

Dispersión y Atenuación de Ondas en una Suspensión de Varias Especies de Sólidos en Sólidos

Marcos Aurelio Capistrán Ocampo

Dedicatoria:

A mis padres y mis hermanos...

Agradecimientos:

Deseo agradecer al Dr. Federico Sabina por su valiosa dirección en este trabajo.

Otros agradecimientos:

A los sinodales, Dra. Maria del Carmen Jorge y Jorge, Dra. Cristina Piña Barba, Dr. Arturo Olvera Chávez, y Dr. Luis Quintanar Robles por sus oportunas correcciones y sugerencias al revisar la tesis. A fundación UNAM por la beca de tesis de licenciatura que me fue otorgada. Y a cada uno de los miembros del departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS por el respaldo que dan a los estudiantes y tesis-tas del mismo.

Asimismo agradezco a mi familia por el apoyo que me brindaron en todos estos años que estuve en la escuela.

Contents

1	Fundamentos	9
1.1	Introducción	9
1.2	Deformación	10
1.3	Ecuaciones de Movimiento	16
1.3.1	Conservación de Masa	18
1.3.2	Balance de Impetu	20
1.3.3	Balance de Momento Angular	22
1.3.4	Balance de Energía	23
1.4	Relaciones Constitutivas	25
1.5	Flujo de Energía	26
1.6	Ondas Planas	27
2	Dispersión de Ondas en una Dimensión	29
2.1	Introducción	29
2.2	Una Barra Finita de Plomo	30
2.3	Una Barra con un Dispersor	31
3	Un Material Compuesto	37
3.1	Introducción	37
3.2	Derivación de los Módulos Efectivos	38
4	Propagación de Ondas Elásticas	41
4.1	Introducción	41
4.2	El método autoconsistente de Sabina y Willis	41
4.3	El Problema de un Dispersor	46
4.4	Inclusiones Esféricas	50

5	Dos Especies de Inclusiones	55
5.1	Introducción	55
5.2	Una Población de Esferas de Plomo en Epon 828Z	56
5.3	Dos Poblaciones del Mismo Material	60
5.3.1	Pb/Epon 828Z	62
5.3.2	Fe/PMMA	65
5.3.3	Vidrio/TraCast	67
5.4	Dos Especies de Inclusiones de Diferente Material	68
5.4.1	Epon 828Z	69
5.4.2	PMMA	70
5.4.3	TraCast	71
A	La función de Green	75

Resumen

El propósito del presente trabajo es estudiar el efecto de una onda plana monocromática que se propaga en un material compuesto por una matriz elástica en la cual se hallan suspendidas una o más poblaciones de inclusiones esféricas, para analizar la forma en que éstas dispersan y atenúan la onda. En cada uno de los compuestos considerados la densidad de masa de las inclusiones es mayor que la del material matriz. El estudio se basa en las predicciones del modelo autoconsistente de [Sabina & Willis (1988)].

En el capítulo §1 se introduce el tensor de deformación y una interpretación geométrica para sus componentes. Se da en una forma simple la derivación de las leyes locales de conservación de masa y de balance de ímpetu, momento angular y energía a partir de los axiomas de la mecánica en que se postulan, en términos de la descripción euleriana para la posición de un punto en el espacio, es decir, las coordenadas espaciales. Se define un elemento apropiado para analizar las fuerzas aplicadas a través de la superficie de un cuerpo: la tracción $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$, que representa la fuerza por unidad de área aplicada en un punto $\mathbf{x}$ relativo a un elemento de área cuya normal exterior apunta en la dirección del vector normal unitario $\mathbf{n}$ y la forma en que fluye la energía en una superficie, en términos del tensor del esfuerzo y la tracción. También se da una breve discusión de la ecuación constitutiva que caracteriza a los sólidos linealmente elásticos cuando se trata de materiales isótropos. Finalmente se discute la manera en que las ondas planas se polarizan en un medio homogéneo e isótropo, que son las ondas longitudinales o P y las transversales o S .

En el capítulo §2 se analiza la dispersión de una onda plana que se

propaga sobre una barra elástica y heterogénea. Se motiva a partir de ese ejemplo una explicación de las curvas contra frecuencia para la rapidez de fase y atenuación en el caso de una onda longitudinal propagándose en un compuesto.

En el capítulo §3 se presenta *el método de energía de Budiansky* para calcular, en el caso estático, los módulos elásticos efectivos de un material compuesto como el que se ha descrito antes.

En el capítulo §4 se presenta *el método autoconsistente de Sabina y Willis* para calcular los módulos elásticos efectivos de un material compuesto en el caso dinámico (e.g. cuando se propaga una onda en el medio), planteando un problema de dispersión simple. También se presentan las ecuaciones de punto fijo para la densidad y el tensor de módulos elásticos efectivos que se obtienen con esta propuesta en el caso general en que sólo se pide que las inclusiones de una población tengan una misma forma y tamaño, y las ecuaciones correspondientes al caso de inclusiones esféricas.

En el capítulo §5 se dan las hipótesis para este trabajo y se describe cómo se contruyen las gráficas de la velocidad de fase y la atenuación contra frecuencia, en términos de cantidades adimensionales para facilitar la comparación entre diferentes resultados y materiales, a partir de las ecuaciones autoconsistentes del modelo de Sabina y Willis. En base a la interpretación de las gráficas de una mezcla con una población de esferas de Pb en Epon828x (epoxy), se han conseguido explicar algunas observaciones de lo que ocurre en el caso de dos poblaciones de igual o diferente material.

Finalmente se muestra un apéndice donde aparecen algunos detalles de la derivación de las ecuaciones autoconsistentes.

Capítulo 1

Fundamentos de Elasticidad

1.1 Introducción

Hay muchos aspectos del comportamiento de la materia que se pueden describir y predecir sin poner atención a su estructura molecular, como la propiedad que poseen los sólidos de deformarse cuando son sometidos a un esfuerzo, o el modo en que se vacía un tanque lleno de agua. La teoría que se ocupa de estudiar los fenómenos macroscópicos de la materia es la *mecánica del medio continuo*.

Intuitivamente es claro que tiempo y espacio se pueden identificar con un continuo de cuatro dimensiones. Extendiendo esa idea a la materia se habla de un material continuo como aquél en que están bien definidas en el sentido matemático, las densidades de masa, de ímpetu, de momento angular y de energía. Es decir, que en cualquier punto existe el límite de esas cantidades como funciones de la posición. Entonces, con esta teoría uno acepta la idea de que un volumen infinitesimal es una partícula de un continuo, y en cualquier vecindad de una partícula siempre hay partículas, aunque es equivocado justificar este enfoque por el número de moléculas que hay en un volumen dado, puesto que en el límite un volumen infinitesimal no contiene moléculas. Por tanto, el concepto de material continuo es una idealización del mundo real aplicable a problemas en que la estructura discreta de la materia se puede ignorar. Y se infiere que las cantidades que aparecen en la teoría se deben interpretar como ciertos promedios estadísticos.

La mecánica del medio continuo estudia la respuesta de la materia a diferentes condiciones de esfuerzo en términos de los conceptos tiempo, espacio, materia y energía, en dos partes. Primeramente los principios generales que son comunes a todos los medios como la conservación de masa y los balances de ímpetu, de momento angular y de energía. Y en segundo lugar las relaciones constitutivas que definen materiales idealizados. Por ejemplo, entre los materiales que tienen la propiedad de recuperar su forma original cuando el esfuerzo a que son sometidos se retira, es decir los materiales elásticos, bajo ciertas restricciones se dice que la deformación es proporcional al esfuerzo. Estos son los materiales linealmente elásticos. En el estudio de la propagación y dispersión de ondas elásticas, lo más apropiado es considerar al medio en que las ondas se propagan como linealmente elástico, porque las amplitudes de las ondas en cuestión son pequeñas. Alguna bibliografía sugerida para este tema es [Lay, Rubin & Krempel (1993)] y [Lin & Segel (1988)].

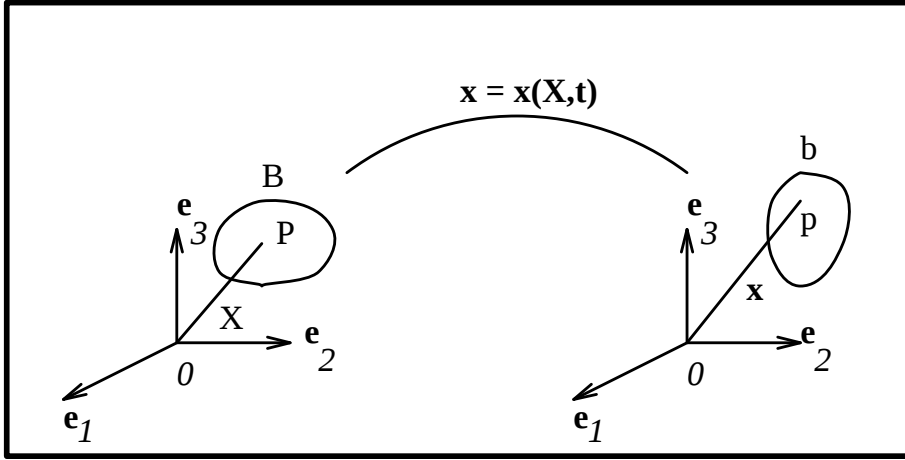
1.2 Deformación

Comúnmente se usan dos tipos de coordenadas para describir la posición de un punto del medio continuo en el espacio. Las coordenadas materiales $\mathbf{X}$ que corresponden a un tiempo inicial $t = t_0$, y las espaciales $\mathbf{x}$ para otro tiempo $t \neq t_0$. Las deformaciones sufridas por el cuerpo llevan a los puntos materiales a través del tiempo a varias posiciones espaciales, es decir

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (1.1)$$

Se considera que para un punto material P y el punto espacial p que pasa a ocupar después de un cierto intervalo de tiempo, existen vecindades B y b respectivamente tales que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ es un difeomorfismo de B en b ; es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ es una función diferenciable, biyectiva y su inversa también es diferenciable. Físicamente esto significa que los cambios que sufre la materia en cuestión no incluyen rupturas o superposiciones. Tampoco sucede que la materia se colapse en un punto.

Considérese una partícula localizada al tiempo inicial t_0 en P , un punto de coordenadas $\mathbf{X}$, véase Figura 1.1. Al tiempo $t > t_0$ la partícula se



La impenetrabilidad de la materia se establece requiriendo que las dos descripciones de la posición, material para $t = t_0$ y espacial para $t > t_0$, o euleriana y lagrangiana respectivamente sean monovaluadas, y la suavidad del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ se establece requiriendo que ambas descripciones tengan tantas derivadas continuas como sea necesario.

Figure 1.1: Las dos descripciones de la posición.

localiza en p con coordenadas $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Cuando la posición relativa de la partícula se altera, el medio continuo se deforma. El vector desplazamiento $\mathbf{u}$ se define como

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (1.2)$$

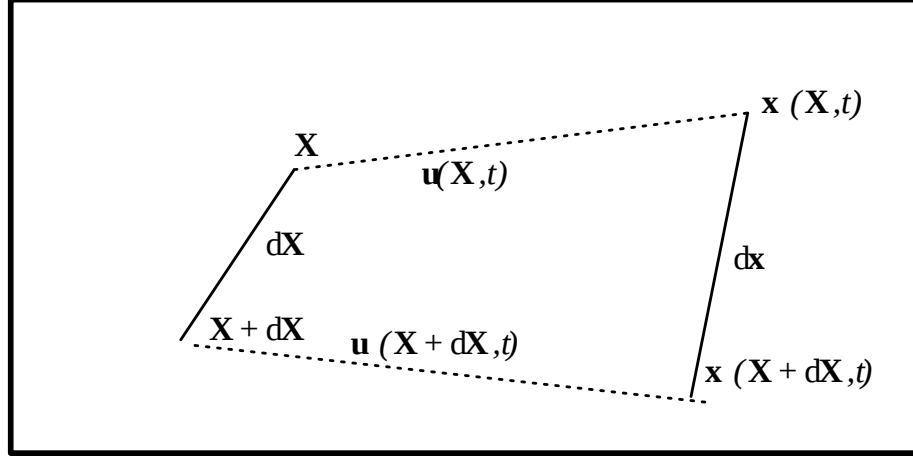
Considérese un segmento de recta $d\mathbf{X}$ que al tiempo $t = t_0$ tiene coordenadas iniciales y finales $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ respectivamente, véase Figura 1.2. Si $d\mathbf{X}$ está en el material que se está deformando, en un cierto tiempo t sus extremos ocuparán las posiciones $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$.

Es posible escribir, a primer orden

$$x_i(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - x_i(\mathbf{X}, t) = x_{i,j}(\mathbf{X}, t) dX_j, \quad (1.3)$$

donde se usa la convención de suma de índices repetidos.¹ Entre más pequeño sea $|d\mathbf{X}|$ más próxima a cero es la contribución hecha por los

¹Esta notación es para simplificar la escritura de sumas de tal manera que cuando aparece un subíndice repetido en un término se entiende que se suma sobre ese índice y que va de uno a tres. La regla para esta notación es que un subíndice debe



La deformación cambia un elemento de línea infinitesimal $d\mathbf{X}$ en un nuevo elemento de línea $d\mathbf{x}$.

Figure 1.2: La deformación de un elemento de línea.

términos no lineales de la serie. Un modo conveniente de establecer este hecho es decir que si $d\mathbf{X}$ es infinitesimal y

$$dx_i = x_i(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - x_i(\mathbf{X}, t), \quad (1.4)$$

entonces

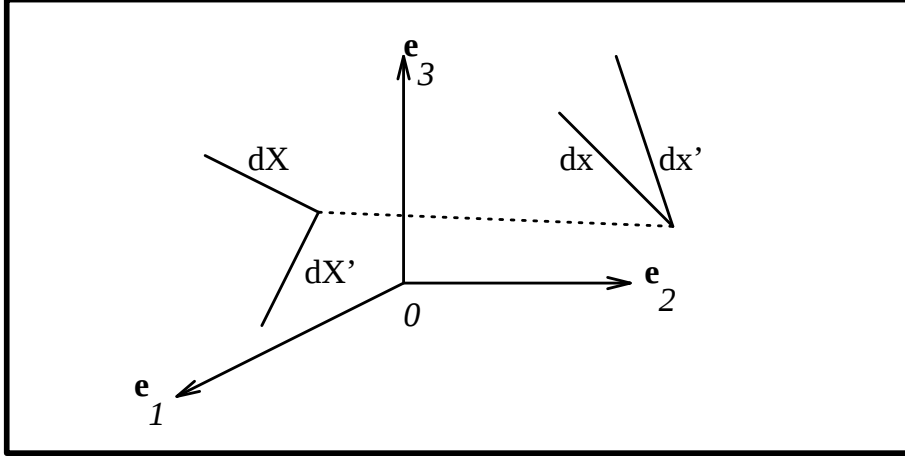
$$dx_i = x_{i,j}(\mathbf{X}, t)dX_j. \quad (1.5)$$

Si derivamos (1.2) con respecto de X_j se obtiene

$$x_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}. \quad (1.6)$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Una medida de deformación local es el cambio en el producto escalar $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}'$, donde $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{X}'$ son dos elementos de línea que pasan por el punto P antes de la deformación y que al tiempo t se transforman en $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{x}'$, pasando por el punto p , véase Figura 1.3. Usando (1.6) podemos reescribir la diferencia de los productos escalares

aparecer a lo más dos veces en un término. Además, se usa la notación de comas para denotar la derivación con respecto de una coordenada X_j , i.e. $\partial x_i / \partial X_j = x_{i,j}$.



Una medida de deformación comúnmente utilizada es la variación en el producto escalar entre dos elementos de línea $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{X}'$.

Figure 1.3: La variación del producto escalar.

$$dx_i dx'_i - dX_i dX'_i = (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k}) dX_j dX'_k - dX_i dX'_i \quad (1.7)$$

$$= (u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k}) dX_j dX'_k. \quad (1.8)$$

La parte entre paréntesis es una medida de deformación, el tensor de deformación, y se denota por

$$2\eta_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j} u_{i,k}. \quad (1.9)$$

Así que la diferencia de los productos escalares se escribirá

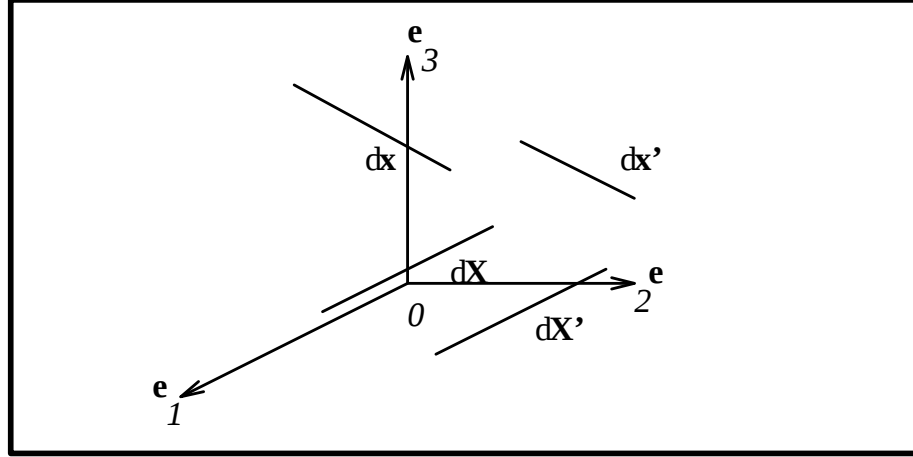
$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = 2\eta_{jk} dX_j dX'_k. \quad (1.10)$$

Frecuentemente la deformación es muy pequeña (i.e., $|u_{i,j}| \ll 1$). En tales casos es natural reemplazar el tensor de esfuerzo por su aproximación lineal, escribiendo

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}). \quad (1.11)$$

Es muy oportuno interpretar geoméricamente la variación de longitudes, ángulos y volúmenes en términos de los componentes de η_{jk} .

