu + (\tilde{q} + \tilde{r})s \right]. \quad (I.18)$$

Esta expresión está acotada si q , r y s lo están.

Por lo tanto para tener consistencia en la expansión al integrar con respecto a η se exigirá que el término (T_1) en la ecuación (I.14) sea cero, es decir

$$r_{\tilde{t}} + \alpha r_{\eta} + \frac{\alpha}{4}r + \frac{\alpha}{4}q = 0, \quad (I.19)$$

donde $q(\eta, \tilde{t}) = (1/2) \int^{\eta} r(\nu, \tilde{t}) d\nu$. Esta es la primera condición para que el sistema esté acotado. Estos términos se llaman “términos seculares” en Teoría de Perturbaciones. De esta manera se determina r en función de η y \tilde{t} . También se considerará el sumando (I.16) al momento de integrar con respecto a ξ .

Análisis para la ecuación I.11

Al integrar (I.11) se determina S_2 .

$$\begin{aligned} S_{2\eta} = & \frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2}S_{1\tilde{t}} - \frac{1}{8}(4\alpha + 3S_1 - R_1)(S_{1\xi} + S_{1\eta}) \\ & + \frac{1}{8}(R_1 + S_1)(R_{1\xi} + R_{1\eta}) + \frac{\alpha}{8}(S_1 - R_1) \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(S_1 + 3R_1) \right]^2. \end{aligned}$$

Donde R_2 contiene los términos (I.16), (I.17) y (I.18). Los términos (I.17) y (I.18) permanecen acotados después de integrar con respecto a η , por lo tanto de R_2 sólo tomaremos en cuenta al sumando (I.16).

Al reescribir la ecuación (I.11) en términos de s , r y q se obtiene (ecuación (2.2.20))

$$\begin{aligned} S_{2\eta} = & \frac{1}{2}R_2 \\ & - \frac{1}{2} \left(s_{\tilde{t}} + \alpha s_{\xi} + \frac{3}{4}ss_{\xi} + \frac{1}{16}s^2 - \frac{\alpha}{4}s \right) \quad (T_5) \\ & - \frac{1}{2} \exp(\xi/2) \left(q_{\tilde{t}} + \frac{3}{4}qs_{\xi} - \frac{1}{4}rs_{\xi} + \frac{3}{4}\alpha r + \frac{5}{8}sr + \frac{\alpha}{4}q + \frac{1}{2}sq - \frac{1}{4}sr_{\eta} \right) \quad (T_6) \\ & - \frac{\exp(\xi)}{4} \left(qr + \frac{7}{8}q^2 - \frac{5}{8}r^2 - \frac{1}{2}qr_{\eta} - \frac{1}{2}rr_{\eta} \right). \quad (T_7) \end{aligned} \quad (I.20)$$

Los términos en (T_5) no dependen de η por lo que junto a los términos provenientes de R_2 deberán ser cero. Por otra parte tanto los términos (T_6) como (T_7) generan funciones acotadas (una vez más sustituyendo \tilde{r} y \tilde{q}). El sumando (I.16) proveniente de R_2 es

$$\frac{\exp(\xi/2)}{8} \int^{\xi} (s s_{\xi} + \alpha s - \frac{1}{4} s^2) \exp(-\nu/2) d\nu = \frac{\alpha}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu + \frac{s^2}{16} + C_1.$$

Al sumarlo con el término (T_5) y pedir que la suma sea cero se obtiene

$$s_{\tilde{t}} + \left(\alpha + \frac{3}{4} s \right) s_{\xi} - \frac{\alpha}{4} s - \frac{\alpha}{8} \exp(\xi/2) \int^{\xi} s \exp(-\nu/2) d\nu - \frac{\alpha \exp(\xi/2)}{8} C_1 = 0. \quad (I.21)$$

Esta es la ecuación (2.2.21), en esta ecuación se eliminan los términos seculares asociados a s por lo que se determina su dependencia con respecto a ξ y \tilde{t} .

Apéndice II

Las Relaciones de Rankine-Hugoniot

En este apéndice se encuentran las relaciones que rigen una discontinuidad, es decir los valores de las variables que la determinan para sistemas de ecuaciones de conservación.

Sea el sistema de ecuaciones de conservación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \psi_1(u(x,t), h(x,t), x, t) dx &= \phi_1(u(x_1), h(x_1), x, t) \\ &\quad - \phi_1(u(x_2), h(x_2), x, t) + \int_{x_1}^{x_2} \Lambda_1(u(x), h(x), x, t) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \psi_2(u(x,t), h(x,t), x, t) dx &= \phi_2(u(x_1), h(x_1), x, t) \\ &\quad - \phi_2(u(x_2), h(x_2), x, t) + \int_{x_1}^{x_2} \Lambda_2(u(x), h(x), x, t) dx. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de conservación (1.4.4) y (1.4.5). Si las funciones ψ_i, ϕ_i , son continuas con primeras derivadas continuas para todo $x \in [x_1, x_2]$, el sistema (II.1) es equivalente al sistema de relaciones de divergencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 - \Lambda_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial x} \phi_2 - \Lambda_2 &= 0. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Para el caso de un salto hidráulico se supone que las relaciones (II.1) permanecen válidas, aunque las funciones ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 y ψ_2 no son continuas. Esta suposición da buenos

resultados en el estudio de ondas de choque, que en el caso de aguas someras corresponde a saltos hidráulicos. Un salto hidráulico es una discontinuidad en el perfil h y en la velocidad u . Sea $\xi = \xi(t)$ la discontinuidad que define el salto hidráulico.

