

Un modelo de filtración de agua en medios porosos

Luis García Naranjo Ortiz de la Huerta

11 de Julio de 2000

Agradecimientos

Quiero agradecer muy especialmente a las personas que me han dado una formación profesional. Muy especialmente al Dr. Antonmaría Minzoni y al Dr. Gilberto Flores pues definieron mi vocación como matemático aplicado.

Gracias también al Dr. Arturo Vargas por su apoyo, su tiempo y su amistad. Al Dr. Gustavo Cruz y a la Dra. Catherine García por su revisión de este trabajo.

Muchas gracias a Melinda por apoyarme hasta en la redacción misma de esta línea. Gracias Mel.

No puedo dejar de agradecer a la gente que sé que está cerca de mi aunque huelga mal:

Mamá, Ale, Jer, Levellers, Brenópilo, Toreils, Pepe, Rodrigo C, Rodrigo V, Diego P, Diego SV, Buggs, Meme, Agustín, Santiago, Laura, Carlos, Pablo, Alfredo, Chango, Tatiana, Margarita y todas las demás personas cuyo nombre se pueda escribir con las siguientes letras: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.

Agradezco al proyecto G25427-E de CONACYT por la beca que recibí para la realización de este trabajo.

Contenido

Introducción	5
1 Deducción de la ecuación de Richards	7
1.1 ¿Qué es un medio poroso?	7
1.1.1 Aproximación como un continuo	8
1.2 Movimiento de agua en el medio poroso	10
1.3 Flujo saturado	10
1.3.1 Presión hidrostática (distribución)	11
1.3.2 Cabeza piezométrica	11
1.3.3 Ley de Darcy	12
1.3.4 Generalización de la ley de Darcy para el flujo tridimensional.	15
1.4 Flujo no saturado	17
1.4.1 Presión capilar	17
1.4.2 Retención de humedad	20
1.4.3 Conductividad hidráulica	22
1.4.4 Las ecuaciones de movimiento para el flujo no saturado	24
1.4.5 Ecuación de Richards	25
2 Existencia y propiedades de las soluciones	29
2.1 Espacios de funciones	32

2.2	Existencia local de las soluciones	33
2.3	Cotas a priori y comportamiento asintótico	35
3	Convergencia de las soluciones a ondas viajeras	41
3.1	Existencia de ondas viajeras	42
3.1.1	Soluciones estacionarias	42
3.1.2	Soluciones en forma de onda viajera	43
3.2	Aproximación de las soluciones por ondas viajeras	47
3.2.1	Lemas preliminares	50
3.2.2	Comportamiento de las soluciones para tiempos largos	63
4	Discusión del caso no homogéneo	71
4.1	Soluciones estacionarias	72
4.2	Existencia de ondas viajeras	76
	Bibliografía	83

Introducción

La filtración de agua y en particular el estudio de frentes húmedos en los suelos, es uno de los problemas más importantes en hidrología. Dado que este fenómeno no es observable, el modelo matemático es un recurso muy importante para su descripción.

Los mantos acuíferos pueden contaminarse por el acarreo de sustancias o pesticidas por el agua de lluvia que se filtra en los suelos. La descripción de los frentes húmedos es un primer paso en la comprensión de este fenómeno.

Una ecuación que se utiliza para describir la filtración de agua, por acción de la gravedad, en un medio poroso, es la ecuación de Richards. Esta ecuación, para el contenido de agua en una dimensión, es

$$u_t = [D(u, x)u_x - K(u, x)]_x \quad (0.1)$$

donde $u(x, t)$ es el contenido de agua, $x \in [0, \infty)$ es la profundidad en el suelo, $t \geq 0$ es el tiempo, $K(u, x)$ es la conductividad hidráulica y $D(u, x)$ es la difusividad hidráulica. Tanto $D(u, x)$ como $K(u, x)$ son funciones no lineales.

En este trabajo estudiamos en detalle esta ecuación para un suelo homogéneo. Es decir $D = D(u)$, $K = K(u)$.

En el capítulo 1 se hace una deducción detallada de la ecuación basada principalmente en [2].