En el caso especial en que dos elementos de línea son paralelos al vector coordenado $\mathbf{e}_1$: $dX_1 = dX'_1$, $dX_2 = dX'_2 = dX_3 = dX'_3 = 0$, véase Figura 1.4.



De analizar la variación de dos elementos de línea inicialmente paralelos concluimos que los elementos de la diagonal η_{11} , η_{22} y η_{33} representan la variación por unidad original de longitud paralela a los ejes coordenados.

Figure 1.4: Dos elementos de Línea inicialmente paralelos.

Se verifica que $dx_1 = dx'_1$ y $|\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dX}|^2 = 2\eta_{11}|\mathbf{dX}|^2$. Si se define $\mu = (dx_1 - dX_1)/(dX_1)$, μ es el cambio por unidad original de longitud paralelo al eje $\mathbf{e}_1$. Así, sustituyendo en la expresión anterior se encuentra que

$$2\eta_{11} = 2\mu + \mu^2, \quad (1.12)$$

que tiene solución $\mu = (1 + 2\eta_{11})^{1/2} - 1$, pues sólo la raíz con signo positivo tiene sentido físicamente, dado que si $\eta_{11} = 0$, $\mu = 0$ y $\mathbf{dx} = \mathbf{dX}(1 + 2\eta_{11})^{1/2}$.

Para esfuerzos infinitesimales $|u_{i,j}| \ll 1$, consecuentemente $|\eta_{11}| \ll 1$ y

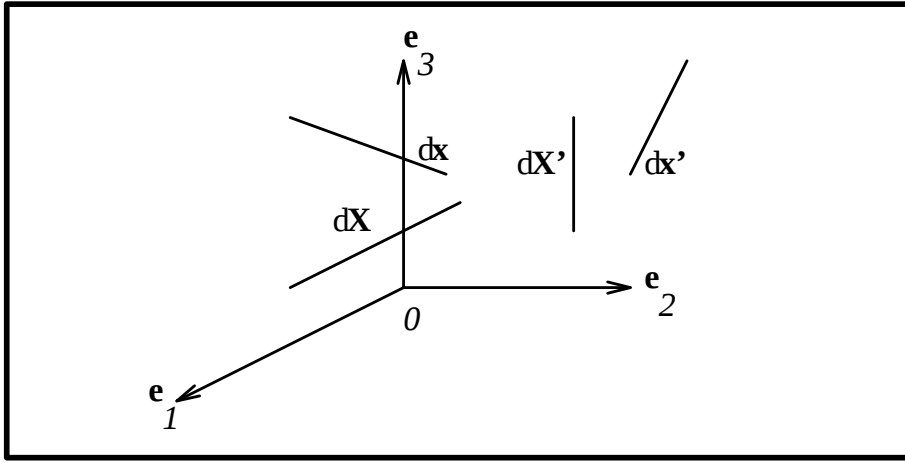
$$\mu = 1 + \frac{1}{2}(2\eta_{11}) + O(\eta_{11}^2) - 1, \quad (1.13)$$

$$\approx \eta_{11}. \quad (1.14)$$

Así que η_{11} , η_{22} , y η_{33} representan la variación por unidad original de longitud paralela a los ejes coordenados, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ respectivamente.

Por otra parte, si tomamos dos elementos de línea inicialmente ortogonales, por ejemplo $dX_1 = dX$, $dX'_2 = dX'$ y $dX_2 = dX_3 = dX'_1 = dX'_3 = 0$, véase Figura 1.5 encontramos que

$$|d\mathbf{x}||d\mathbf{x}'| \cos \theta = 2\eta_{12}|d\mathbf{X}||d\mathbf{X}'|. \quad (1.15)$$



De analizar la variación entre dos elementos de línea inicialmente ortogonales, concluimos que, si $i \neq j$, entonces η_{ij} representa la mitad del decremento en el ángulo recto que estaba originalmente formado por segmentos de línea paralelos a $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$.

Figure 1.5: Dos elementos de línea inicialmente ortogonales.

Sea $\gamma_{12} = \pi/2 - \theta$, entonces γ_{12} es el decremento en el ángulo recto originalmente formado por componentes en las direcciones de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Es decir $\cos \theta = \cos(\pi/2 - \gamma_{12}) = \sin \gamma_{12}$. Así, $d\mathbf{x} = d\mathbf{X}(1 + 2\eta_{11})^{1/2}$ y $d\mathbf{x}' = d\mathbf{X}'(1 + \eta_{22})^{1/2}$, consecuentemente

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2\eta_{12}}{\sqrt{1 + 2\eta_{11}}\sqrt{1 + 2\eta_{22}}}. \quad (1.16)$$

Para deformaciones infinitesimales esta expresión se reduce a $\gamma_{12} = 2\eta_{12}$. Por lo que η_{12} representa la mitad del decremento en el ángulo

recto que estaba originalmente formado por segmentos de línea paralelos a $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

Otra interpretación importante se encuentra al considerar el jacobiano de la deformación J , el cual representa la razón entre un elemento de volumen después de la deformación y un elemento original de volumen. El jacobiano está definido por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}, \quad (1.17)$$

$$= \det \left[\frac{\partial(X_i + u_i)}{\partial(X_i)} \right], \quad (1.18)$$

$$= \det [\delta_{ij} + u_{i,j}]. \quad (1.19)$$

Expandiendo esta expresión para el caso que se ha considerado de esfuerzos infinitesimales se concluye que

$$J = 1 + \eta_{ii}. \quad (1.20)$$

Así que la traza de η_{ij} , η_{ii} representa la variación de volumen después de la deformación por unidad original de volumen.

Es oportuno decir que los resultados expuestos corresponden a una teoría lineal y que en principio deberían ser limitados, pero en el análisis en que se utilizan son muy adecuados porque las amplitudes de las ondas (y asimismo los esfuerzos y deformaciones) son muy pequeñas.

1.3 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento de la elasticidad lineal se derivan de las leyes de conservación de masa, ímpetu, momento angular y energía. Una forma conveniente de describir el medio es considerar la distribución de densidad, el campo de velocidad, la distribución de temperatura, etc., como funciones de la posición.

La implementación de este esquema hace necesario que las leyes de conservación sean aplicables a materiales que se hallan en algún volumen arbitrario. A menudo sucede que algunas cantidades aparecen en una

integral de volumen o en una de superficie. La necesidad de transformar cantidades de este tipo sugiere la utilización del teorema de Gauss y un lema sobre la derivada material de una integral de volumen, conocido como teorema de transporte de Reynolds².

Teorema 1 (Gauss) *Sea V una región convexa con frontera S , que es una superficie que consiste de un número finito de partes, cuyos vectores normales constituyen un campo vectorial continuo por partes. Sea $f(\mathbf{x})$ una función definida en V y en su frontera S . Sea f continuamente diferenciable en V , si $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es el vector unidad interno o externo normal a S , entonces*

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f n_i dS. \quad (1.21)$$

Otro cálculo útil en la derivación de las ecuaciones de movimiento es la razón de cambio respecto del tiempo de una integral de volumen de una función continuamente diferenciable,

Teorema 2 (Transporte de Reynolds) *Sea $f(\mathbf{x}, t)$ una función escalar continuamente diferenciable sobre un dominio $V(\mathbf{x}, t)$ con frontera $S(\mathbf{x}, t)$, si $\mathbf{n}$ es el campo de vectores normales externos a S , entonces el cambio temporal de la integral de $f(\mathbf{x}, t)$ en V es igual a la integral del cambio temporal de $f(\mathbf{x}, t)$ en V más el flujo a través de S , es decir*

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.22)$$

Nótese que si la frontera al tiempo t es S , al tiempo $t + \Delta t$ se habrá movido a otra frontera S' . Este resultado ilustra que en general la derivada material y la integración espacial no conmutan.

²Para una prueba del teorema de Gauss se sugiere consultar [Marsden & Tromba (1988)], y [Eringen (1967)] para la prueba del teorema de Reynolds.

1.3.1 Conservación de Masa

El principio de conservación de masa establece que la masa de un cuerpo es constante con el tiempo. La masa m contenida en un volumen espacial a un tiempo t es

$$\int_V \rho dV = m, \quad (1.23)$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad del medio continuo en el punto $\mathbf{x}$ al tiempo t .

La conservación de masa requiere que $dm/dt = 0$. Reemplazando ρ por f en el teorema de Transporte de Reynolds, se concluye que el integrando es idénticamente cero pues no se han impuesto condiciones al volumen de integración. Así, es posible escribir al menos tres formas alternativas de la ley de conservación de masa

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \dot{u}_j n_j dS = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.26)$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de continuidad*. Nótese que (1.24) es una propiedad global, mientras que (1.25) y (1.26) son locales. La ecuación (1.24) la podemos interpretar de la siguiente manera, *la razón de cambio respecto del tiempo de la masa contenida en un volumen dado es igual al flujo de masa a través de la superficie de ese volumen*.

Debido a que en este enfoque se estudian cuerpos en vez de partículas, se define un elemento apropiado para analizar las fuerzas aplicadas a través de la superficie de un cuerpo.

Definición 1 La tracción $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ representa la fuerza por unidad de área en el punto $\mathbf{x}$ relativo a un elemento de área cuya normal exterior es $\mathbf{n}$.

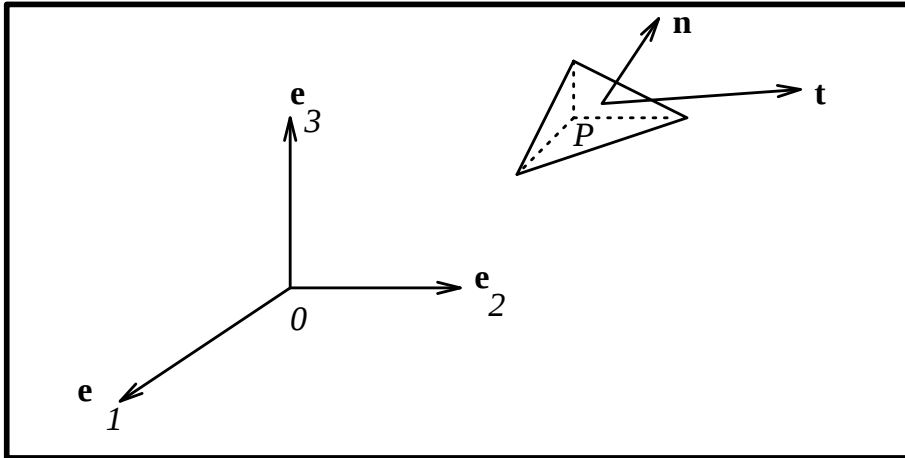
La tracción $\mathbf{t}$ es una función continua y antisimétrica respecto del vector normal $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$. Físicamente significa que la acción

exterior sobre un elemento de área es igual en magnitud y opuesta en dirección a la acción del interior del material sobre el exterior en el mismo elemento de superficie, es decir, equivale a la ley de Newton de acción y reacción. El tensor de esfuerzo σ se relaciona con la tracción $\mathbf{t}$ mediante el vector unidad normal $\mathbf{n}$ a través del siguiente

Teorema 3 *Sea σ_{ij} el j -ésimo componente del vector de esfuerzo que actúa sobre el elemento de superficie cuya normal $\mathbf{n}$ apunta en la dirección de $\mathbf{e}_i$, entonces*

$$t_j(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = n_i \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t). \quad (1.27)$$

Una derivación elemental de este resultado se puede hacer considerando un tetrahedro infinitesimal con tres caras normales a los ejes coordenados y la cuarta al vector $\mathbf{n}$, como lo ilustra la Figura 1.6. Si el área de esta última cara es ds , entonces el área de las otras caras es $ds \cos \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ es normal a la cara en cuestión. El volumen del tetrahedro es $dV = \frac{1}{3}hds$ y h es la altura del tetrahedro por la cara normal a $\mathbf{n}$.



Se considera un tetrahedro infinitesimal con tres caras paralelas a los ejes coordenados y la cuarta al vector normal n .

Figure 1.6: El tetrahedro infinitesimal.

Las fuerzas en la dirección positiva de $\mathbf{e}_j$ que actúan en las tres superficies coordenadas se pueden escribir de la siguiente manera

$$(-\sigma_{ij} + \epsilon_i)ds_i, \quad (1.28)$$

donde σ_{ij} son los elementos del esfuerzo en el vértice P. Los ϵ_i significan que el esfuerzo varía un poco respecto del vértice y tienden a cero cuando h lo hace. Por otra parte, la fuerza que actúa sobre el triángulo normal a $\mathbf{n}$ tiene una componente $(t_1 + \epsilon)ds$ en la dirección de $\mathbf{e}_1$ y la fuerza de cuerpo una componente $(t_1 + \epsilon')dV$ mientras que la razón de cambio respecto del tiempo del ímpetu tiene una componente $\rho\dot{u}_1dV$. Así que es posible escribir el balance de fuerzas en la dirección de $\mathbf{e}_1$ como

$$(-\sigma_{11} + \epsilon_1)n_1ds + (-\sigma_{21} + \epsilon_2)n_2ds + (-\sigma_{31} + \epsilon_3)n_3ds + (f_1 + \epsilon')\frac{1}{3}hds = \rho\dot{u}_1\frac{1}{3}hds. \quad (1.29)$$

Si tomamos límite cuando h tiende a cero se obtiene

$$t_1(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3. \quad (1.30)$$

E igualmente para las otras dos direcciones de $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, es decir (1.27). Esta ecuación establece que los elementos de σ_{ij} son necesarios y suficientes para calcular la tracción a través de cualquier elemento de superficie, y dado que $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ es un vector y la fórmula es consistente para todo vector normal $\mathbf{n}$ se concluye que σ_{ij} es un tensor de segundo orden, el llamado *tensor de esfuerzo*.

1.3.2 Balance de Impetu

Las leyes del movimiento de Newton establecen que en un sistema de referencia inercial la razón de cambio con respecto del tiempo del momento lineal o ímpetu es igual a la resultante de todas las fuerzas aplicadas. En un instante el momento lineal de todas las partículas contenidas en un volumen arbitrario V es

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} dV. \quad (1.31)$$

La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ese dominio V de frontera S es

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV, \quad (1.32)$$

donde $\mathbf{t}$ es la tracción sobre S y $\mathbf{f}$ es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen en el material. Es necesario expresar $\int_S \mathbf{t} dS$ como una integral de volumen y aplicar el teorema de Reynolds a $\mathbf{P}$ para obtener la ecuación de conservación del ímpetu a partir de $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$. Primeramente tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} dV = \int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV, \quad (1.33)$$

La ecuación (1.33) la podemos interpretar como: *la fuerza total aplicada instantaneamente sobre un volumen jo es igual a la razón de cambio respecto del tiempo del ímpetu dentro del volumen más el flujo neto de ímpetu a través de la superficie.*

Por un lado escribimos

$$\int_S \mathbf{t} dS = \int_S \sigma_{ji} n_j \mathbf{d}_i = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV, \quad (1.34)$$

y por otra parte

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{u}_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i) dV + \int_S \rho \dot{u}_i \dot{u}_j n_j dS, \quad (1.35)$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_j) \right] dV. \quad (1.36)$$

De aquí es posible escribir

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_j) \right] dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} + f_i \right) dV. \quad (1.37)$$

No se han impuesto condiciones sobre V y S así que los integrandos deben ser iguales, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i. \quad (1.38)$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.38) se puede reescribir como

$$u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \dot{u}_j \right) + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{u}_i + \dot{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{u}_i \right). \quad (1.39)$$

Por la ley de conservación de masa la primera parte entre paréntesis es cero, mientras que la segunda es idénticamente $d\dot{u}_i/dt$, y así se obtiene la ecuación local de movimiento de un continuo

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji} + f_i. \quad (1.40)$$

1.3.3 Balance de Momento Angular

Sea H el momento angular del material, es decir, la integral del momento angular de las partículas en V (por comodidad el origen se tomará en el interior de V). La ley de conservación del momento angular establece que la razón de cambio del momento angular respecto del tiempo es igual a la torca resultante alrededor del origen. El momento angular es

$$H_i = \int_V (\mathbf{x} \wedge \rho \dot{\mathbf{u}})_i dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho \dot{u}_k dV. \quad (1.41)$$

Y si $\mathbf{t}$ es la tracción en la superficie y $\mathbf{f}$ la fuerza de cuerpo por unidad de volumen la torca es

$$L_i = \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k dS, \quad (1.42)$$

donde ϵ_{ijk} es el signo de permutación que vale cero si hay índices repetidos, 1 si es una permutación par de (123) y -1 en cualquier otro caso.

Entonces tenemos la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \wedge \rho \dot{\mathbf{u}})_i dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k dS. \quad (1.43)$$

Para poder usar la expresión $dH/dt = L$ es necesario aplicar el teorema de transporte de Reynolds al momento angular y transformar, usando el teorema de Gauss, la segunda parte de la expresión para la torca en una integral de volumen. La ecuación (1.42) se reescribe

$$L_i = \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV. \quad (1.44)$$

La ecuación de balance $d\mathbf{H}/dt = \mathbf{L}$ implica

$$\int_V [\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{u}_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk} x_j \rho \dot{u}_k \dot{u}_l)] dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k + \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV. \quad (1.45)$$

Nuevamente los integrandos de ambos lados deben ser iguales, es decir

$$\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{u}_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk}x_j \rho \dot{u}_k \dot{u}_l) = \epsilon_{ijk}x_j f_k + (\epsilon_{ijk}x_j \sigma_{lk})_{,l}, \quad (1.46)$$

y el segundo término de la izquierda de (1.47) se puede reescribir

$$\epsilon_{ijk}\dot{u}_j\dot{u}_k + \epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho \dot{u}_k \dot{u}_l) = \epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \rho \dot{u}_k \dot{u}_l. \quad (1.47)$$

Puesto que el signo de permutación es un tensor antisimétrico y $\dot{u}_j\dot{u}_k$ es simétrico respecto de j y k , entonces

$$\epsilon_{ijk}(x_j \sigma_{lk})_{,l} = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}, \quad (1.48)$$

por lo que (1.48) se puede reescribir

$$\epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho x_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho \dot{u}_k \dot{u}_l) - f_k - \sigma_{lk,l} \right] - \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (1.49)$$

Pero la parte entre corchetes es cero por la ley local de conservación del ímpetu, de donde

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad (1.50)$$

es decir, σ_{jk} es un tensor simétrico

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}. \quad (1.51)$$

Que es la forma local de la *ley de conservación de momento angular*.