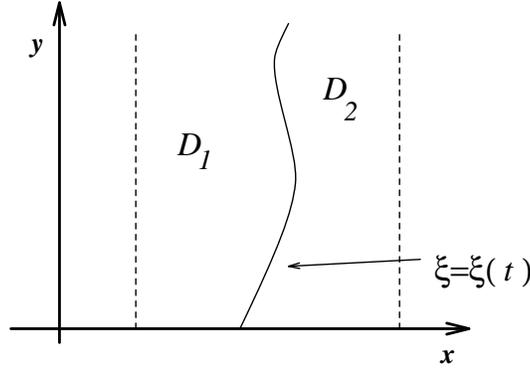


Figura I. Salto hidráulico $\xi(t)$ y regiones D_1 y D_2 .

La función $\xi = \xi(t)$ divide el dominio $[x_1, x_2]$ en $D_1 : x_1 \leq x < \xi(t)$ y $D_2 : \xi(t) < x \leq x_2(t)$. Además ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 y ψ_2 son continuas y tienen primeras derivadas continuas en D_1 y D_2 . Entonces la integral de ψ_i es ($i = 1, 2$)

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_i(u, h, x, t) dx = \int_{x_1}^{\xi(t)} \psi_i(u, h, x, t) dx + \int_{\xi(t)}^{x_2} \psi_i(u, h, x, t) dx. \quad (II.3)$$

Al aproximar ψ_j en serie de Taylor alrededor del valor $\xi(t)$ por la izquierda se obtiene

$$\psi_i(u, h, x, t) = \psi_i(u, h, \xi, t) + \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(u_-, h_-, \xi_-, t)(\xi(t) - x) + O(\xi(t) - x),$$

donde $h_- = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^-} h(x, t)$ y $u_- = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^-} u(x, t)$. De manera análoga se definen los límites por la derecha h_+, u_+ y las correspondientes a $\psi_{i\pm}, \phi_{i\pm}$. Entonces al integrar esta última ecuación de x_1 a $\xi(t)$ se obtiene la siguiente aproximación para primer orden

$$\int_{x_1}^{\xi(t)} \psi_i(u, h, x, t) dx = \psi_i(u_-, h_-, \xi, t)(\xi(t) - x_1) + O((\xi(t) - x_1)^2).$$

Por lo tanto, al integrar de x_1 a x_2 se encuentra que cerca de la discontinuidad se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \psi_i(u, h, x, t) dx &= \psi_i(u_-, h_-, \xi, t)(\xi - x_1) - \psi_i(u_+, h_+, \xi, t)(\xi - x_2) \\ &= \psi_{i-}(\xi - x_1) - \psi_{i+}(\xi - x_2) + O((\xi - x_1)^2) + O((\xi - x_2)^2). \end{aligned} \quad (II.4)$$

Haciendo expansiones similares alrededor de $\xi(t)$ para ϕ_1 y ϕ_2

$$\phi_i(u(x_1), h, x, t) - \phi_i(u(x_2), h, x, t) \approx \phi_{i-} - \phi_{i+} + \frac{\partial \phi_{i-}}{\partial x}(\xi(t) - x_1) - \frac{\partial \phi_{i+}}{\partial x}(\xi(t) - x_2).$$

Y los términos asociados a Λ_i serán

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda_i dx \approx \Lambda_{i-}(\xi - x_1) - \Lambda_{i+}(\xi - x_2).$$

Al derivar con respecto al tiempo la relación (II.4) se encuentra la siguiente expresión para primer orden

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \psi_i dx = -\frac{d\xi}{dt}(\psi_{i+} - \psi_{i-}) = -\frac{d\xi}{dt}[\psi_i] + O(\xi - x_1) + O(\xi - x_2).$$

Donde los corchetes denotan los valores límite cerca de la discontinuidad para la función $[\psi_i] = (\psi_{i+} - \psi_{i-})$. Por lo tanto, al hacer los límites $x_1 \rightarrow \xi^-, x_2 \rightarrow \xi^+$ en la relación I.1, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}[\psi_1] &= [\phi_1], \quad y \\ \frac{d\xi}{dt}[\psi_2] &= [\phi_2]. \end{aligned} \quad (II.5)$$

Estas relaciones son conocidas en dinámica de gases como las relaciones de Rankine-Hugoniot para la velocidad de propagación de una discontinuidad. Para el caso de las ecuaciones (1.4.4) y (1.5.5) $\psi_1 = h$, $\psi_2 = uh$, $\phi_1 = uh$, $\phi_2 = hu^2 + (h^2/2)$ y $\Lambda_1 = 0$,

$\Lambda_2 = h - (u^2/F^2)$. En consecuencia las relaciones de salto (II.5) corresponden a

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}[h] &= [hu], \quad \text{y} \\ \frac{d\xi}{dt}[hu] &= \left[hu^2 + \frac{1}{2}h^2 \right]. \end{aligned} \tag{II.6}$$

Es posible notar cierta similitud entre las ecuaciones (II.6) y las relaciones de divergencia (I.2) (ver Whitham [W]) ya que la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 + \frac{\partial}{\partial x}\phi_1 - \Lambda_1 = 0,$$

y la relación

$$\dot{\xi}[\psi_1] = [\phi_1],$$

permiten identificar los términos involucrados en la expresión que define la velocidad de la discontinuidad.

Las relaciones (II.6) definen la velocidad de la discontinuidad, sea un salto hidráulico o una onda de choque, así como los valores límite a la izquierda y derecha para el perfil h y la velocidad u . En las ecuaciones (1.4.4) y (1.4.5) se necesitan 2 ecuaciones, sin embargo para el caso de la aproximación para tiempos largos en la aproximación ligeramente inestable (ecuación (2.2.27)) sólo se necesita una de ellas para definir las características del salto hidráulico completamente.