En el capítulo 2 se demuestra la existencia global de las soluciones dada la condición inicial

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (0.2)$$

y dado el flujo en la superficie del suelo $x = 0$:

$$-D(u)u_x + K(u)|_{x=0} = f(t). \quad (0.3)$$

suponiendo una cota uniforme para $u_t(x, t)$.

Los frentes húmedos corresponden a soluciones en forma de onda viajera para la ecuación (0.1). En el capítulo 3 se prueba la existencia de este tipo de soluciones ($u(x, t) = \varphi(x - ct)$) que satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x - ct) = \varphi_a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x - ct) = \varphi_b,$$

dadas las constantes φ_a y φ_b entre cero y uno.

Fijamos $f(t)$ de tal manera que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = l_2$ y consideramos condiciones iniciales que cumplen $\lim_{x \rightarrow \infty} u_0(x) = l_1$ con $K(l_1) < l_2$. Si $u(x, t)$ es la solución de (0.1) que satisface (0.2) y (0.3), $\varphi(x - ct)$ es la onda viajera con $\varphi_a = K^{-1}(l_2)$, $\varphi_b = l_1$, el resultado principal del capítulo 3 establece que existe un número real γ de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)| = 0$$

uniformemente para toda $x \geq 0$.

La velocidad de la onda es

$$c = \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi_b)}{\varphi_a - \varphi_b}$$

que corresponde a una onda de choque para la ecuación hiperbólica $u_t + (K(u))_x = 0$. La convergencia de la solución $u(x, t)$ a la onda viajera sugiere que el efecto dominante en la ecuación es el de la parte hiperbólica, que al transportar los valores asintóticos en la frontera: l_1 en $t = 0$ y $K^{-1}(l_2)$ en $x = 0$, con $l_1 < K^{-1}(l_2)$, da lugar a un cruce de características que genera un choque, el cual es suavizado por la parte difusiva y de esta manera, en la solución se forma un frente que se mueve con velocidad casi constante c .

Finalmente, en el capítulo 4 se hace una breve discusión del problema para un suelo no homogéneo. Como una primera aproximación al problema se supone que el suelo es periódico. Se prueba la existencia de soluciones estacionarias que son interesantes para el problema físico y se plantea la pregunta sobre la existencia de ondas viajeras en este caso.

Esta tesis está basada principalmente en [5] y [11].

Capítulo 1

Deducción de la ecuación de Richards

El objetivo de este capítulo es hacer una deducción de esta ecuación. Esto nos permitirá tener una comprensión más completa del modelo, nos mostrará la importancia de las funciones hidráulicas D y K y las limitaciones que inevitablemente uno encuentra en el modelaje de este tipo de fenómenos.

Para la deducción de la ecuación será necesario definir algunas de las propiedades más importantes de los medios porosos y revisar algunos conceptos básicos de hidrostática y capilaridad.

1.1 ¿Qué es un medio poroso?

El suelo, la arena, las rocas con grietas, la espuma de caucho, los pulmones, los riñones, son sólo unos pocos ejemplos de la gran variedad de medios porosos naturales y artificiales que existen y que se encuentran en la práctica.

Otros ejemplos de medios porosos son los mantos acuíferos de donde se bombea el agua, depósitos que contienen petróleo y/o gas, filtros de arena para la purificación del agua y la zona de la raíz en la agricultura.

Lo que tienen en común todos estos ejemplos es que una parte del dominio está formada por una parte persistentemente sólida que se llama la *matriz sólida*. La parte restante, llamada el *espacio vacío* o *espacio poroso*, está ocupada por una fase líquida o gaseosa.

Otra característica esencial de los dominios de medios porosos es que la fase sólida (y, por lo tanto, también el espacio vacío) están distribuidos en todo el dominio. Lo que esto

quiere decir es que si se toma una muestra de tamaño suficientemente grande de cualquier parte del dominio, ésta siempre contendrá fase sólida.

1.1.1 Aproximación como un continuo

Al tratar de modelar un fluido en un medio poroso, en principio uno podría mirarlo desde un punto de vista microscópico, es decir tratar de describir el movimiento de cada partícula del fluido. Por ejemplo, dado un fluido que llena por completo un medio poroso podríamos utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes, dando las condiciones de frontera sobre la interfase entre la fase líquida y la fase sólida del medio poroso. Por supuesto que la complejidad en la disposición de esta frontera hace casi imposible el problema, además de que las predicciones obtenidas al resolver las ecuaciones para magnitudes como la presión no podrían verificarse con mediciones a este nivel microscópico.