1.3.4 Balance de Energía

Igualmente el movimiento de un continuo obedece la ley de conservación de energía, es decir, la razón de cambio respecto del tiempo de la suma de las energías cinética K y potencial U es igual a la potencia P de las fuerzas externas mas el resto de las energías Q que entran o salen del cuerpo por unidad de tiempo (aunque sólo se considera energía no mecánica debida a un efecto térmico),

$$\frac{d}{dt}(K + U) = P + Q. \quad (1.52)$$

P se escribe explícitamente

$$P = \int_V \rho F_i \dot{u}_i dV + \int_S t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \dot{u}_i dS. \quad (1.53)$$

Sustituyendo en el segundo sumando del lado derecho $t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \sigma_{ji} n_j$ y aplicando enseguida el teorema de la divergencia y el principio de conservación del ímpetu y del momento angular, se obtiene

$$P = \int_V [\dot{u}_i (\rho F_i + \sigma_{ij,j}) + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}] dV \quad (1.54)$$

$$= \int_V [\rho \dot{u}_i \frac{d\dot{u}_i}{dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}] dV. \quad (1.55)$$

La energía cinética por unidad de tiempo es

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV, \quad (1.56)$$

y consecuentemente

$$\frac{d}{dt} K = \int_V \rho \dot{u}_i \frac{d}{dt} \dot{u}_i dV. \quad (1.57)$$

Similarmente, si E es la energía interna por unidad de masa

$$U = \int_V \rho E dV, \quad (1.58)$$

resulta

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \frac{dE}{dt} dV. \quad (1.59)$$

Si en el proceso no hay disipación de energía y se denotan por S y T a la entropía por unidad de masa y la temperatura absoluta respectivamente

$$Q = \int_V \rho T \frac{dS}{dt} dV. \quad (1.60)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.52) se obtiene

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} dV = \int_V \rho \left(\frac{dE}{dt} - T \frac{dS}{dt} \right) dV, \quad (1.61)$$

Esta ecuación se puede interpretar como: *la razón de cambio respecto al tiempo del trabajo hecho por las fuerzas de cuerpo y de superficie en un volumen fijo más la razón de cambio del calor que entra en el mismo, es igual a la razón de cambio total de las energías interna y cinética dentro del volumen, más el flujo de las energías cinética e interna a través de la superficie de ese volumen.*

Por otra parte este resultado es válido sin imponer condiciones al volumen de integración, se puede escribir en forma equivalente

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \rho \left(T \frac{dS}{dt} - \frac{dE}{dt} \right) = 0. \quad (1.62)$$

Más aún, reescribiendo $\partial \dot{u}_i / \partial x_j$ como la suma de una parte simétrica e_{ij} y una antisimétrica w_{ij} , esta ecuación también es equivalente a

$$\rho \left(\frac{dE}{dt} - T \frac{dS}{dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial t} (e_{ij} - w_{ij}), \quad (1.63)$$

donde la rotación infinitesimal $w_{ij} = (\partial \dot{u}_j / \partial x_i - \partial \dot{u}_i / \partial x_j) / 2$ es un tensor antisimétrico de segundo orden (en consecuencia $\sigma_{ij} w_{ij} = 0$), así que la ecuación general para la conservación local de energía es

$$\rho \left(\frac{dE}{dt} - T \frac{dS}{dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \quad (1.64)$$

1.4 Relaciones Constitutivas

La ecuación más importante para caracterizar a los sólidos linealmente elásticos es la generalización de la ley de Hooke que establece que la deformación es proporcional al esfuerzo

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} e_{kl}, \quad (1.65)$$

donde L_{ijkl} es el tensor de modulos elásticos, que es independiente del esfuerzo y la deformación. Es una característica del material. Como tensor de cuarto orden tiene $3^4 = 81$ elementos, si bien, como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $e_{ij} = e_{ji}$, entonces $L_{ijkl} = L_{jikl}$ y por tanto L se puede simetrizar

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ijkl} + L_{jikl}), \quad (1.66)$$

pero además existe la propiedad

$$L_{ijkl} = L_{ijlk}, \quad (1.67)$$

por lo que el número de entradas linealmente independientes se reduce a sólo 36 en el caso más general de un medio anisótropo.

Sin embargo, en el caso isótropo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4 *Si L_{ijkl} es un tensor isótropo de cuarto orden con las simetrías $L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk}$ entonces L_{ijkl} se puede escribir en términos de dos parámetros*

$$L_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.68)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker³.

Y consecuentemente

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.69)$$

Esta es la forma más general para caracterizar a un sólido elástico e isótropo en el cual las deformaciones son funciones lineales de los esfuerzos.

Así que un sólido de este tipo está caracterizado por dos parámetros λ y μ (constantes de Lamé).

Puesto que el módulo de compresibilidad κ se escribe $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, el tensor de esfuerzo se puede escribir en términos de los módulos de compresibilidad κ y rigidez μ ,

$$\sigma_{ij} = \kappa e_{ll} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ll}). \quad (1.70)$$

1.5 Flujo de Energía

El flujo de energía a través de un elemento de área se puede hallar a partir de la razón a que el trabajo es hecho de un lado al otro del área, que es el producto de la tracción $\mathbf{t}$ y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$, es decir, la potencia por unidad de área

$$P = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i. \quad (1.71)$$

³Para una prueba de este resultado se sugiere consultar [Jeffreys (1965)].

1.6 Ondas Planas

Entre las soluciones particulares de la ecuación de onda, una de las más simples y útiles es la de onda plana. Una onda plana es una función escalar o vectorial de la posición $\mathbf{x}$ y el tiempo t que es constante en un plano que asimismo se mueve en el espacio con velocidad fija en una dirección normal

$$u_i = u_i(k_j x_j - ct). \quad (1.72)$$

Sustituyendo esta forma en la ecuación de movimiento en notación tensorial

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.73)$$

se obtiene la expresión

$$(\lambda + \mu) k_j k_i u_j'' + \mu k_j k_i u_j'' = \rho c^2 u_i'', \quad (1.74)$$

donde la prima denota $d/d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$.

Equivalentemente se escribe

$$[(\lambda + \mu) k_j k_i + (\mu - \rho c^2) \delta_{ij}] u_j'' = 0, \quad (1.75)$$

en donde podemos convenientemente definir $A = \lambda + \mu$, $\sigma = \rho c^2 - \mu$ y $u_i'' = v_i$, que determina un problema de valores propios

$$[A k_j k_i - \sigma \delta_{ij}] v_i = 0. \quad (1.76)$$

El cual tiene solución no trivial si $\det(A k_j k_j - \sigma \delta_{ij}) = \sigma^2(\sigma - A) = 0$. Los valores propios determinan la velocidad de propagación de las ondas que sólo son dos. Del polinomio característico tenemos más información, pues al valor propio con multiplicidad dos le corresponde un espacio de dimensión dos puesto que $k_j v_j = 0$, así que $\rho c^2 - \mu = 0$ implica

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.77)$$

que es el cuadrado de la velocidad de la onda transversal, dado que los eigenvectores están en el plano del frente de onda

$$k_i x_i - ct = \text{constante}. \quad (1.78)$$

El desplazamiento correspondiente es paralelo al frente de onda. Es la llamada onda transversal u onda S.

Mientras que con el otro valor propio $\sigma = A$ y $\sigma = \rho c^2 - \mu$ hacen

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{3k + 4\mu}{3\rho}. \quad (1.79)$$

Se tiene $k_i k_j v_j = v_i$, es decir, $\mathbf{v}$ es igual a su proyección a lo largo del vector normal unitario $\mathbf{k}$, o en otras palabras que $\mathbf{v}$ es paralelo a la normal al frente de onda. Consecuentemente, existe una segunda onda que representa un desplazamiento perpendicular al plano de la onda. Es la llamada onda longitudinal u onda P.

Estas dos ondas son las únicas ondas planas posibles en un cuerpo isótropo linealmente elástico. Nótese que la onda P es más rápida que la onda S , puesto que

$$\lambda + 2\mu > \mu. \quad (1.80)$$

Capítulo 2

Dispersión de Ondas en una Dimensión

2.1 Introducción

Se estudia la propagación de una onda plana monocromática en una barra elástica, infinita y heterogénea porque es un problema simple que se puede resolver totalmente e involucra aspectos que son comunes al problema mucho más complicado de una onda plana propagándose en un material compuesto por una matriz elástica con inclusiones esféricas. Se considera que el área y la forma de la sección transversal de la barra son constantes y está formada longitudinalmente por tres partes, de tal manera que los extremos son de una resina epóxica (Epon282z) y el componente de enmedio es de plomo. Nótese que la densidad de la sección de enmedio es mucho mayor que la de las otras dos regiones de la barra. Debido a que los módulos elásticos y la densidad de masa de la barra son constantes por pedazos y la sección transversal de la misma no depende de la posición, entonces la ecuación que modela las ondas que se propagan sobre la barra es la de onda. Más aún, como la barra es recta el movimiento es puramente longitudinal.

Cuando la frecuencia radial de la onda incidente se aproxima a un modo normal de vibración de la barra de plomo, la norma de la amplitud de la onda que se refleja en la primera interface, $|R_1(\omega)|^2$, alcanza un valor máximo y la norma de la amplitud de la onda que se transmite en la

segunda interface, $|T_2(\omega)|^2$, alcanza un valor mínimo. De hecho estas dos cantidades satisfacen la relación

$$|R_1(\omega)|^2 + |T_2(\omega)|^2 = 1, \quad (2.1)$$

si 1 es el cuadrado de la amplitud de la onda que incide en la primera sección. Esta ecuación expresa conservación de la energía.

Debido a que la geometría de una onda plana que se propaga en una dimensión es muy diferente a la del caso de una onda plana propagándose en una suspensión de partículas sólidas en un sólido, aún en el caso de una sola esfera incrustada en un material homogéneo, no es claro si debemos esperar que una onda plana monocromática, o con una sola frecuencia, que se propaga en un medio compuesto por una matriz elástica con inclusiones esféricas tenga un comportamiento análogo al de la barra, es decir, que existan frecuencias características que dependan del radio de las inclusiones, de la concentración de éstas y de los materiales que forman la mezcla, de tal manera que cuando la frecuencia radial ω de la onda que se propaga sea próxima a una frecuencia crítica, las inclusiones resuenen y ocasionen que la atenuación sea máxima. Sin embargo, el estudio en conjunto del modo en que vibra la sección de enmedio de la barra unidimensional y la forma en que la energía se propaga a lo largo de las tres secciones de la misma motiva la comprensión de lo que ocurre en el otro caso.

2.2 Una Barra Finita de Plomo

Para encontrar los modos normales de vibración de una barra finita, en este caso la barra de plomo, es necesario resolver la ecuación

$$\frac{\omega^2}{c^2} \phi'' + \phi = 0, \quad (2.2)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(2a) = 0, \quad (2.3)$$

$$\phi'(0) = 0. \quad (2.4)$$

Donde $\phi = \phi(x)$ es el desplazamiento vertical de la barra desde su posición de equilibrio. $\phi(2a) = 0$ significa que ese extremo de la barra está fijo, mientras que $\phi'(0) = 0$ nos dice que ninguna fuerza se aplica a la barra en ese extremo. Es decir, es una condición de extremo libre.

La solución del problema que satisface la condición de frontera (2.3) es

$$\phi(x) = \sin \left[\frac{\omega}{c}(x - 2a) \right]; \quad (2.5)$$

y su derivada en cero

$$\phi'(0) = \frac{\omega}{c} \cos \left[\frac{\omega}{c}(-2a) \right] = 0, \quad (2.6)$$

implica

$$\omega_n = \frac{c}{4a}(2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

n	$c_{Pb}(2n + 1)\pi/4a$
1	1.7357299e+00
2	5.2071898e+00
3	8.6786497e+00

Se ha tomado c como la velocidad del sonido para ondas P en Plomo, $c_{Pb} = 2.21 \times 10^3 \text{m/s}$ y la longitud de la barra $a = 1\text{m}$.

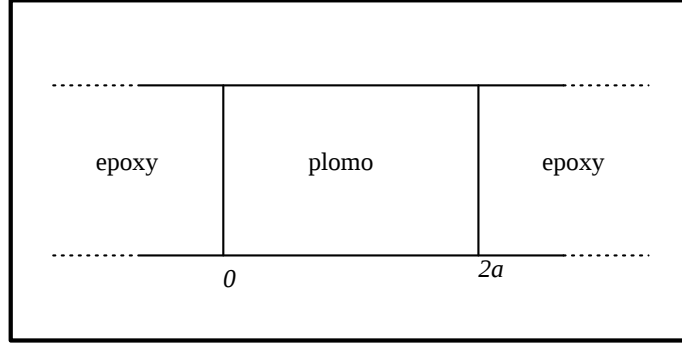
2.3 Una Barra con un Dispersor

Considérese una barra infinita compuesta longitudinalmente por tres secciones, de tal manera que los extremos son de un material epóxico y la sección de enmedio, de plomo, mide $2a$ (véase Figura 2.1).

Como la velocidad de fase de la onda se conoce en cada componente de la barra, el problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

con $c(x)$ definida por



La barra está compuesta longitudinalmente por tres secciones, la primera y la tercera son de epoxy y la de enmedio es de plomo.

Figure 2.1: La barra heterogénea.

$$c(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0, \\ c_2, & 0 < x < 2a, \\ c_1, & 2a < x, \end{cases}$$

con $c_1 > c_2$, y condiciones de frontera

$$u^-(0, t) = u^+(0, t), \quad (2.9)$$

$$u^-(2a, t) = u^+(2a, t), \quad (2.10)$$

$$E_1 \frac{\partial u^-}{\partial x}(0, t) = E_2 \frac{\partial u^+}{\partial x}(0, t), \quad (2.11)$$

$$E_2 \frac{\partial u^-}{\partial x}(2a, t) = E_1 \frac{\partial u^+}{\partial x}(2a, t), \quad (2.12)$$

donde E_1 y E_2 son los módulos de Young del epoxy y el plomo respectivamente. $u^-(x_0, t)$ indica un límite donde x se aproxima a un punto x_0 por la izquierda pero siempre permanece de ese lado, similarmente $u^+(x_0, t)$ significa que x se aproxima a un punto x_0 por la derecha pero siempre permanece de ese lado. Las condiciones de frontera (2.9) y (2.10) equivalen a decir que el desplazamiento es continuo en las interfaces, y las condiciones (2.11) y (2.12) describen analíticamente que la tracción que se aplica sobre la barra es continua en las fronteras.

Supongamos que incide sobre la barra de izquierda a derecha una onda plana monocromática de amplitud uno,

$$u(x, t) = e^{i\omega(x/c-t)}, \quad (2.13)$$

donde ω es la frecuencia radial y c es la rapidez de fase. Debido a que las características de la barra son constantes por pedazos, el efecto que tiene el cambio de medio sobre la onda es que cuando ésta cruza la frontera se descompone en dos nuevas ondas, una que se refleja y otra más que se transmite.

Por la forma de la onda incidente la solución se escribe

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{i\omega(x/c_1-t)} + e^{i\omega(-x/c_1-t)} R_1, & x < 0, \\ e^{i\omega(x/c_2-t)} T_1 + e^{i\omega(-x/c_2-t)} R_2, & 0 < x < 2a, \\ e^{i\omega(x/c_1-t)} T_2, & 2a < x, \end{cases}$$

Donde R_i y T_i , $i = 1, 2$ son las amplitudes de las ondas que se reflajan y transmiten en la primera y segunda interfaces respectivamente. Aplicando las condiciones de frontera a la solución tentativa, el problema se reduce a un sistema de ecuaciones lineales en las amplitudes R_1 , R_2 , T_1 y T_2

$$1 + R_1 = T_1 + R_2, \quad (2.14)$$

$$\frac{E_1}{c_1}(1 - R_1) = \frac{E_2}{c_2}(T_1 - R_2), \quad (2.15)$$

$$e^{2\omega ai/c_2} T_1 + e^{-2\omega ai/c_2} R_2 = e^{2\omega ai/c_1} T_2, \quad (2.16)$$

$$\frac{E_2}{c_2}(e^{2\omega ai/c_2} T_1 - e^{-2\omega ai/c_2} R_2) = \frac{E_1}{c_1} e^{2\omega ai/c_1} T_2. \quad (2.17)$$

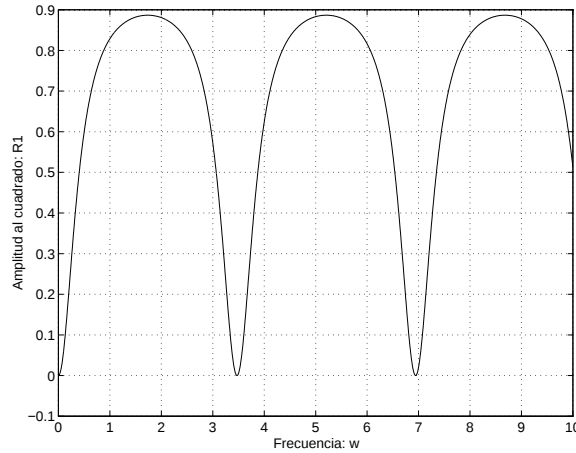
Nos interesa encontrar las amplitudes como funciones de la frecuencia de la onda que se refleja en la primera sección, $R_1 = R_1(\omega)$, y de la que se transmite en la tercera sección de la barra, $T_2 = T_2(\omega)$; y comparar las frecuencias donde $|R_1(\omega)|^2$ y $|T_2(\omega)|^2$ toman sus valores máximos y mínimos con aquellas de los modos normales de vibración de la barra de plomo, para ver como es la energía que se propaga a lo largo de toda la barra cuando la sección de enmedio resuena.