Para salvar estas dificultades es necesario otro nivel de descripción. Este es el nivel macroscópico desde el cual las cantidades se pueden medir y los problemas con valores en la frontera se pueden resolver. Para obtener la descripción del fluido en este nivel adoptamos la aproximación del continuo. Es la misma aproximación que se utiliza para pasar de una descripción molecular a una microscópica al mirar cada una de las fases como un continuo.

Por ejemplo, una de las propiedades más importantes de un medio poroso es la *porosidad*, n . La porosidad de una porción U del dominio D es definida como

$$n(U) = \frac{\text{Volumen del espacio vacío contenido en } U}{\text{Volumen total de } U}$$

La idea de la aproximación continua es crear un “modelo ficticio” en el cual podamos definir la *porosidad puntual*. Es decir, nos gustaría poder definir una función continua, n , que a cada punto \vec{x} del dominio D , le asocie un valor de porosidad, $n(\vec{x})$. Por supuesto que la definición de porosidad que hemos dado no es aplicable a un punto porque ¿Cuánto vale el volumen del punto \vec{x} ? y aun más difícil, ¿Cuánto vale el volumen del espacio vacío contenido en el punto \vec{x} ? Para salvar estas dificultades hacemos lo siguiente:

Dado que no podemos medir estas cantidades en el punto \vec{x} consideramos una pequeña esfera, S , de volumen U centrada en el punto \vec{x} . Para la esfera S , la porosidad $n(S)$ está bien definida y se puede medir. Lo que haremos es definir la porosidad en el punto \vec{x} como $n(\vec{x}) \equiv n(S)$. Por supuesto que esta definición depende del tamaño de U ; la idea es elegir un valor de U para el cual la definición de porosidad puntual que hemos dado realmente sea representativa de lo que sucede en el punto \vec{x} .

La figura 1 muestra cómo es, en general, la dependencia de $n(S)$ respecto de U .

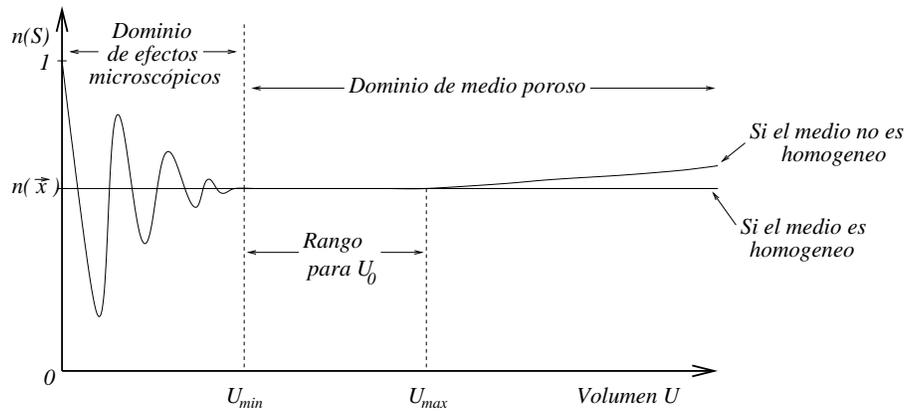


Figura 1. Gráfica del volumen U contra el valor de la porosidad $n(S)$.

Notamos que para valores muy pequeños de U hay grandes fluctuaciones en el valor de $n(S)$, esto se debe a la distribución aparentemente aleatoria de los poros y granos en una pequeña vecindad de \bar{x} , incluso en el límite $U \rightarrow 0$, $n(S)$ tiende a uno o cero, dependiendo de si el punto \bar{x} está en el espacio sólido o en el espacio vacío. Sin embargo, por arriba de un cierto valor crítico, U_{\min} , estas fluctuaciones disminuyen y $n(S)$ varía muy poco. Conforme U sigue aumentando vemos que a partir de otro valor importante de U , U_{\max} , las fluctuaciones vuelven a aparecer debido a las posibles inhomogéneidades que pudiera presentar el dominio D .