Si resolvemos para $R_1(\omega)$ y $T_2(\omega)$ en el sistema de ecuaciones lineales, obtenemos

$$R_1(\omega) = \frac{4E_1E_2/c_1c_2}{(E_1/c_1 + E_2/c_2)^2 e^{-4\omega ai(1/c_2)} - (E_1/c_1 - E_2/c_2)^2}, \quad (2.18)$$

$$T_2(\omega) = \frac{(4E_1E_2/c_1c_2)e^{-2\omega ai(1/c_1 + 1/c_2)}}{(E_1/c_1 + E_2/c_2)^2 e^{-4\omega ai(1/c_2)} - (E_1/c_1 - E_2/c_2)^2}, \quad (2.19)$$

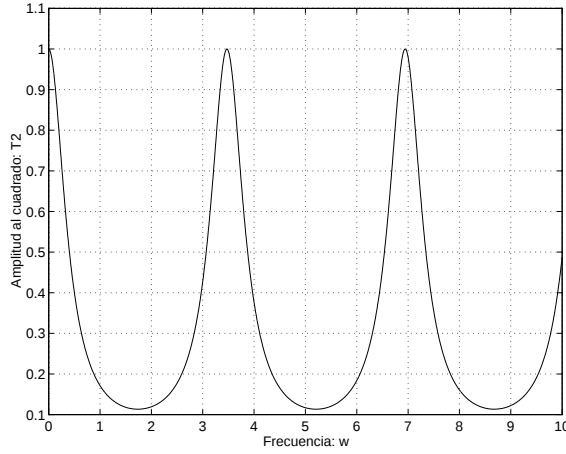
En la Figura 2.2 se muestra una gráfica de $|R_1(\omega)|^2$ contra la frecuencia ω y una gráfica similar para $|T_2(\omega)|^2$ en la Figura 2.3, se ha tomado $a = 1m$ y las velocidades del sonido en el plomo y en el epoxy, para ondas P , como $2.21 \times 10^3 m/s$ y $2.64 \times 10^3 m/s$ respectivamente.



La gráfica de $|R_1(\omega)|^2$ contra ω muestra un comportamiento periódico, cerca de las frecuencias en que la barra de plomo resuena, la norma de ésta amplitud toma valores máximos como función de la frecuencia, es decir la mayor parte de la energía de la onda que se propaga forma parte de la onda que se refleja en la primera sección para esos valores de frecuencia.

Figure 2.2: Una gráfica de $|R_1(\omega)|^2$ contra ω .

Las gráficas de $|R_1(\omega)|^2$ y $|T_2(\omega)|^2$ contra frecuencia ω muestran un comportamiento periódico, y como se ha dicho en la sección (2.1), en las las frecuencias donde la barra de plomo de la región de enmedio resuena, el cuadrado de la amplitud de la onda que se transmite en



La gráfica de $|T_2(\omega)|^2$ contra ω , también tiene un comportamiento periódico, y toma valores mínimos en las frecuencias en que resuena la barra de plomo, la energía de la onda que se transmite a la tercera sección es mínima para esas frecuencias.

Figure 2.3: Una gráfica de $|T_2(\omega)|^2$ contra ω .

la tercera sección $|T_2(\omega)|^2$ toma sus valores mínimos como función de la frecuencia, asimismo $|R_1(\omega)|^2$ toma valores máximos en esos puntos. Además, en las frecuencias donde $|T_2(\omega)|^2$ alcanza sus máximos $|T_2(\omega)|^2 = 1$, donde se ha tomado el cuadrado de la amplitud de la onda que incide sobre la primera sección de epoxy se ha tomado como 1. Es decir, toda la energía de la onda incidente se transmite a la tercera sección.

Muchos de los aspectos considerados en el presente capítulo son prototipo de aquellos que ocurren en un caso más general, con una geometría más complicada, como propagación, reflexión, transmisión, atenuación y dispersión de ondas, así como el efecto de una onda plana cuando cambia de un medio homogéneo e isotrópico a otro con las mismas características. En el caso de una onda plana monocromática propagándose en un medio elástico, como el epoxy, con una o más poblaciones de esferas de un material de densidad grande comparada con la del epoxy, como el plomo, la reflexión y transmisión de la onda son mucho más complicadas debido a la dispersión múltiple ocasionada por las inclusiones y la forma esférica de las interfaces. Sin embargo,

como se verá más adelante, el fenómeno de dispersión estudiado ahora motivará de alguna manera la explicación de los fenómenos que ocurren en el caso tridimensional.

Capítulo 3

Los Módulos Elásticos de un Material Compuesto

3.1 Introducción

El método autoconsistente de energía de Budiansky. En el análisis para la derivación de los módulos efectivos de un material compuesto por varias especies de inclusiones elásticas e isotropas en una matriz con las mismas características, la distribución de cada componente se asume tal que a la larga el compuesto se comporta como homogéneo e isotropo. Esta es la hipótesis más sencilla que se hace en ausencia de otra información sobre la distribución de las inclusiones. El material se imagina como una matriz de material de tipo $n+1$ en el cual se hallan dispersas de manera uniforme esferas de n tipos diferentes de materiales, y el radio de cada tipo de inclusión es el mismo.

En este capítulo se muestra la derivación de los parámetros efectivos de un material equivalente pero homogéneo e isotropo, en el caso estático, haciendo un balance de energía. Es un cálculo relativamente sencillo que se generaliza al caso dinámico por el método autoconsistente de [Hill (1963)] según se verá más adelante en el modelo autoconsistente de [Sabina & Willis (1988)].

3.2 Derivación de los Módulos Efectivos

Sea C un cubo del material compuesto, con sus aristas paralelas a los ejes coordenados $\mathbf{e}_i$ y aplíquese un esfuerzo uniforme puro $\sigma_{12} = \sigma^0$ a la superficie del cubo. Aunque la deformación correspondiente e_{12} no es uniforme a través del cubo, el módulo cortante efectivo se define como $\mu^* = \sigma^0/\bar{e}$, donde $\bar{e}$ es el valor medio de e_{12} sobre el volumen V del cubo

$$\bar{e} = \frac{1}{V} \int_V e_{12} dV. \quad (3.1)$$

El valor medio de σ_{12} en V es precisamente σ^0 y la energía de la deformación elástica E está dada exactamente por

$$E = \frac{1}{2} \int_V \sigma^0 e_{12} dV = \frac{1}{2} \sigma^0 \bar{e} = \frac{(\sigma^0)^2}{2\mu^*}. \quad (3.2)$$

Pero además en términos del módulo cortante μ_i ($i = 1, \dots, n$) de las varias especies de inclusiones

$$E = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^0 e_{12}}{\mu_{n+1}} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma^0 \sum_1^n (e_{12} - \frac{\mu_i e_{12}}{\mu_{n+1}}) dV, \quad (3.3)$$

$$= \frac{(\sigma^0)^2}{2\mu_{n+1}} + \frac{\sigma^0}{2} \sum_1^{n+1} (1 - \frac{\mu_i}{\mu_{n+1}}) \int_{V_i} e_{12} dV, \quad (3.4)$$

$$= \frac{(\sigma^0)^2}{2} \left[\frac{1}{\mu_{n+1}} + \sum_1^n c_i (1 - \frac{\mu_i}{\mu_{n+1}}) \left(\frac{\bar{e}_i}{\sigma^0} \right) \right]. \quad (3.5)$$

De comparar las dos ecuaciones para la energía (3.2) y (3.5) resulta que

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_{n+1}} + \sum_1^n c_i (1 - \frac{\mu_i}{\mu_{n+1}}) \left(\frac{\bar{e}_i}{\sigma^0} \right). \quad (3.6)$$

Esta relación es exacta, pero $\bar{e}_i$ será aproximada por el esfuerzo cortante que puede ocurrir en una inclusión de la i ésima especie encajada en una matriz infinita e isótropa, sometida a un esfuerzo cortante $\sigma_{12} = \sigma^0$ que tiene los módulos elásticos efectivos hasta ahora desconocidos.

La solución exacta para este tipo de aproximación autoconsistente demuestra, según se puede ver en [Elsheby (1957)], que el esfuerzo cortante en la iésima inclusión es uniforme y de magnitud

$$\bar{e} = \frac{\sigma^0}{\mu^* + \beta^*(\mu_i - \mu^*)} \quad (3.7)$$

donde β^* es un parámetro dado en términos del módulo de efectivo Poisson ν^* por

$$\beta^* = \frac{2(4 - 5\nu^*)}{15(1 - \nu^*)}. \quad (3.8)$$

Entonces, el módulo de rigidez efectivo se escribe

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_{n+1}} + \sum_1^n \left(1 - \frac{\mu_i}{\mu_{n+1}}\right) \frac{c_i}{\mu^* + \beta^*(\mu_i - \mu^*)}. \quad (3.9)$$

Esta relación permite calcular el módulo de rigidez efectivo μ^* cuando se conocen los módulos de rigidez de los materiales de las especies constitutivas y la proporción que ocupan éstas en el volumen total.

Un cálculo similar para el módulo de compresibilidad $\kappa^* = P^0/\bar{\theta}$, donde $\bar{\theta}$ es la contracción volumétrica media producida por una presión uniforme P^0 sobre la superficie de V , lleva a

$$\frac{1}{\kappa^*} = \frac{1}{\kappa_{n+1}} + \sum_1^n \left(1 - \frac{\kappa_i}{\kappa_n}\right) \frac{c_i}{\kappa^* + \alpha^*(\kappa_i - \kappa^*)}, \quad (3.10)$$

donde α^* es un parámetro en términos del módulo de Poisson

$$\alpha^* = \frac{1 + \nu^*}{3(1 - \nu^*)}. \quad (3.11)$$

El resultado es totalmente análogo al del módulo de rigidez, y se puede consultar en [Budiansky (1965)].

Capítulo 4

Propagación de Ondas Elásticas

4.1 Introducción

En este capítulo se escribe la derivación general de las ecuaciones autoconsistentes del modelo de Sabina y Willis, y enseguida se escriben las ecuaciones para el caso de varias especies de inclusiones esféricas, de acuerdo a como aparecen en [Sabina & Willis (1988)]. Las ecuaciones autoconsistentes son ecuaciones de punto fijo para el tensor de módulos elásticos y la densidad de masa. Sin embargo, cuando el compuesto es isótropo, el tensor de módulos elásticos está caracterizado por solamente dos módulos, los de rigidez μ y compresibilidad κ , consecuentemente se obtienen ecuaciones de punto fijo para los módulos μ y κ y la densidad ρ_0 .

4.2 El método autoconsistente de Sabina y Willis

Se considera un material elástico inhomogéneo con una microestructura típica de una suspensión de partículas elásticas, llamadas inclusiones, en un sólido elástico llamado matriz. Nos referimos a este medio como un *compuesto*. Las inclusiones pueden ser de n tipos distintos; cada

inclusión de tipo $r = 1, 2, \dots, n$ tiene densidad de masa ρ_r , tensor de modulos elásticos L_r y la misma forma, tamaño y orientación. Así, cada una de ellas ocupa un dominio $\mathbf{x}' + \Omega_r$, donde Ω_r define el tamaño y la forma de la inclusión y $\mathbf{x}'$ el vector de posición de su centro de masa, el cual está distribuido aleatoriamente de tal manera que no halla traslape entre las inclusiones. La matriz está caracterizada por su densidad de masa ρ_{n+1} y su tensor de modulos elásticos L_{n+1} . Suponemos que el dominio que ocupa el compuesto es lo suficientemente grande para tener suspendidas una gran cantidad de inclusiones. Es de interés conocer la respuesta estática o dinámica del material ante la acción de fuerzas externas o internas. Por ejemplo cuál sería el campo de desplazamiento $\mathbf{u}$, cómo se atenúan las ondas, etc. Aún si conociéramos con exactitud la configuración de las inclusiones, no podría resolverse este problema completamente. En el caso dinámico tendríamos un problema de dispersión multiple. Así pues, en vez de plantear el problema de esta manera, se plantea el problema de calcular el campo promedio $\langle \mathbf{u} \rangle$ de $\mathbf{u}$ al considerar todas las posibles configuraciones del compuesto mencionado.

A falta de mayor información sobre la posición relativa de las inclusiones, supondremos que la distribución de sus centros de masa es uniforme e isotropa. Es decir, la densidad de probabilidad de encontrar a una inclusión de tipo r centrada en el punto $\mathbf{x}'$ es igual a n_r , independiente de $\mathbf{x}'$, n_r es la densidad del número de dichas inclusiones. La probabilidad de que a un punto $\mathbf{x}$ le corresponda el material del tipo r es igual a la fracción volumétrica $c_r = n_r |\Omega_r|$, donde $|\Omega_r|$ es el volumen que ocupa una inclusión de tipo r . La fracción volumétrica de la matriz es c_{n+1} y se satisface $\sum_{r=1}^{n+1} c_r = 1$. Aún con estas hipótesis estadísticas, que son las más sencillas, es posible predecir ciertos efectos importantes como se verá más adelante.

En ausencia de fuerzas de cuerpo, la respuesta del compuesto está regida por la ecuación de movimiento

$$\text{div } \sigma = \dot{\mathbf{p}}, \quad (4.1)$$

es decir *la divergencia del tensor de esfuerzos es igual a la razón de cambio respecto del tiempo del ímpetu*, la ecuación se tomará en un sen-

4.2. EL MÉTODO AUTOCONSISTENTE DE SABINA Y WILLIS⁴³

tido débil, que incluye la continuidad del desplazamiento y la tracción entre las interfaces inclusión y matriz, donde $\dot{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/dt$. El tensor de esfuerzo σ y la densidad del vector de ímpetu están relacionadas con el tensor de deformación infinitesimal y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ respectivamente, por las relaciones constitutivas

$$\sigma = Le, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{p} = \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.3)$$

donde L y ρ son el tensor de módulos elásticos y la densidad de masa del compuesto respectivamente. Recuérdese que el tensor L es de cuarto orden y los tensores σ y e de segundo orden. En notación indicial o de índices repetidos, estas ecuaciones tienen la forma

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}e_{kl}, \quad (4.4)$$

$$p_i = \rho \dot{u}_i. \quad (4.5)$$

El tensor L y la densidad de masa ρ dependen de la posición $\mathbf{x}$; en particular toman los valores L_r y ρ_r respectivamente cuando $\mathbf{x}$ está en la inclusión de tipo r . Así, por medio de la función indicadora,

$$f(x)_r = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_r \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

podemos escribir

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n+1} L_r f_r(\mathbf{x}), \quad (4.6)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n+1} \rho_r f_r(\mathbf{x}). \quad (4.7)$$

En vez de plantear completamente un problema de muchos cuerpos, se calcula a partir de las ecuaciones los campos promedio $\langle \sigma \rangle$, $\langle e \rangle$, $\langle \mathbf{p} \rangle$, $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$ y $\langle \mathbf{u} \rangle$. La ecuación de movimiento es lineal y el promedio se obtiene inmediatamente

$$\text{div } \langle \sigma \rangle = \langle \dot{\mathbf{p}} \rangle. \quad (4.8)$$

Bajo este enfoque el nuevo problema quedaría completamente planteado si tuviéramos relaciones constitutivas entre $\langle \sigma \rangle$, $\langle \mathbf{p} \rangle$ y $\langle e \rangle$, $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$ respectivamente. En otras palabras, si pudiéramos establecer que

$$\langle \sigma \rangle = L_0 \langle e \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \rho_0 \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle. \quad (4.10)$$

Entonces tendríamos las relaciones constitutivas de un material equivalente que, en principio sería más fácil de estudiar que el original, porque estos parámetros caracterizan a un material sin microestructura cuya respuesta se espera sea la misma que la del material compuesto. A L_0 y ρ_0 los denominaremos tensor de módulos elásticos y densidad *efectivos*. Aunque ya no tenemos planteado un problema de muchos cuerpos, a nuestro objetivo hay que agregarle la búsqueda de las propiedades efectivas L_0 y ρ_0 .

Dado que

$$\langle f_r(x) \rangle = c_r, \quad (4.11)$$

se sigue sin dificultad que

$$\langle e \rangle = \sum_{r=1}^{n+1} c_r \langle e \rangle_r, \quad (4.12)$$

$$\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle = \sum_{r=1}^{n+1} c_r \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle_r, \quad (4.13)$$

donde $\langle e \rangle_r$ y $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle_r$ son, respectivamente, los valores esperados de e y $\dot{\mathbf{u}}$ en la posición $\mathbf{x}$ condicionado a encontrar al material tipo r en $\mathbf{x}$. Igualmente tenemos

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{r=1}^{n+1} c_r \langle \sigma \rangle_r, \quad (4.14)$$

4.2. EL MÉTODO AUTOCONSISTENTE DE SABINA Y WILLIS⁴⁵

$$= \sum_{r=1}^{n+1} c_r L_r \langle e \rangle_r . \quad (4.15)$$

De estas ecuaciones eliminamos $\langle e \rangle_{n+1}$ para obtener

$$\langle \sigma \rangle = L_{n+1} \langle e \rangle + \sum_{r=1}^n c_r (L_r - L_{n+1}) \langle e \rangle_r . \quad (4.16)$$

De manera semejante obtenemos

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \rho_{n+1} \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle + \sum_{r=1}^n c_r (\rho_r - \rho_{n+1}) \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle_r . \quad (4.17)$$

Estas ecuaciones son exactas, así que si tuviéramos una expresión de $\langle e \rangle_r$ en términos de $\langle e \rangle$ y una relación similar entre $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle_r$ y $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$, obtendríamos las relaciones constitutivas del material equivalente.