Para que la definición de $n(\bar{x})$ sea representativa de lo que pasa en el punto \bar{x} elegiremos un valor de U , U_0 , tal que $U_{\min} \leq U_0 \leq U_{\max}$.

Si es posible encontrar un rango de valores como este para U_0 , que sea común a todos los puntos del dominio D , entonces la definición de porosidad puntual es correcta y podemos considerar al dominio D como un continuo para n . El volumen U_0 es llamado el *Volumen Elemental Representativo*, *VER*, y el radio de S se llama la escala de continuidad de n en D .

De este mismo modo podemos definir las distintas propiedades del medio poroso puntualmente y en forma continua.

Si hay una escala de continuidad que sea común a todas las propiedades que nos interesan del medio poroso entonces, utilizando la idea del VER, podemos remplazar el medio original por un continuo en el que podemos asignar valores de cualquier propiedad, ya sea de la fase sólida o del fluido que llena el espacio vacío, a cualquier punto del dominio.

1.2 Movimiento de agua en el medio poroso

Como parte del ciclo hidrológico el agua subterránea está siempre en movimiento de regiones de abastecimiento, naturales y/o artificiales, hacia regiones de descarga, naturales o artificiales.

Una de las principales características del movimiento de agua subterránea es que ocurre a velocidades extremadamente lentas, sin embargo dado que el área de la sección transversal del dominio donde el flujo tiene lugar es muy grande, grandes cantidades de agua son transportadas.

Son dos los problemas más importantes de pronóstico en el manejo de los recursos acuáticos subterráneos. El primero de ellos es predecir los cambios en los niveles de agua en respuesta a la extracción ó abastecimiento artificial de agua, el segundo problema consiste en la predicción de futuros cambios en la calidad del agua. En ambos casos es muy importante conocer el movimiento del agua subterránea.

Al intentar predecir el movimiento del agua en un medio poroso conviene estudiar el *contenido de agua* (por unidad de volumen), u , en cada punto del dominio. Para un volumen U dentro del dominio de medio poroso se define el contenido de agua en U como $u(U) = \frac{U_w}{U_v}$ donde U_w denota el volumen del agua que hay dentro del volumen U y U_v es el volumen del espacio vacío contenido en el volumen U .

Utilizando la definición del Volumen Elemental Representativo podemos pensar que el contenido de agua es una cualidad puntual que tiene sentido como promedio sobre un VER. En general, el contenido de agua será una función de la posición y del tiempo, así $u = u(\vec{x}, t)$.

De la definición de u resulta claro que $0 \leq u(\vec{x}, t) \leq 1$. El caso especial en que $u(\vec{x}, t) \equiv 1, \forall t$, corresponde a que la totalidad del espacio vacío está ocupada por agua. En este caso diremos que tenemos un *flujo saturado*. Si este no es el caso entonces diremos que tenemos un *flujo no saturado*. En las siguientes secciones estudiaremos el flujo de agua en ambos casos y veremos que hay diferencias sustanciales entre ambos.

1.3 Flujo saturado

Al modelar el movimiento de agua en el medio poroso resulta útil comenzar con el caso del flujo saturado. Como veremos más adelante, la distribución de presiones en este caso se deduce directamente de las leyes de la hidrostática. El resultado principal para el flujo saturado es la ley de Darcy. Su entendimiento es esencial para el estudio del flujo en medios porosos ya que de su generalización derivaremos las ecuaciones de movimiento

para el flujo no saturado.

1.3.1 Presión hidrostática (distribución)

De la hidrostática sabemos que para un líquido en reposo o para un fluido uniforme en un campo gravitatorio, las variaciones de presión cumplen

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido y la dirección de los ejes x , y , z , es la usual.

Para un fluido homogéneo e incompresible, la densidad, ρ , es una constante. Por lo tanto, para cualesquiera dos puntos con elevaciones z_1 y z_2 , tales que $z_2 - z_1 = d > 0$ obtenemos:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cte}, \quad \text{ó} \quad p_2 - p_1 = \gamma(z_1 - z_2)$$

Si la presión en la altura z_2 es cero ($p_2 = 0 =$ presión atmosférica) entonces tenemos $p \equiv p_1 = \gamma d$

Para un medio poroso saturado las ecuaciones siguen siendo válidas.

1.3.2 Cabeza piezométrica

En la ecuación $z + p/\gamma = \text{cte}$, llamaremos *Cabeza de Presión* al cociente p/γ . Representa la energía de presión, o trabajo de flujo, por unidad de peso del fluido. Es el trabajo neto hecho por una unidad de peso de fluido incompresible contra la diferencia de presión que existe a lo largo del flujo.

La variable z representa la *Cabeza de Elevación*. que es la energía potencial por unidad de peso del fluido.

La suma de la cabeza de presión y de la cabeza de elevación se llama *Cabeza Piezométrica*, ϕ :

$$\phi = z + \frac{p}{\gamma}.$$

La figura 2 muestra como medir ϕ en cada punto del medio poroso por la elevación del fluido en una pipa de tamaño suficientemente grande para evitar efectos de capilaridad en ella. La altura del fluido en la pipa nos indica el valor de la cabeza de presión, p/γ , que sufre el punto P . La z , medida desde un nivel arbitrario de referencia, nos indica la energía potencial, debida a la gravedad, que tiene el punto P .

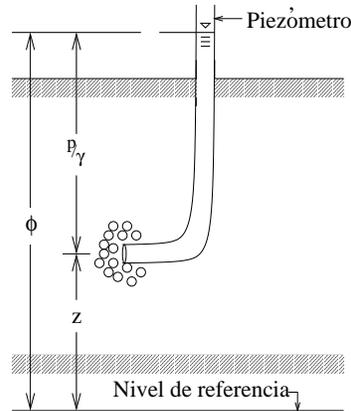


Figura 2. Cabeza Piezométrica

Más adelante veremos que el movimiento del fluido en el medio poroso se debe a las variaciones de ϕ . De este modo tenemos que para un fluido en movimiento, ϕ varía como una función del espacio y del tiempo pero para un líquido en reposo ϕ es constante en todos lados.

1.3.3 Ley de Darcy

En 1856 Henry Darcy investigó el flujo de agua en filtros de arena homogénea verticales en conexión con las fuentes de la ciudad de Dijon (Francia), ver [2]. El experimento que utilizó está mostrado en la figura 3.

El objetivo del experimento es medir el flujo de agua (volumen de agua que pasa por unidad de tiempo) a través de una columna vertical de arena de largo L y área transversal A .

En el experimento el agua que entra a la columna de arena proviene de un recipiente cuyo nivel de agua se mantiene a una altura constante h_1 . El agua pasa después a través de la columna de arena para subir a otro recipiente cuyo nivel de agua se mantiene a la altura constante h_2 (ver fig. 3). La cantidad de agua por unidad de tiempo que es necesario remover para que este segundo recipiente tenga un nivel constante de agua será entonces el flujo a través de la columna de arena.

La conclusión del experimento es que el flujo, Q , es:

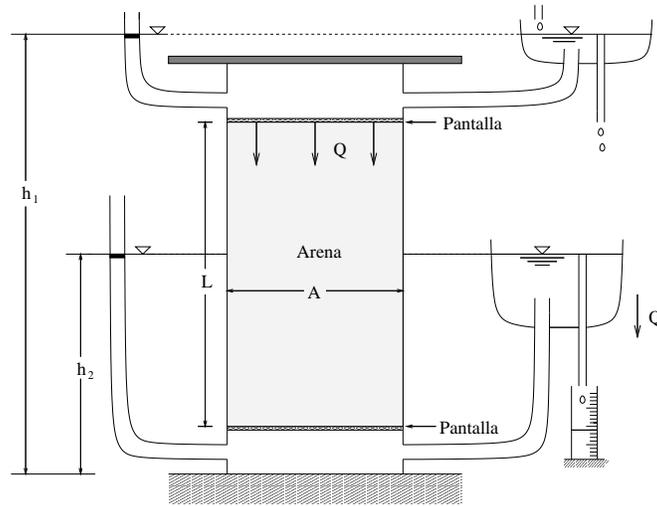


Figura 3. Experimento de Darcy

- a) Proporcional al área de la sección transversal A .
- b) Proporcional a $h_1 - h_2$.
- c) Inversamente proporcional a la longitud L .