Para poder encontrar los coeficientes de estas ecuaciones sería necesario conocer completamente la estructura del compuesto. Por una parte, esa información no está disponible y por otra, el problema sería muy difícil de resolver. En cambio, podemos obtener expresiones aproximadas que relacionen a $\langle e \rangle_r$ con $\langle e \rangle$ y a $\langle \mathbf{u} \rangle_r$ con $\langle \mathbf{u} \rangle$ por medio del método autoconsistente. Para esto, suspendemos o insertamos una inclusión de tipo r con centro de masa en el punto $\mathbf{x}'$ en una matriz homogénea de referencia cuyas propiedades son precisamente las del material efectivo, que por el momento son desconocidas, es decir, caracterizados por el tensor de módulos elásticos L_0 y densidad de masa ρ_0 . Planteamos el siguiente problema: cuál es el estado de esfuerzo debido por ejemplo a la acción de una onda plana. El campo de desplazamiento que incide sobre la inclusión es $\mathbf{u}_0$; tenemos un problema de un sólo dispersor. La onda que se propaga en el material de propiedades L_0 y ρ_0 debe ser la onda promedio $\langle \mathbf{u} \rangle$ por autoconsistencia, es decir, independiente del centro de masa $\mathbf{x}'$. Nótese que $\mathbf{u}_0$ y $\langle \mathbf{u} \rangle$ dependen de L_0 y ρ_0 . Una vez resuelto el problema de un dispersor conocemos el desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$, la deformación $e(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$, etc. De ahí calculamos, por ejemplo el promedio condicionado para $\langle e \rangle_r$, el cual está dado por

$$\langle e \rangle_r (x, t) = \frac{1}{\|\Omega_r\|} \int_{U_r} e(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4.18)$$

donde $U_r = \{\mathbf{x}' : \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \Omega_r\}$. Aquí el conjunto de todas las posibles configuraciones está dado por todas las posibles configuraciones del centro de masa $\mathbf{x}'$ de una inclusión de tipo r en la matriz de propiedades efectivas L_0 y ρ_0 . Así cualquier campo promedio está referido a ese conjunto. Y el campo promedio condicional es aquel que consiste en considerar sólo aquellos elementos del conjunto de todas las posibles configuraciones tales que en la posición $\mathbf{x}$ se encuentra una inclusión de tipo r y además $\mathbf{x} \in \mathbf{x}' + \Omega_r$. De forma análoga se calcula la velocidad media condicional $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle_r$.

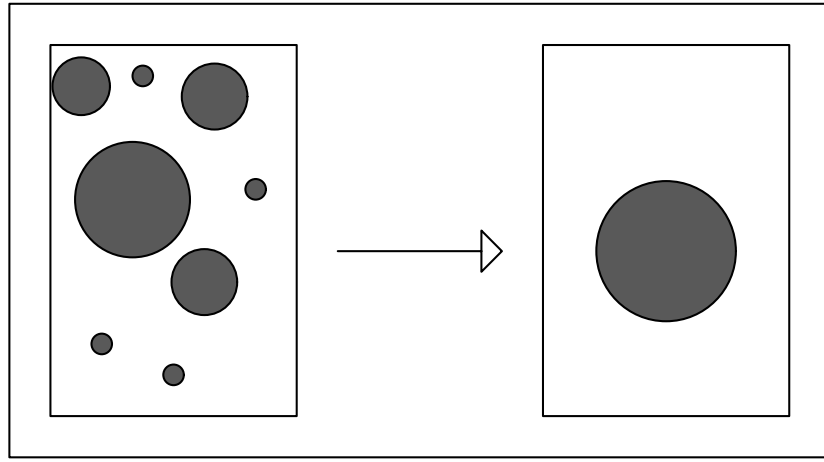


Figura 1. El material heterogéneo se modela con un material compuesto por una matriz con las propiedades efectivas del primero y una sola inclusión de un material r .

Estos campos promedio condicionales dependen de los campos e_0 y $\dot{\mathbf{u}}_0$, y por lo tanto de $\langle e \rangle$ y $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$ una vez que se eligen L_0 y ρ_0 autoconsistentemente. Esto se aclara cuando se calculan explícitamente los campos promedio condicionales.

4.3 El Problema de un Dispensor

Vamos a considerar un compuesto de extensión infinita y las ondas planas promedio que se pueden propagar en él. Así, el problema de un dispensor que analizaremos es el de una onda plana armónica monocromática que incide sobre una inclusión de tipo r , la onda tiene la forma

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \exp i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad (4.19)$$

donde $\mathbf{m}$ es el vector de polarización, $\mathbf{n}$ el vector unidad que define la dirección de incidencia y k es el número de onda del medio de referencia de propiedades L_0 y ρ_0 que por el momento desconocemos.

Es conveniente escribir la relación constitutiva entre el esfuerzo σ y la deformación e en todo el compuesto por medio de la “polarización del esfuerzo” τ , la cual se anula en el exterior de la inclusión. Entonces para cualquier compuesto se tiene

$$\sigma = L_0 e + \tau, \quad (4.20)$$

equivalentemente de (4.2) se escribe

$$\tau = (L_r - L_0)e. \quad (4.21)$$

En forma analoga, si π es la “polarización del ímpetu” que se anula en la matriz, tenemos

$$\pi = -i\omega(\rho_r - \rho_0)\mathbf{u}. \quad (4.22)$$

Al sustituir estas relaciones constitutivas en la ecuación de movimiento, vemos que $\mathbf{u}$ es el desplazamiento que se generaría en un material homogéneo con tensor de módulos elásticos L_0 y densidad ρ_0 como si fuera producido por la fuerza de cuerpo $\text{div } \tau + i\omega\pi$, distribuida en la inclusión exclusivamente. Entonces, por medio de la función de Green $G(\mathbf{x}, \omega)$ del medio de referencia, podemos escribir una representación integral de la solución de este problema. Así, escribimos, para cada ω

$$u_i(\mathbf{x}) = (u_0)_i(\mathbf{x}) + \int [\tau_{kj,k}(\mathbf{y}) + i\omega\pi_j] G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.23)$$

La velocidad y la deformación se obtienen en términos de la función de Green, π y τ a partir de esta ecuación por derivación.

En lo que sigue conviene escribir esta ecuación para $\mathbf{u}$ y las que se obtienen para e y $\dot{\mathbf{u}} = -i\omega\mathbf{u}$ en la siguiente forma simbólica pues resulta más compacta y fácil de asimilar,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + G * (\operatorname{div} \tau + i\omega\pi), \quad (4.24)$$

$$= \mathbf{u}_0 - S * \tau - M * \pi, \quad (4.25)$$

$$e = e_0 - S_x * \tau - M_x * \pi, \quad (4.26)$$

$$-i\omega\mathbf{u} = -i\omega\mathbf{u}_0 - S_t * \tau - M_t * \pi, \quad (4.27)$$

donde el símbolo $*$ representa la operación de convolución espacial en el caso reducido del tiempo, es decir, para las ondas armónicas, en el que todos los campos tienen un factor común $\exp(i\omega t)$ que se puede suprimir sin que halla lugar a confusión. La contribución del campo incidente está dada por $\mathbf{u}_0$, e_0 y $\dot{\mathbf{u}}_0$, respectivamente. Mientras que los operadores S , M , S_x , M_x , S_t y M_t están dados en términos de $G(\mathbf{x}, \omega)$.

Con la sustitución de las ecuaciones (4.21) y (4.22) en (4.26) y (4.27) se obtiene un sistema de ecuaciones integrales acopladas para determinar las polarizaciones π y τ

$$-i\omega\mathbf{u}_0 = (\rho_r - \rho_0)^{-1}\pi - S_t * \tau - M_t * \pi, \quad (4.28)$$

$$e_0 = (L_r - L_0)^{-1}\tau - S_x * \tau - M_x * \pi. \quad (4.29)$$

Estas ecuaciones son difíciles de resolver en forma exacta, por tanto se busca una solución aproximada. Se toma τ y π constantes sobre la inclusión, pero dependientes de la posición de su centro de masa $\mathbf{x}'$ y que satisfagan en promedio las ecuaciones (4.28) y (4.29). De esta manera

$$-i\omega\bar{\mathbf{u}}_0^{(r)} = (\rho_r - \rho_0)^{-1}\pi - \bar{S}_t^{(r)} * \tau - \bar{M}_t^{(r)} * \pi, \quad (4.30)$$

$$\bar{e}_0^{(r)} = (L_r - L_0)^{-1}\tau - \bar{S}_x^{(r)} * \tau - \bar{M}_x^{(r)} * \pi, \quad (4.31)$$

donde la barra representa el valor medio respecto a la inclusión y el superíndice indica que la inclusión es de tipo r . Por ejemplo,

$$\bar{e}_0^{(r)} = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} e_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (4.32)$$

De manera análoga definimos $\bar{\mathbf{u}}_0^{(r)}$; también

$$\bar{S}_x^{(r)} = \frac{1}{|\Omega_r|} \int \int_{\Omega_r \times \Omega_r} S_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}', \quad (4.33)$$

los otros promedios $\bar{S}_t^{(r)}$, $\bar{M}_x^{(r)}$ y $\bar{M}_t^{(r)}$ están igualmente definidos.

Cuando la inclusión tiene un centro de simetría, como es el caso de las inclusiones esféricas, se puede comprobar que $\bar{M}_x^{(r)} = \bar{S}_t^{(r)} = 0$ puesto que los operadores M_x y S_t son impares con respecto a $\mathbf{x}$. Entonces las ecuaciones (4.30) y (4.31) se desacoplan y podemos despejar a τ y π ,

$$\tau = [(L_r - L_0)^{-1} + \bar{S}_x^{(r)}]^{-1} \bar{e}_0^{(r)}, \quad (4.34)$$

$$\pi = -i\omega[(\rho_r - \rho_0)^{-1} + \bar{M}_t^{(r)}]^{-1} \bar{\mathbf{u}}_0^{(r)}. \quad (4.35)$$

De aquí podemos calcular la deformación e y el desplazamiento $\mathbf{u}$ asociados a τ y π en la inclusión de tipo r usando (4.21) y (4.22), esto nos da

$$e = [I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L_0)]^{-1} \bar{e}_0^{(r)}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u} = [I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho_0)]^{-1} \bar{\mathbf{u}}_0^{(r)}, \quad (4.37)$$

donde I denota al tensor unidad de cuarto y segundo orden en el primero y segundo casos respectivamente.

Para una inclusión con centro de masa $\mathbf{x}'$, se encuentra que

$$\bar{e}_0^{(r)} = e_0(\mathbf{x}') h_r(k), \quad (4.38)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_0^{(r)} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}') h_r(k), \quad (4.39)$$

donde

$$h_r(k) = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} e^{ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (4.40)$$

A partir de aquí es posible calcular las estimaciones de los valores condicionados de e y $\mathbf{u}$, es decir,

$$\langle e \rangle_r(\mathbf{x}) = h_r(k)h_r(-k)[I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L_0)]^{-1}e_0(\mathbf{x}), \quad (4.41)$$

$$-i\omega \langle \mathbf{u} \rangle_r(\mathbf{x}) = -i\omega h_r(k)h_r(-k)[I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho_0)]^{-1}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (4.42)$$

Finalmente, identificamos la onda en el material equivalente con la onda promedio en el compuesto, es decir, $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u} \rangle$ y $e_0 = \langle e \rangle$. Al sustituir estos valores en las ecuaciones (4.41) y (4.42) tenemos las relaciones que estabamos buscando cuando obtuvimos las ecuaciones (4.16) y (4.17). Sustituyendo en éstas y cancelando los factores multiplicativos $\langle e \rangle$ y $\langle \mathbf{u} \rangle$, obtenemos las expresiones para las relaciones constitutivas del material equivalente, estas son las ecuaciones autoconsistentes.

$$L_0 = L_{n+1} + \sum_{r=1}^n c_r h_r(k)h_r(-k)(L_r - L_0)[I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L_0)]^{-1}, \quad (4.43)$$

$$\rho_0 = \rho_{n+1} + \sum_{r=1}^n c_r h_r(k)h_r(-k)(\rho_r - \rho_0)[I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho_0)]^{-1}. \quad (4.44)$$

Estas ecuaciones de punto fijo constituyen una forma conveniente de calcular L_0 y ρ_0 dada una onda plana.

4.4 Inclusiones Esféricas

La formulación de las ecuaciones autoconsistentes es bastante general, no se especifican las propiedades de la matriz ni las de las inclusiones, tampoco la forma de éstas. En esta sección se escriben las ecuaciones autoconsistentes en el caso de que las inclusiones sean esferas de n diferentes tipos, cada especie de radio a_r y cada tipo de material caracterizado por propiedades L_r y ρ_r . La matriz tiene propiedades L_{n+1} y ρ_{n+1} . Todos los materiales son isótropos y sus tensores de módulos elásticos están caracterizados por los correspondientes módulos de compresibilidad κ_r y de rigidez μ_r .

Una vez resueltas las ecuaciones autoconsistentes, el número de onda k debe satisfacer el problema de valores propios

$$[(L_0)_{ijkl}k_jk_i - \rho\omega^2\delta_{ij}]m_i = 0, \quad (4.45)$$

de acuerdo a la discusión sobre ondas planas del capítulo uno.

Al resolver las ecuaciones autoconsistentes se debe considerar la función de Green adecuada ¹, debido a que entra en las ecuaciones a través de los promedios $\bar{S}_x^{(r)}$ y $\bar{M}_t^{(r)}$, los cuales hay que calcular a cada paso de la iteración. Los autores eligen la función de Green $G(\mathbf{x}, \omega)$ para un medio tridimensional homogéneo e isótropo con propiedades L_0 y ρ_0 , que representa ondas viajeras que decaen a medida que $|\mathbf{x}|$ crece. Esta función tiene la forma

$$4\pi\rho_0 G_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \frac{e^{\omega|\mathbf{x}|\beta}}{\beta^2|\mathbf{x}|} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{e^{\omega|\mathbf{x}|\alpha} - e^{\omega|\mathbf{x}|\beta}}{|\mathbf{x}|} \right], \quad (4.46)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, α es la rapidez de la ondas P y β la de las ondas S , y las rapideces están dadas por

$$\alpha = \left(\frac{\kappa_0 + 4\mu_0/3}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (4.47)$$

$$\beta = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (4.48)$$

en términos de los módulos de compresibilidad κ_0 , de rigidez μ_0 , y la densidad de masa ρ_0 del medio. Dado que estamos considerando un material equivalente, los parámetros κ_0 , μ_0 y ρ_0 pueden tomar valores complejos, en tal caso las raíces cuadradas en (4.47) y (4.48) se toman ambas con parte real positiva y parte imaginaria negativa, para que cuando ω sea real, la función de Green dada por la ecuación (4.46) corresponda a ondas que se alejan de la fuente y decaen cuando $|\mathbf{x}|$ crece.

Con la notación indicial se escribe

$$(L_0)_{ijkl} = \kappa_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}/3). \quad (4.49)$$

¹En el apéndice se encuentra la discusión sobre la función de Green y el cálculo de $\bar{S}_x^{(r)}$ y $\bar{M}_t^{(r)}$ en términos de la misma.

En notación simbólica²

$$L_0 = (3\kappa_0, 2\mu_0), \quad (4.50)$$

de tal manera que

$$3\kappa_0 = \frac{1}{3}(L_0)_{iikk}, \quad (4.51)$$

$$3\kappa_0 + 10\mu_0 = (L_0)_{ijij}. \quad (4.52)$$

Esto permite calcular los términos correspondientes a $3\kappa_0$ y $2\mu_0$ de $\bar{S}_x^{(r)}$ por medio de $(\bar{S}_x^{(r)})_{iikk}$ y $(\bar{S}_x^{(r)})_{ijij}$.

$$\bar{S}_x^{(r)} = \left[\frac{\epsilon_\alpha}{3\kappa_0 + 4\mu_0}, \frac{1}{5} \left[\frac{2\epsilon_\alpha}{3\kappa_0 + 4\mu_0} + \frac{\epsilon_\beta}{\mu_0} \right] \right], \text{ donde} \quad (4.53)$$

Por medio de estas propiedades las ecuaciones autoconsistentes se escriben

$$\kappa_0 = \kappa_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{c_r h_r(k) h_r(-k) (\kappa_r - \kappa_{n+1})}{1 + (\kappa_r - \kappa_0) \tilde{\kappa}}, \quad (4.54)$$

$$\mu_0 = \mu_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{c_r h_r(k) h_r(-k) (\mu_r - \mu_{n+1})}{1 + (\mu_r - \mu_0) \tilde{\mu}}, \quad (4.55)$$

$$\rho_0 = \rho_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{c_r h_r(k) h_r(-k) (\rho_r - \rho_{n+1})}{1 + (\rho_r - \rho_0) \tilde{\rho}}, \quad (4.56)$$

donde

$$\tilde{\kappa} = \frac{3\epsilon_\alpha}{3\kappa_0 + 4\mu_0}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{2[2\mu_0\epsilon_\alpha + (3\kappa_0 + 4\mu_0)\epsilon_\beta]}{5\mu_0(\kappa_0 + 4\mu_0)}, \quad (4.58)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{3 - \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta}{3\rho_0}. \quad (4.59)$$

²Ver apéndice A.

La función $h_r(k)$ para inclusiones esféricas de radio a_r está dada por

$$h_r(k) = 3[\text{sen}(ka_r) - ka_r \cos(ka_r)]/(ka_r)^3. \quad (4.60)$$

Las ecuaciones (4.57), (4.58) y (4.59) pueden resolverse por iteración. A frecuencia cero se calcula la solución exacta para una inclusión en una matriz elástica, isótropa e infinita. Después se procede incrementando la frecuencia y tomando como valor inicial de la nueva iteración el que se obtuvo en la frecuencia anterior. Este es el llamado método de continuación. Para una onda incidente P el número de onda se toma a partir de los valores de L_0 y ρ_0 , es decir

$$k = k_\alpha = \omega \left(\frac{3\kappa_0 + 4\mu_0}{3\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (4.61)$$

y para una onda incidente S ,

$$k = k_\beta = \omega \left(\frac{\mu_0}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (4.62)$$

Capítulo 5

Compuestos con Dos Especies de Inclusiones

5.1 Introducción

La meta de este trabajo es estudiar el efecto de una onda plana monocromática que se propaga a través de una suspensión de partículas sólidas en un sólido, y para ese fin se interpretan las predicciones del modelo de [Sabina & Willis (1988)]. Se considera que el material está formado por una matriz elástica en la cual se hallan suspendidas varias especies de inclusiones esféricas. Es decir, en la matriz están distribuidas de manera aleatoria dos o más poblaciones de esferas tales que en cada población las esferas son de un mismo tamaño y material. De acuerdo a las hipótesis del modelo autoconsistente el compuesto macroscópicamente se comporta como homogéneo, isótropo y dispersivo.