Combinando estos elementos (definidos como en la figura 3) obtenemos la fórmula de Darcy:

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{L}$$

donde $K > 0$ es una constante de proporcionalidad llamada la *Conductividad Hidráulica* (que depende del fluido y del medio poroso y que será discutida en la sección 1.4.3). Si definimos la descarga específica, q , como el volumen de agua por unidad de tiempo que pasa a través de una sección de área unitaria normal a la dirección del flujo, ($q = Q/A$), obtenemos:

$$q = K \frac{h_1 - h_2}{L}.$$

En la sección anterior se definió la cabeza piezométrica, ϕ , como la suma de la cabeza de presión y la cabeza de elevación:

$$\phi = z + \frac{p}{\gamma}.$$

Con el propósito de ilustrar la dependencia del flujo de estos dos términos, observemos lo que sucede cuando se hace el experimento de Darcy en una columna de arena inclinada, como lo muestra la figura 4.

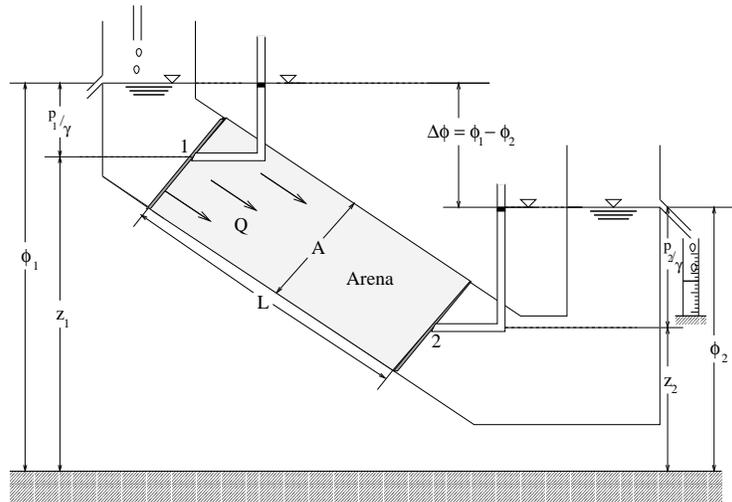


Figura 4. Ley de Darcy para el flujo a través de una columna inclinada de medio poroso

Llamemos 1 y 2 a los puntos extremos de la columna de arena. El objetivo del experimento es entonces medir el flujo (volumen de agua que pasa por unidad de tiempo) del punto 1 al punto 2. Nótese que el dispositivo es muy parecido al utilizado en la figura 3.

Hay dos factores que hacen que el agua en el punto 1 se mueva y son los dos términos de la cabeza piezométrica en ese punto, ϕ_1 . Uno es la energía potencial debida a la elevación del punto 1, z_1 , y el otro es la presión que sufre el punto 1 por la columna de agua que soporta, p_1/γ . Análogamente en el punto 2 hay dos factores que propician el movimiento de agua en ese punto y son z_2 y p_2/γ . La conclusión del experimento en este caso es

$$q = K \frac{\phi_1 - \phi_2}{L}.$$

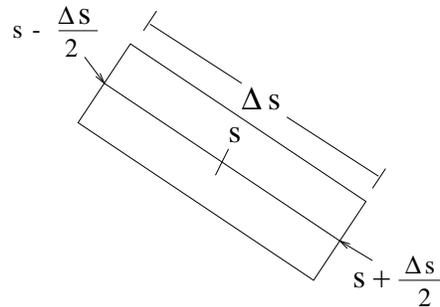
Es decir, el flujo (específico) es proporcional a la diferencia entre los valores de la cabeza piezométrica.

Es importante notar que la fórmula $q = K \frac{\phi_1 - \phi_2}{L}$ nos dice que el flujo tiene lugar de una cabeza piezométrica mayor a una menor y no de una mayor presión a una menor. En el flujo mostrado en la figura 4 se tiene que $p_1/\gamma < p_2/\gamma$. Así, en este caso, el flujo va en la dirección de incremento de presión pero de decrecimiento de cabeza piezométrica.

La pérdida de energía $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ es debida a la fricción del fluido con los estrechos y sinuosos pasadizos del medio poroso. En la ley de Darcy la energía cinética del agua ha sido despreciada ya que, en general, los cambios en la cabeza piezométrica a lo largo del

camino del flujo son mucho mayores que los cambios en la energía cinética. Los efectos de inercia también han sido despreciados.