Debido a la cantidad de parámetros en el problema que nos ocupa (e.g. la concentración volumétrica de los materiales solutos, los módulos elásticos y la densidad de masa de los componentes, el número de poblaciones de esferas, etc.), es necesario restringir los casos a estudiar para poder explicar los resultados que el modelo arroja. Esto se obvia si se recuerda que la investigación es solo numérica y que se conocen casos con una sola especie de inclusiones en que las soluciones teóricas concuerdan muy bien con datos experimentales. Más específicamente, la

elección de las cantidades de las mezclas estudiadas se basa en el análisis y la comparación con datos experimentales de las gráficas de rapidez de fase y atenuación contra frecuencia para ondas longitudinales, o P , en la resina epóxica Epon 828Z con una sola especie de esferas de plomo a 5.4% de concentración.

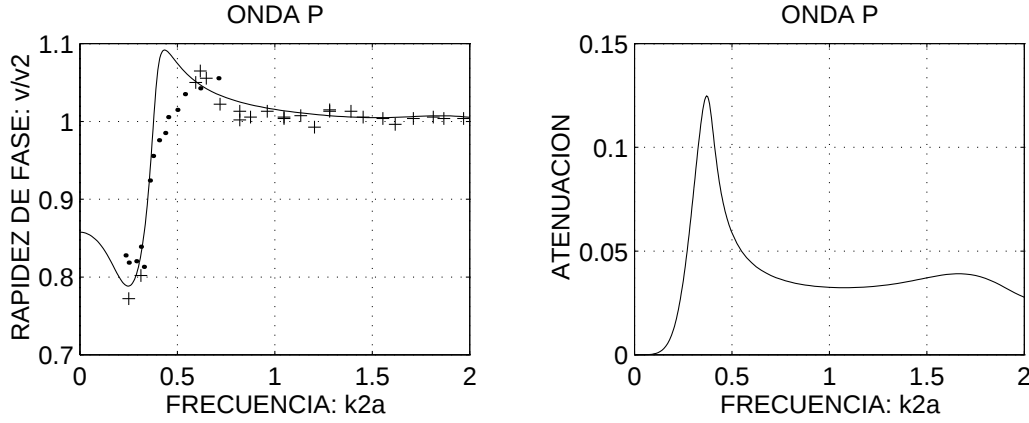
5.2 Una Población de Esferas de Plomo en Epon 828Z

Para facilitar el análisis de los resultados mencionados se grafican cantidades adimensionales, es decir, se grafica la rapidez de fase v de la onda P en el material efectivo, dividida por la rapidez de fase v_2 de la onda P en el material matriz, y la atenuación α multiplicada por el radio a de las esferas de alguna población, ambas contra el número de onda normalizado k_2a , donde k_2 es el número de onda de la onda P relativo al material matriz y a el radio de las esferas. La medida de atenuación es $\text{Im}[k]$, véase Figura (5.1).

Es indistinto hablar de número de onda o frecuencia porque se trata de cantidades adimensionales o numéricas. Por ejemplo, $k_2a = \omega a/v_2$, donde ω es la frecuencia radial de la onda. El uso de cantidades adimensionales permite comparar entre resultados de diferentes materiales y dimensiones haciendo sólo un reescalamiento.

La comparación de las soluciones del modelo con los datos experimentales de [Kinra (1985)] y [Kinra (1987)] que se presenta, indica que los resultados teóricos y prácticos concuerdan muy bien con una sola especie de inclusiones. Es notable que la relación soluto/matriz entre las densidades es grande en este caso de esferas de plomo en Epon 828Z. Además parece apropiado pensar que si el radio de las inclusiones permanece constante, entonces a medida que la concentración volumétrica de las inclusiones es menor, éstas se encuentran más alejadas entre sí. Esto sugiere que conforme la suspensión está más diluida, menos fuentes de dispersión se están despreciando. Y dado que en este caso se toma una solución aproximada del problema de un solo dispersor, la predicción autoconsistente será más precisa.

5.2. UNA POBLACIÓN DE ESFERAS DE PLOMO EN EPON 828Z57



Gráficas de rapidez de fase (izquierda) v/v_2 y atenuación (derecha) αa versus frecuencia $k_2 a$, para ondas P . La curva continua es la predicción teórica y se compara con los valores experimentales reportados por Kinra (85) +, y Kinra (87) $\cdots$ para una sola población de esferas de plomo en Epon 288Z a 5.4% de concentración.

Figure 5.1: Teoría y experimentos.

Debido a que la predicción teórica estima de forma aproximada la solución del caso de un sólo dispersor, el rango de validez de los resultados se limita a un intervalo de frecuencia $k_2 a \leq \pi/2$, es decir, desde longitudes de onda muy grandes hasta que la longitud de onda en la matriz es aproximadamente el doble del diámetro de las esferas respecto a las cuales se normaliza. En este intervalo de frecuencia se manifiesta una resonancia notable aún con la solución aproximada que se usa. Esto se debe, según hacen constar los autores, a que se toman constantes las polarizaciones del esfuerzo $\tau = (L_r - L_0)e$ y del ímpetu $\pi = -i\omega(\rho_r - \rho_0)\mathbf{u}$ que se introducen para obtener una relación constitutiva entre los tensores de esfuerzo σ y de deformación e , y entre la densidad de momento $\mathbf{p}$ y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ a lo largo de todo el compuesto. Por tanto, es un problema independiente averiguar cómo aumenta el rango de validez del modelo usando polarizaciones no constantes ¹. Por otra

¹Se debe mencionar que la aproximación de la solución de un solo dispersor puede hacerse con tanta precisión como se desee. Sin embargo, las ecuaciones analíticas que se obtienen en el presente caso son fáciles de resolver.

parte, para frecuencias muy bajas hay un factor adicional de precisión, porque para frecuencia cero se calcula la solución autoconsistente exacta para una sola esfera incrustada en una matriz infinita e isotrópica, véase capítulo §3, y a partir de esos datos usando un método de continuación, se construyen los datos que constituyen la predicción teórica. El método de continuación permite calcular en forma aproximada la densidad y el tensor de módulos elásticos efectivos, en base a las ecuaciones de punto fijo que son las ecuaciones autoconsistentes del modelo de Sabina y Willis, bajo la hipótesis de que si se conocen la densidad y el tensor de módulos elásticos del compuesto para un valor de frecuencia ω_0 , entonces podemos aproximarlos en una pequeña vecindad de ω_0 resolviendo por iteración las ecuaciones autoconsistentes, tomando como valores iniciales para la iteración los correspondientes a ω_0 . De esta manera, se construye la predicción teórica empezando por calcular la solución exacta para frecuencia cero y después tomando pequeños incrementos de frecuencia de acuerdo al método de continuación.

Por otra parte, al analizar la gráfica de rapidez de fase del Pb en Epon 828Z a 5.4% de concentración podemos dividirla en tres partes, primero un intervalo de baja frecuencia en que el cociente de las rapidezces es decreciente, desde el límite estático hasta que el cociente toma un valor mínimo, seguido por un intervalo de mediana frecuencia en que dicho cociente aumenta muy dramáticamente, excediendo a uno, para finalmente aproximarse a uno a alta frecuencia sin oscilar más. La explicación de este comportamiento es que existe una frecuencia característica del compuesto tal que las esferas resuenan en una forma típica cuando la frecuencia radial de la onda que se propaga iguala un valor crítico, de hecho la curva de rapidez de fase tiene un punto de inflexión en esa frecuencia. Asimismo, se observa que la atenuación toma un valor máximo en la misma frecuencia que el punto de inflexión la rapidez de fase, véase Figura (5.1). La interpretación de ese máximo de atenuación es que la energía de la onda queda casi atrapada en las inclusiones cuando la frecuencia de la onda coincide con el valor crítico. Para hacer más evidente esta explicación podemos establecer la siguiente analogía: Consideremos una esfera incrustada en una matriz elástica tal que la densidad de masa de la esfera sea grande comparada con la de la matriz. Supongamos que a la esfera se le desplaza desde su

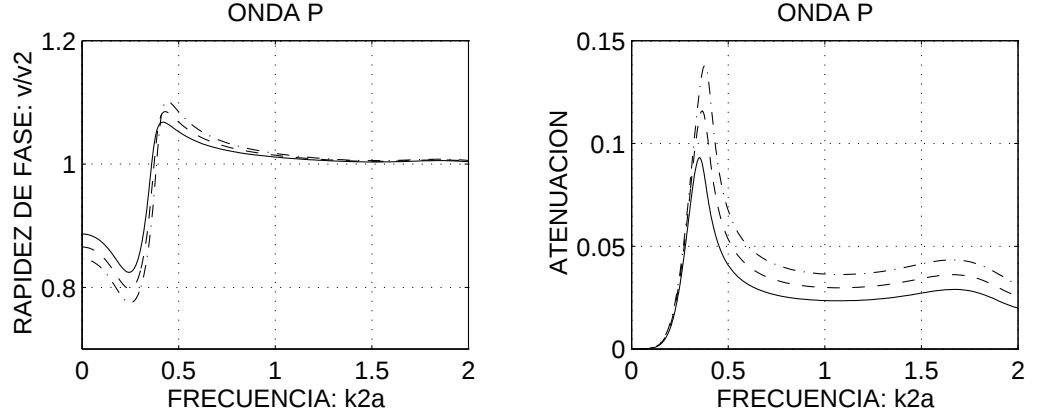
5.2. UNA POBLACIÓN DE ESFERAS DE PLOMO EN EPON 828Z59

posición de equilibrio sin rotación alguna y luego se le deja mover libremente. Parece apropiado pensar que la esfera se moverá en una forma semejante a un sistema masa resorte amortiguado. Para ésto podemos asociar el término masa con el hecho de que la densidad de masa de la esfera es grande comparada con la de la matriz, el término resorte se debe al carácter elástico de la matriz y el término de amortiguamiento se debe a la energía mecánica que se irradia hacia afuera de la esfera debido al movimiento. En un compuesto con muchas inclusiones la frecuencia de resonancia de una esfera se ve afectada por la presencia del resto de ellas, sin embargo, es lo más adecuado pensar a cada esfera como incrustada en un material isótropo y homogéneo con propiedades efectivas iguales a las del compuesto, de acuerdo con el modelo de autoconsistencia. Por otra parte, se observa en la gráfica de atenuación un máximo relativo a alta frecuencia, aunque a esa escala no se ve que corresponda a un punto de inflexión en la rapidez de fase.

Al parecer la frecuencia de resonancia depende continuamente de la concentración y el radio de las esferas, es decir, al variar ligeramente la concentración la frecuencia de resonancia también varía ligeramente, véase Figura (5.2).

Asimismo, si consideramos una mezcla con dos especies de inclusiones de radios diferentes pero del mismo material, cada especie a 2.5% de concentración y tal que los radios sean aproximadamente del mismo orden de magnitud, digamos en una proporción de $a_1/a_2 = 4/5$, si normalizamos respecto del radio mayor $a = a_2$, la frecuencia adimensional de resonancia es comparable a la de una mezcla con una sola población de esferas a 5% de concentración, véase Figura (5.3). De aquí en adelante todas las gráficas se normalizan respecto del radio mayor cuando aparecen dos radios de inclusiones.

En base a estas observaciones, se han estudiado inicialmente compuestos con dos especies de inclusiones del mismo material y radios muy diferentes. Se analizaron mezclas de esferas de plomo en la resina epóxica Epon 828Z, esferas de fierro en polimetilacrílico (PMMA) y esferas de vidrio en la resina epóxica TraCast 3012. El criterio de [Kinra (1985)] para escoger estos materiales fue motivado para producir resultados experimentales con materiales accesibles y que fueran



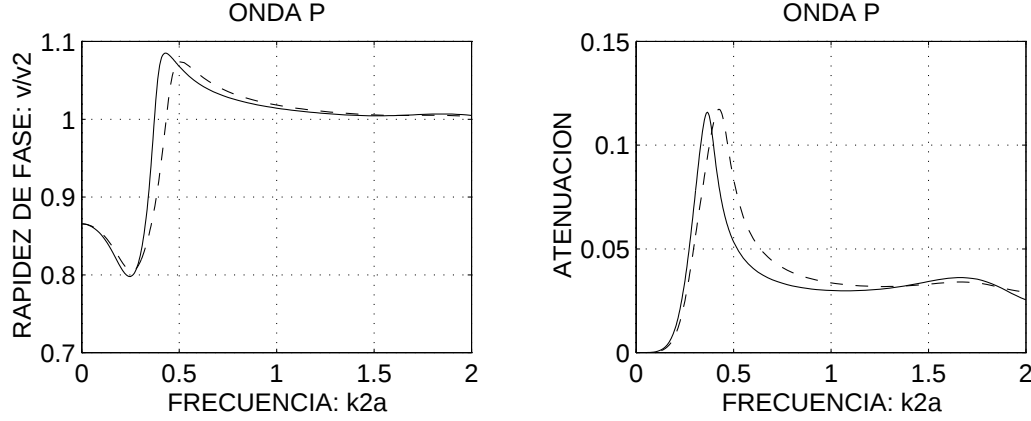
La frecuencia de resonancia depende continuamente de la concentración de las inclusiones. 4% línea continua, 5% línea de guiones y 6% línea de puntos y guiones.

Figure 5.2: La frecuencia de resonancia.

representativos de los diferentes parámetros que intervienen. Así, la relación soluto/matriz entre las densidades de masa ρ , los módulos de Young E , de rigidez μ y de compresibilidad κ es como se muestra en la Tabla (5.1). Obsérvese que en el caso de Pb/Epon 828Z el cociente de las densidades es grande, mientras que en el caso de Fe/PMMA el cociente entre los módulos de Young es el grande. Y finalmente, en la combinación vidrio/TraCast el cociente de las densidades es de orden uno y el de los módulos de Young es de un orden de magnitud mayor. Esta disparidad entre las características de las combinaciones de materiales es de utilidad para interpretar las predicciones del modelo.

5.3 Dos Poblaciones del Mismo Material

Dada la frecuencia radial ω de la onda incidente y los módulos elásticos κ_r , μ_r y la densidad de masa ρ_r que caracterizan a cada uno de los materiales componentes de la mezcla, se resuelven las ecuaciones autoconsistentes (4.54), (4.55) y (4.56) para determinar los parámetros efectivos κ_0 , μ_0 y ρ_0 . Las tres ecuaciones tienen la misma estructura: el



Gráficas de mezclas con una y dos poblaciones del mismo material tal que las frecuencias de resonancia son comparables. La línea — corresponde a una población a 5% de concentración, la línea - - - corresponde a la mezcla con dos poblaciones a 2.5% de concentración. El cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 4/5$ y se normaliza respecto del radio mayor $a = a_2$.

Figure 5.3: Frecuencias de resonancia comparables.

parámetro efectivo igualado al parámetro en la matriz más un término por cada población en el compuesto, que depende del radio a_r de las esferas y de las características del material que forma las inclusiones de esa población. Cada término viene de la solución aproximada de un solo dispersor, el del material y radio correspondiente. Por tanto en el caso de dos poblaciones de inclusiones de diferente radio, el término que corresponde al radio mayor es válido desde longitudes de onda muy grandes hasta que el diámetro de las esferas $2a_2$ es aproximadamente igual a la semilongitud de onda, es decir $k_2a_2 < \pi/2$, e igualmente el término que corresponde a la otra población de esferas es válido en un intervalo $k_2a_1 < \pi/2$. La suma de los dos términos deberá ser válida en el intervalo común de validez, es decir, el que corresponde al radio mayor. Por esa razón todas las gráficas de mezclas con dos poblaciones de diferente radio consideradas están normalizadas respecto del radio mayor.

	ρ'/ρ	E'/E	μ'/μ	κ'/κ
Pb/Epon 828Z	9.4010	4.9553	7.0461	4.8284
Fe/PMMA	6.6723	40.004	30.4367	41.4086
vidrio/TraCast	2.1121	14.9255	7.1887	16.9756

Los cocientes soluto/matriz de la densidad de masa y los módulos elásticos de los compuestos.

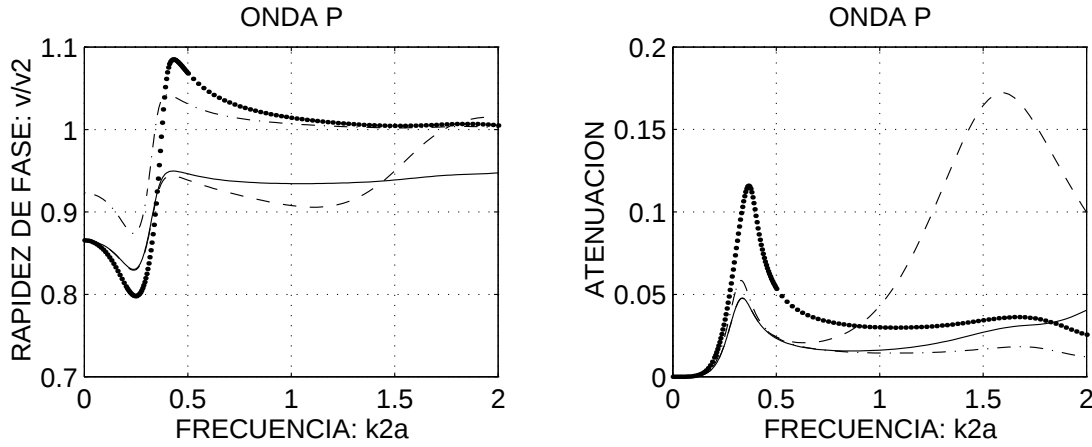
Table 5.1: Cocientes de los módulos y densidades.

5.3.1 Pb/Epon 828Z

Inicialmente se analizan las gráficas de rapidez de fase y atenuación de un compuesto con dos poblaciones de esferas de Pb de diferente radio en Epon 828Z. Se consideran dos mezclas con dos poblaciones de esferas, cada una a 2.5% de concentración de tal manera que el cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 1/5$ y $a_1/a_2 = 1/10$ respectivamente. Nótese que se ha tomado igual concentración volumétrica y no igual número de esferas en cada población. Así, si hay N_2 esferas grandes en un volumen dado, entonces habrá $N_1 = (a_2/a_1)^3 N_2$ esferas pequeñas en promedio en ese mismo volumen. Esta elección se debe a que los valores extremos en las gráficas dependen de la concentración volumétrica de esferas. Los resultados de los dos compuestos mencionados se comparan con los que corresponden a mezclas con una población de inclusiones a 2.5% y 5% de concentración, porque 5% es la concentración total en las mezclas con dos poblaciones, y por otra parte, cada población de esferas debería resonar en forma independiente, es decir, a frecuencia adimensional muy diferente porque tambien los radios difieren por mucho, véase Figura (5.4).

Se observa que en cada caso aparece un máximo de atenuación aproximadamente a frecuencia adimensional 3.3×10^{-1} , véase Tabla (5.2). En los compuestos con dos radios diferentes ese pico de atenuación corresponde a las esferas grandes.

Un hecho que hace más evidente el resultado anterior es que para frecuencias muy próximas a cero, o equivalentemente para longitudes de onda muy grandes, la rapidez de fase en los compuestos con dos ra-



Se comparan dos mezclas con una sola población de Pb en Epon 828Z, con dos mezclas de los mismos materiales con dos poblaciones a 2.5% de concentración. La línea — corresponde al caso con dos poblaciones cuando el cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 1/10$, la línea - - al caso del cociente $a_1/a_2 = 1/5$ la línea ··· a la mezcla con una población a 2.5% de concentración y la línea - · - · corresponde a la mezcla con una población a 5% de concentración. La normalización es con respecto del radio mayor. El mínimo de la rapidez de fase es mayor en los compuestos con dos poblaciones que en la mezcla con una población de concentración de 5% porque en esas frecuencias la onda “siente” la presencia de las esferas pequeñas.

Figure 5.4: Cuatro mezclas de Pb en Epon 828Z, se normaliza respecto del radio mayor.

dios es muy próxima a la del compuesto con una población a 5% de concentración, porque las longitudes de onda correspondientes son muy grandes comparadas con ambos radios. De esta manera, a medida que la frecuencia aumenta, la longitud de onda disminuye hasta que resuenan las esferas grandes. Los valores extremos en rapidez de fase y atenuación aparecen casi en la misma frecuencia en todos los casos, excepto en el de la mezcla con dos poblaciones con radios en proporción $a_1/a_2 = 1/5$, caso en el que el modelo autoconsistente además predice la resonancia de alguna población de esferas a alta frecuencia. Por otra parte, a pesar de que el pico de atenuación que se manifiesta cerca de $k_2a_2 = 3.3 \times 10^{-1}$ difiere aproximadamente por 10^{-2} entre las mezclas con dos poblaciones y el compuesto con una población a 2.5%², las on-

²Este es un argumento muy fuerte para decir que en tales compuestos resuenan

a_1/a_2	αa_2	$k_2 a_2$	$\lambda_{Epon828Z}$	concentración
1:10	4.7784235e-02	3.3500001e-01	1.8755777e+01	5%
1:5	4.7589410e-02	3.3500001e-01	1.8755777e+01	5%
-	5.8425996e-02	3.3000001e-01	1.9039955e+01	2.5%
-	1.1586659e-01	3.6500001e-01	1.7214206e+01	5%

Se compara la frecuencia de la máxima atenuación y la longitud de onda correspondiente entre dos compuestos de dos poblaciones de Pb en Epon 828Z a 2.5% con la misma mezcla con una sola población de inclusiones a 2.5% y a 5% de concentración.

Table 5.2: Se compara entre cuatro mezclas de Pb en Epon 828Z el primer pico de atenuación.

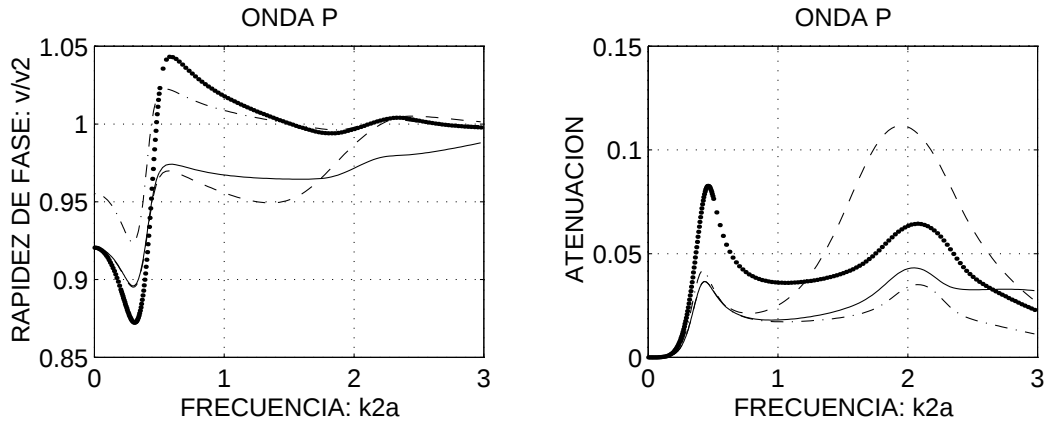
das P en los compuestos con dos poblaciones son más lentas, es decir, el cociente de las rapidezces se mantiene por abajo de uno. De hecho, en el caso de dos radios en proporción $a_1/a_2 = 1/10$ el medio casi no es dispersivo para frecuencias adimensionales desde 0.4 hasta 2.0.

En el caso de dos poblaciones con radios en proporción $a_1/a_2 = 1/5$ el modelo autoconsistente predice la resonancia de alguna de las dos poblaciones de esferas a alta frecuencia, que de acuerdo con los razonamientos anteriores corresponde a las esferas de radio menor. Más aún, podemos ver que las frecuencias en que el modelo predice los dos máximos de atenuación están casi en la misma proporción que los radios. Dado que $k_2 a_1 = k_2 a_2 (a_1/a_2)$, entonces $k_2 a_1 = (3.35 \times 10^{-1})(5) \approx 1.60 \times 10^0$, la frecuencia de resonancia de alta frecuencia. Se observa en la gráfica de atenuación que el máximo de atenuación debido a la resonancia de las esferas pequeñas es mayor que el que corresponde a la resonancia de la otra población de inclusiones. La explicación de este hecho es que en un volumen dado el número promedio de esferas pequeñas es mucho mayor que el número de esferas grandes, entonces aún cuando la fracción volumétrica de cada población es la misma, la atenuación ocasionada por las esferas pequeñas debe ser mayor cuando actúan como resonadores, es decir cuando atrapan energía.

sólo las esferas grandes en esa frecuencia adimensional.

5.3.2 Fe/PMMA

El mismo análisis de los compuestos de Pb en Epon 828Z se ha hecho con mezclas de Fe en PMMA y vidrio en TraCast. En el caso del Fe en PMMA el comportamiento de la mezcla con una sola población a 2.5% de concentración es similar al de la mezcla correspondiente de Pb en Epon 828Z para $k_2a < \pi/2$; sin embargo, para frecuencias adimensionales $k_2a \approx 2$ la atenuación y la rapidez de fase se vuelven crecientes. De hecho el modelo autoconsistente predice un modo normal de vibración para alguna frecuencia adimensional apenas mayor que 2, véase Figura (5.5).



La línea — corresponde a dos poblaciones de Fe en PMMA a 2.5% de concentración, el cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 1/10$, la línea --- corresponde al mismo tipo de mezcla cuando el cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 1/5$, la línea -·- corresponde a la mezcla con una especie a 2.5% de concentración y la línea ··· corresponde a la mezcla con una especie a 5% de concentración.

Figure 5.5: Fe en PMMA, se normaliza respecto del radio mayor.

Por esa razón el análisis para las mezclas de Fe en PMMA se hace para un intervalo de frecuencia adimensional $[0, 3]$. A pesar de que se excede el intervalo donde la predicción teórica es más apropiada.

La descripción de las gráficas de rapidez de fase y atenuación es similar a las correspondientes de Pb en Epon 828Z para las cuatro mezclas

a_1/a_2	αa_2	$k_2 a_2$	λ_{PMMA}	concentración
1:10	3.6577161e-02	4.3500000e-01	1.4444104e+01	5%
1:5	3.6558345e-02	4.3500000e-01	1.4444104e+01	5%
-	4.1790921e-02	4.1999999e-01	1.4959965e+01	2.5%
-	8.2670458e-02	4.6000001e-01	1.3659098e+01	5%

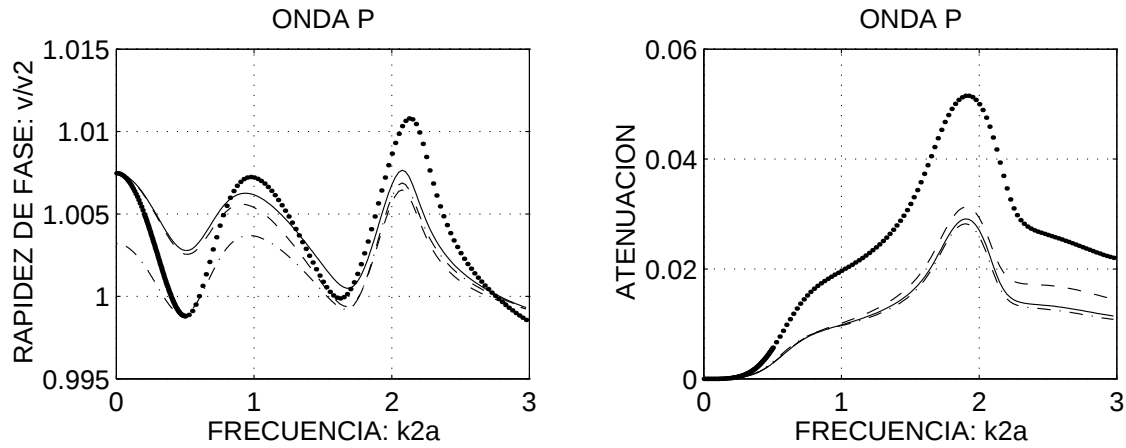
Se compara la atenuación, frecuencia y número de onda entre dos compuestos con una sola población a 2.5% y 5% de concentración, con dos mezclas con dos poblaciones que los radios están en proporción $a_1/a_2 = 1/5$ y $a_1/a_2 = 1/10$, de Fe en PMMA y se normaliza respecto del radio mayor.

Table 5.3: Se compara entre cuatro mezclas de Fe en PMMA el primer pico de atenuación.

consideradas, excepto que el segundo máximo de atenuación se aprecia con más claridad que en los compuestos de Pb en Epon 828Z. Para frecuencias próximas a cero la rapidez de fase en las mezclas con dos poblaciones a 2.5% de concentración es muy próxima a la del compuesto con una población a 5%, y para frecuencias más altas aunque la atenuación toma prácticamente los mismos valores que en el caso de una población a 2.5% de concentración, la rapidez de fase es menor debido a la presencia de la otra población de esferas. Por otra parte, de la comparación entre las gráficas de atenuación de los casos con una población de esferas y las que corresponden al compuesto con dos radios en proporción $a_1/a_2 = 1/5$ se observa en los primeros dos que las esferas resuenan en dos frecuencias diferentes y en el tercero se ve que las esferas pequeñas resuenan casi a la misma frecuencia adimensional que las grandes en el pico de atenuación que se manifiesta a mayor frecuencia, es decir, hay un reforzamiento en el pico de atenuación porque casi coinciden las frecuencias críticas de los dos tipos de esferas. Además de que la medida de atenuación debida a las esferas pequeñas es mayor que la que corresponde al otro radio de esferas, como se explicó en los compuestos de Pb en Epon 828Z.

5.3.3 Vidrio/TraCast

Del análisis de las combinaciones de esferas de vidrio en TraCast consideradas se concluye que este tipo de mezclas es más debilmente dispersivo que los otros dos antes tratados, porque la variación total en la rapidez de fase así lo indica. Al parecer qué tan dispersivo es un compuesto depende fuertemente del cociente soluto/matriz de la densidad de masa, véase Tabla (5.1). También merece destacarse que en los tres tipos de mezclas considerados, donde se ha mantenido constante la fracción volumétrica de inclusiones, la menor frecuencia de resonancia de las esferas es mayor conforme el material de las inclusiones es menos denso respecto de la matriz. En el presente caso el primer máximo de atenuación se manifiesta a frecuencia $k_2a \approx 1.9 \times 10^{-1}$. Véase Figura (5.6) y Tabla (5.4).



La línea — corresponde a una mezcla con dos poblaciones vidrio al 2.5% de concentración en TraCast, la proporción entre los radios es $a_1/a_2 = 1/10$, la línea — — corresponde al mismo tipo de mezcla pero el cociente entre los radios es $a_1/a_2 = 1/5$, la línea — · — es de la mezcla con una población a 2.5% y a la de una población a 5% de concentración corresponde la línea · · ·.

Figure 5.6: Esferas de vidrio en TraCast.

Por otra parte, en los compuestos de esferas de vidrio en TraCast vemos que el límite estático del cociente de las rapidezces de fase es mayor que uno. De hecho, en los compuestos con dos radios de inclusiones dicho

a_1/a_2	αa_2	$k_2 a_2$	$\lambda_{TraCast}$	concentración
1:10	2.9123399e-02	1.9000000e+00	3.3069397e+00	5%
1:5	3.1292636e-02	1.9000000e+00	3.3069397e+00	5%
-	2.8231328e-02	1.9000000e+00	3.3069397e+00	2.5%
-	5.1528648e-02	1.9250000e+00	3.2639924e+00	5%

Se compara la atenuación, frecuencia y número de onda entre dos poblaciones con dos poblaciones de vidrio en TraCast, normalizando respecto del radio mayor, con las dos mezclas con una población a 2.5% y 5% de concentración.

Table 5.4: Se compara entre mezclas de vidrio en TraCast el primer pico de atenuación.

cociente se mantiene por arriba de uno para frecuencias adimensionales desde $k_2 a = 0$ hasta $k_2 a \approx 2.75$. Y al igual que en los compuestos de Pb en Epon 828Z y Fe en PMMA cerca del límite estático el cociente de las rapidezces de fase en los compuestos con dos radios es muy próximo al mismo cociente en la mezcla con una población a 5% de concentración.

Cerca de la frecuencia $k_2 a = 0.7$ la rapidez de fase es monótona creciente y tiene un punto de inflexión en cada una de las cuatro mezclas, aunque no corresponde propiamente a un máximo de atenuación por lo que no se considera que alguna población de esferas resuene cerca de esa frecuencia. Sin embargo, a una frecuencia mayor que en los dos casos anteriores, de $k_2 a \approx 1.9 \times 10^0$ se manifiesta la resonancia o “atrapamiento” de energía por las esferas grandes y nada más en ese intervalo de frecuencia.

5.4 Dos Especies de Inclusiones de Diferente Material

En base a las conclusiones de la sección anterior, parece apropiado comparar entre mezclas con dos tipos de inclusiones de diferente material para utilizar lo que se sabe sobre compuestos con dos especies de inclusiones del mismo material cuando los radios difieren por mucho. Para ese fin se han considerado mezclas a 2.5% de concentración de

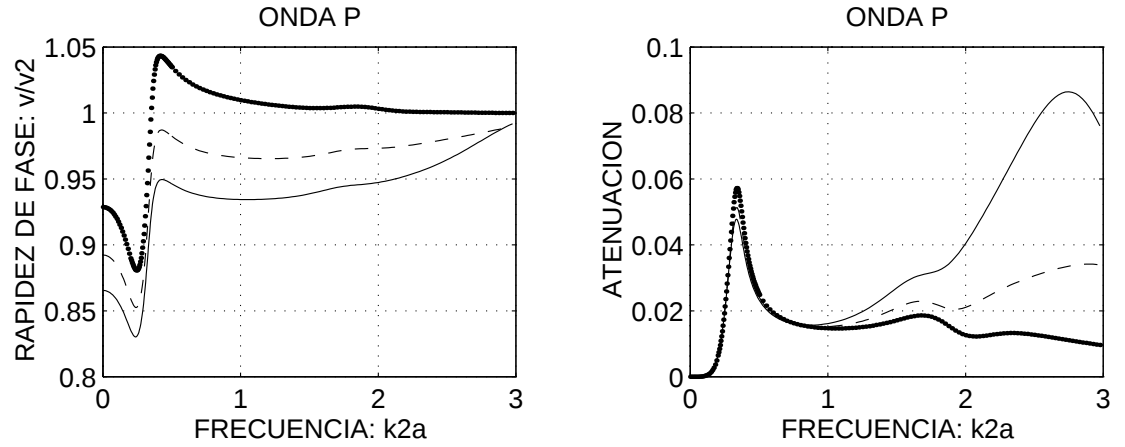
Pb/Epon 828Z, Fe/PMMA y vidrio/traCast, añadiendo en cada caso una segunda población de esferas a 2.5% de concentración, de cada uno de los materiales solutos, de radio diez veces menor que el de la primera población. Así, por ejemplo en el PMMA las esferas de Fe serán siempre las de radio mayor.

5.4.1 Epon 828Z

Al comparar las frecuencias de resonancia de cada uno de los compuestos que tienen como matriz Epon 828Z vemos que se manifiesta un pico de atenuación aproximadamente en el punto $k_2a = 3.3 \times 10^{-1}$ que según sabemos corresponde a las esferas de radio mayor que son de Pb, y es consecuente con los resultados de la sección (5.3.1), véase Figura (5.7).

Por otra parte, se tiene que la onda P en el compuesto es más rápida conforme el material de las esferas pequeñas es menos denso. Se observa en los casos en que las esferas pequeñas son de Fe o de Pb que el cociente de las rapidezces de fase se mantiene por abajo de uno para frecuencias desde $k_2a = 0$ hasta $k_2a \approx 3$, aún cuando cerca de $k_2a = 3.3 \times 10^{-1}$ el cociente de las rapidezces de fase es creciente como función de la frecuencia en la forma característica en que se describe cerca de un punto crítico en que resuenan las esferas de alguna población. En el compuesto en que las esferas pequeñas son de vidrio el efecto de éstas es negligible en el intervalo de frecuencia adimensional $[0, 2]$, por lo que en este caso las gráficas de rapidez de fase y atenuación tienen la misma descripción de las que corresponden a una población de esferas de Pb en Epon 828Z a 2.5% de concentración, véase Figura (5.4).

Para frecuencias altas se tienen efectos diferentes en cada uno de los compuestos. Porque en las mezclas en que las esferas pequeñas son de Fe o de Pb el compuesto es dispersivo para frecuencias $k_2a > 2$. Se observa en las gráficas de atenuación que el pico que corresponde a las esferas de radio menor refuerza el segundo pico que el modelo predice en el caso de una población de esferas de Pb en Epon 828Z. Es decir el medio se vuelve más dispersivo cuando dos diferentes poblaciones de esferas resuenan a frecuencias próximas.



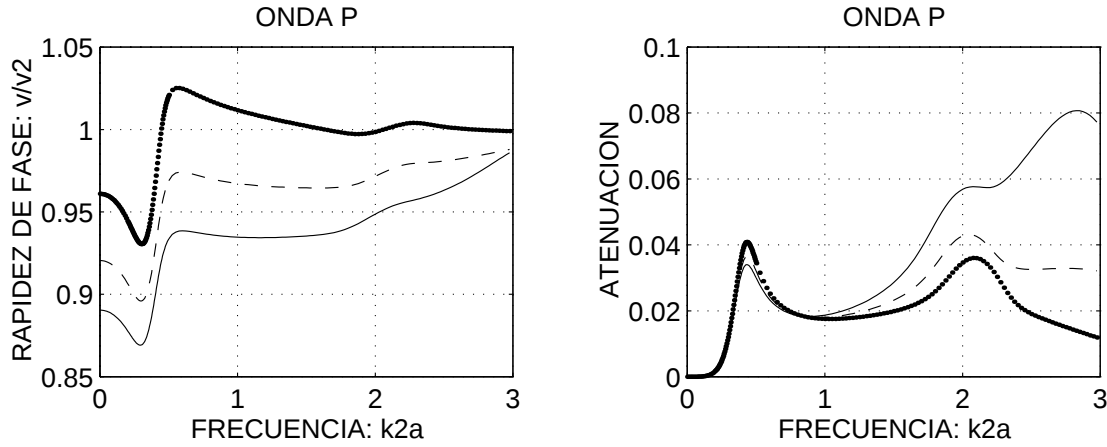
En cada caso se trata de dos poblaciones de inclusiones con las esferas grandes de Pb y las chicas de Pb en la línea —, de Fe en la línea — — y de vidrio en la línea ···.

Figure 5.7: Diferentes materiales en las esferas pequeñas en una matriz de Epon 828Z, las esferas grandes son de Pb.

5.4.2 PMMA

Al igual que en los compuestos de la sección anterior, en que las esferas grandes son de Pb, en el presente caso se observa que a bajas frecuencias el efecto de las esferas grandes que son de Fe hace que la mezcla sea dispersiva. El modelo predice que resuenan las esferas grandes de Fe a una frecuencia $k_2a \approx 4.2 \times 10^{-1}$. La presencia de esferas de un orden de magnitud menor, hace que el medio sea más lento conforme el material de las esferas pequeñas es más denso para frecuencias desde $k_2a = 0$ hasta $k_2a = 2$. Y en el caso de que las esferas pequeñas sean de vidrio el medio se comporta prácticamente como una mezcla de una población de esferas de Fe en PMMA a 2.5% de concentración, en que el modelo predice claramente un segundo modo normal de vibración de las esferas a frecuencia $k_2a \approx 2.1 \times 10^0$. Es muy notable que en este caso la frecuencia en que se manifiesta el segundo pico de atenuación sea un casi múltiplo de la frecuencia que corresponde al primero de ellos. véase Figura (5.8).

Asimismo, en altas frecuencias el efecto dominante es el de las es-



En cada caso se trata de dos poblaciones de inclusiones con las esferas grandes de Fe y las chicas de Pb en la línea —, de Fe en la línea — — y de vidrio en la línea · · ·.

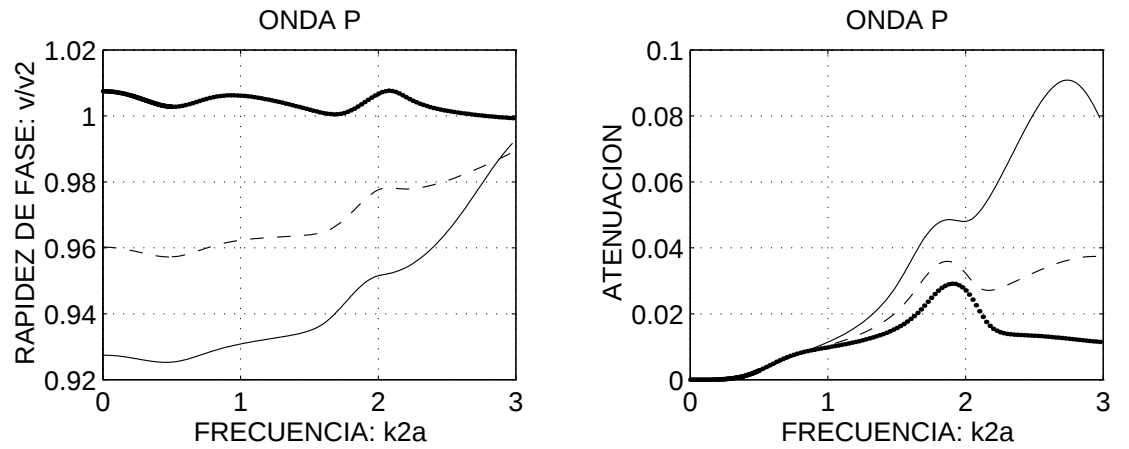
Figure 5.8: Diferentes materiales en las esferas pequeñas en una matriz de PMMA, las esferas grandes son de Fe.

feras de radio menor por lo que las tres mezclas de esta sección tienen prácticamente la misma descripción que las que les corresponden en el caso en que las esferas grandes son de Pb de la sección anterior.

5.4.3 TraCast

Finalmente, al analizar los compuestos con esferas grandes de vidrio podemos tomar como conclusiones las observaciones de las dos secciones precedentes. Porque también aquí se tiene que la onda P en el compuesto se vuelve más lenta conforme el material que compone las esferas de radio menor es más denso, aún cuando las esferas grandes resuenan de acuerdo a las conclusiones de las secciones en que se tienen inclusiones de un mismo material. Pues se tiene un pico de atenuación a frecuencia $k_2a = 1.9 \times 10^0$ que corresponde a la resonancia de las esferas grandes de vidrio. Asimismo, se tiene que en el caso de que dos poblaciones de esferas resuenen en frecuencias cercanas, entonces los picos de atenuación correspondientes se refuerzan entre sí. Véase Figura (5.9).

Se observa que los compuestos con esferas de Fe o Pb de esta sección son más dispersivos que el caso con esferas de vidrio para frecuencias desde $k_2a = 0$ hasta $k_2a \approx 2$, y para frecuencias $k_2a > 2$ las gráficas tienen la misma descripción que las que les corresponden en las dos secciones precedentes. Lo cual significa que la dispersión que pudiera ser ocasionada por propiedades intrínsecas de los tres materiales matrices considerados es despreciable comparada con la que ocasionan las inclusiones, puesto que los materiales matrices considerados tienen características diferentes.



En cada caso se trata de dos poblaciones de inclusiones con las esferas grandes de vidrio y las chicas de Pb en la línea —, de Fe en la línea — — y de vidrio en la línea ···.

Figure 5.9: Diferentes materiales en las esferas pequeñas en una matriz de TraCast, las esferas grandes son de vidrio.

Conclusiones

- En el análisis de las curvas de dispersión presentadas se tiene que dada una mezcla con dos poblaciones del mismo material y radio muy diferente tal que el cociente soluto/matriz de la densidad de masa sea grande, como es el caso de esferas de Pb en epoxy y Fe en PMMA, la medida de atenuación es mucho mayor en el máximo ocasionado por la resonancia de las esferas pequeñas que el que corresponde a la resonancia de las otras esferas.
- De la comparación de los resultados para mezclas con dos poblaciones de esferas de diferente radio tales que tengan el material matriz y una población de esferas de radio mayor fijos. El efecto observado es que para bajas frecuencias, si la concentración y la proporción entre los radios se mantiene constante, entonces la velocidad del sonido en el compuesto y la medida de atenuación son mayores a medida que el material que forma las esferas de radio menor es menos denso.
- Otro resultado observado en todas las combinaciones de materiales consideradas, es que a concentración volumétrica constante la frecuencia de resonancia de las esferas es menor conforme el cociente soluto/matriz de la densidad de masa es mayor.

Appendix A

La función de Green

Debido a que la función de Green del medio efectivo entra en el cálculo de los promedios $\bar{S}_t$ y $\bar{M}_x$ a cada paso de la iteración al resolver las ecuaciones autoconsistentes, se considera una función de Green $G = G(\mathbf{x}, \omega)$ y los operadores M_t y S_x para un medio tridimensional homogéneo con propiedades L_0 y ρ_0 que represente ondas viajeras que decaigan conforme $|\mathbf{x}|$ crece, es decir, ondas viajeras que decaen conforme se alejan de la fuente. La función de Green utilizada es la solución singular fundamental de la ecuación reducida de la elastodinámica ¹ en una región infinita, con una fuerza de cuerpo concentrada que actúa en un punto ξ , en una dirección fija $\mathbf{e}_i$. La función de Green empleada tiene la forma (se sugiere consultar [Eringen & Şuhubi (1975)] para ver la derivación de la función de Green)

$$4\pi\rho_0 G_{ij}(\mathbf{x}, \omega) = \delta_{ij} \frac{e^{\omega|\mathbf{x}|/\beta}}{\beta^2|\mathbf{x}|} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{e^{\omega|\mathbf{x}|/\alpha} - e^{\omega|\mathbf{x}|/\beta}}{|\mathbf{x}|} \right], \quad (\text{A.1})$$

donde $\xi = 0$ y α es la rapidez de las ondas P y β , la de las ondas S . Las rapideces α y β están dadas por

$$\alpha = \left(\frac{\kappa_0 + 4\mu_0/3}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\beta = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.3})$$

¹Se pide que la solución tenga dependencia armónica en el tiempo $\exp(-i\omega t)$ y se omite ese factor por comodidad.

en función de los módulos de compresibilidad κ_0 , de rigidez μ_0 y la densidad de masa ρ_0 del medio. Los parámetros ω/α_0 y ω/β_0 pueden tomar valores complejos, de tal manera que las raíces cuadradas en (A.2) y (A.3) se toman ambas con parte reales positivas y partes imaginarias negativas para que, cuando $\omega \ll 0$ ó $\omega \gg 0$ la función de Green dada por la ecuación (A.1) corresponda a ondas viajeras que se alejan de la fuente y decaen cuando $|\mathbf{x}|$ crece.

La evaluación del término $\bar{M}_t$ para una inclusión esférica de radio a en términos de la función de Green se efectúa a partir de la relación

$$M_{ij} = -\omega G_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

y consecuentemente

$$(M_t)_{ij} = -\omega^2 G_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Del primer sumando de la función de Green, es necesario calcular la integral

$$I = \int_{|\mathbf{x}| < a} d\mathbf{x} \int_{|\mathbf{x}'| < a} d\mathbf{x}' \frac{e^{ik_\gamma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{A.6})$$

donde $k_\gamma = \omega/\gamma$ para $\gamma = \alpha$ ó β , según sea el caso. La evaluación de esta integral da

$$I = \frac{16\pi^2 a^2}{3k_\gamma^2} (\epsilon_\gamma - 1), \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\epsilon_\gamma = \frac{3(1 - ik_\gamma a)}{(k_\gamma a)^3} [\text{sen}(k_\gamma a) - k_\gamma a \cos(k_\gamma a)] e^{ik_\gamma a}. \quad (\text{A.8})$$

Del segundo sumando de la función de Green es necesario evaluar las integrales

$$J_{ij} = \int_{|\mathbf{x}| < a} d\mathbf{x} \int_{|\mathbf{x}'| < a} d\mathbf{x}' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{e^{ik_\gamma a |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Debido a que esta matriz es isótropa, entonces es igual al producto de un tercio de su traza y la delta de Kronecker δ_{ij} , lo cual da el siguiente resultado

$$J_{ij} = -\frac{1}{3} \delta_{ij} [4\pi a^3 + k_\gamma^2 I] \quad (\text{A.10})$$

Por otra parte, lo que está entre corchetes en (A.9) es 4π veces la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz (para la derivación de esta solución se sugiere ver [Lin & Segel (1988)], por tanto

$$J_{ij} = \delta_{ij} \frac{16\pi^2 a^3}{9} \epsilon_\gamma. \quad (\text{A.11})$$

Esto permite escribir $(\bar{M}_t)_{ij}$ de la siguiente manera

$$(\bar{M}_t)_{ij} = \frac{1}{3\rho_0} \delta_{ij} (3 - \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta). \quad (\text{A.12})$$

Para calcular $(\bar{S}_x)_{ijkl}$ se procede de la siguiente manera, primero, la definición del operador es

$$(S_x)_{ijkl} = -G_{(ij,kl)|(ij)(kl)}, \quad (\text{A.13})$$

donde $(ij)(kl)$ significa que sólo se considera la parte simétrica del tensor. Y por otra parte

$$\bar{S}_x^{(r)} = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r \times \Omega_r} S_x^{(r)}(x - x') d\mathbf{x} d\mathbf{x}'. \quad (\text{A.14})$$

Este tensor es isótropo y tiene las mismas simetrías que L_0 . Con la notación simbólica L_0 se escribe

$$(L_0)_{ijkl} = \kappa_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}/3), \quad (\text{A.15})$$

y debido a que este tensor está caracterizado por los módulos κ_0 y μ_0 se introduce la notación simbólica

$$L_0 = (3\kappa_0, 2\mu_0), \quad (\text{A.16})$$

de tal manera que

$$3\kappa_0 = \frac{1}{3} (L_0)_{iikk}, \quad (\text{A.17})$$

$$3\kappa_0 + 10\mu_0 = (L_0)_{ijij}. \quad (\text{A.18})$$

Esto permite calcular los términos correspondientes para escribir $\bar{S}_x$ en notación simbólica por medio de $(\bar{S}_x)_{iikk}$ y $(\bar{S}_x)_{ijij}$ y la función de Green. El resultado es

$$\bar{S}_x = \left(\frac{\epsilon_\alpha}{3\kappa_0 + 4\mu_0}, \frac{1}{5} \left[\frac{2\epsilon_\alpha}{3\kappa_0 + 4\mu_0} + \frac{\epsilon_\beta}{\mu_0} \right] \right). \quad (\text{A.19})$$

La notación simbólica permite escribir las ecuaciones tensoriales auto-consistentes en términos de κ_0 , μ_0 y ρ_0 como se presentan en el capítulo 4. Debido a que la suma y el producto de dos tensores isótropos es un tensor isótropo, se tienen las siguientes propiedades de la notación simbólica:

Sí L_A y L_B dos tensores caracterizados por $(3\kappa_A, 2\mu_A)$ y $(3\kappa_B, 2\mu_B)$ respectivamente, entonces

$$L_A L_B = ((3\kappa_A)(3\kappa_B), (2\mu_A)(2\mu_B)), \quad (\text{A.20})$$

$$L_A + L_B = ((3\kappa_A) + (3\kappa_B), (2\mu_A) + (2\mu_B)), \quad (\text{A.21})$$

$$L_A^{-1} = ((3\kappa_A)^{-1}, (2\mu_A)^{-1}), \quad (\text{A.22})$$

$$I = (1, 1). \quad (\text{A.23})$$

donde I es el tensor identidad de cuarto orden.

Bibliography

- [Budiansky (1965)] Budiansky, B., 1965, On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **13**, 223-227.
- [Elsheby (1957)] Elsheby, J., 1957, *Proc. Roy. Soc.*, **A241**, 376.
- [Eringen (1967)] Eringen, A., 1967, *Mechanics of Continua*, New York, John Wiley & Sons, Inc.
- [Eringen & Şuhubi (1975)] Eringen, A. & Şuhubi, E., 1975, *Elastodynamics*, **2**, New York, Academic Press.
- [Hill (1963)] Hill, R., 1963, *J. Mech. Solids*, **11**, 357.
- [Jeffreys (1965)] Jeffreys, H., 1965, *Cartesian Tensors*, Cambridge, The University Press.
- [Kinra (1985)] Kinra, V., 1985, Dispersive Wave Propagation in Random Particulate Composite. *Recent Advances in Composites in the United States and Japan, ASTM STP 864*, J. R. Vinson and M. Taya, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 309-325.
- [Kinra (1987)] Kinra, V. & Rousseau C., 1987, Acoustical and Optical Branches of Wave Propagation: Some Additional Results. *Journal of Wave-Material Interaction*, **2**, 141-152.
- [Lay, Rubin & Krempf (1993)] Lay, W., Rubin, D. & Krempf, E., 1993, *Introduction to Continuum Mechanics*, Exeter, Pergamon Press Ltd.

- [Lin & Segel (1988)] Lin, C. & Segel, L., 1988, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Marsden & Tromba (1988)] Marsden, J. & Tromba, A., 1988, *Vector Calculus*, New York, W. H. Freeman and Company.
- [Porter (1933)] Porter, A., 1933, *The Method of Dimensions*, Londres, Methuen & Co. LTD.
- [Sabina & Willis (1988)] Sabina, F. J. & Willis, J. R., 1988, A Simple Self-consistent Analysis of Wave Propagation of Particulate Composites. *Wave Motion*, **10**, 127-142.