Consideremos ahora una columna de largo Δs y consideremos un punto s en el eje de la columna centrado en un segmento de longitud Δs .



En este caso:

$$q_s = K \frac{\phi(s - \frac{\Delta s}{2}) - \phi(s + \frac{\Delta s}{2})}{\Delta s}$$

El subíndice en q_s indica que el flujo es en la dirección s . En el límite cuando $\Delta s \rightarrow 0$ convergemos al punto y obtenemos:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} K \frac{\phi(s - \frac{\Delta s}{2}) - \phi(s + \frac{\Delta s}{2})}{\Delta s} = -K \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

y por lo tanto la ley de Darcy queda expresada como:

$$q_s = -K \frac{\partial \phi}{\partial s}. \quad (1.1)$$

1.3.4 Generalización de la ley de Darcy para el flujo tridimensional.

La ley de Darcy obtenida en la sección anterior, es derivada experimentalmente para un fluido incompresible y homogéneo. Dicha derivación está limitada para el flujo unidimensional en un medio homogéneo e *isótropo*. Cuando el flujo es tridimensional la generalización obvia de (1.1) es:

$$\mathbf{q} = -K\nabla\phi \quad (1.2)$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ es el *vector de flujo específico* y $\mathbf{J} = -\nabla\phi$ es el *gradiente hidráulico* con componentes $J_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $J_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $J_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$.

Cuando el medio es isótropo pero no homogéneo la conductividad hidráulica, K , deja de ser una constante. Sin embargo la ecuación (1.2) sigue siendo válida. Entonces tenemos que:

$$\mathbf{q} = -K(x, y, z)\nabla\phi$$

A pesar de que comenzamos esta sección suponiendo que (1.2) es la generalización adecuada para el flujo en tres dimensiones, existen un gran número de teorías que refuerzan esta generalización.

Cuando el medio es isótropo, K es un escalar y entonces los vectores \mathbf{q} y $\nabla\phi$ son paralelos. También se sigue de (1.2) que el vector \mathbf{q} es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales $\phi = \text{cte}$.

Por conveniencia uno estaría tentado a escribir la ley de Darcy (1.2) como:

$$\mathbf{q} = -\nabla\Phi \quad \text{donde} \quad \Phi = K\phi, \quad (1.3)$$

tomando Φ como un *potencial de velocidades* (siguiendo la terminología usada en hidrodinámica, donde la velocidad se deriva de un potencial: $V = \nabla\Phi$). Sin embargo esta formulación no es del todo correcta: Consideremos un medio isótropo inhomogéneo donde $K = K(x, y, z)$ entonces de (1.3) se sigue que:

$$\mathbf{q} = -K\nabla\phi - \phi\nabla K$$

esto implica que para un dominio en el que $\phi = \text{cte}$ tenemos flujo debido al hecho de que K varía. Esto es imposible ya que no podemos tener flujo sin una fuente de energía. Entonces (1.3) es una forma incorrecta de escribir la ley de Darcy excepto para un medio homogéneo e isótropo.

1.4 Flujo no saturado

Como parte del ciclo hidrológico, el agua que se filtra en la tierra hacia el manto freático atraviesa una zona en donde el espacio vacío del medio poroso está ocupada por agua y por aire. Al flujo en esta zona se le llama *flujo no saturado* y su entendimiento y predicción es esencial cuando se quiere determinar el abastecimiento total de agua del manto freático proveniente de lluvias, irrigación, etc.

Otra motivación para estudiar el flujo de agua en la zona no saturada es conocer la calidad del agua. Los contaminantes aplicados de distintas formas a la superficie del suelo, como fertilizantes, pesticidas, etc, se disuelven en el agua aplicada a la superficie. Esta agua se filtrará y cargará entonces contaminantes en su camino hacia el manto freático. Mientras los contaminantes son transportados varios fenómenos irán sucediendo como son la dispersión y la absorción. Estos afectan la concentración de contaminantes en el agua que eventualmente alcanzará la superficie freática. Si se quiere conocer la razón con que los contaminantes alcanzan el manto freático es indispensable conocer el movimiento y acumulación de contaminantes en la zona no saturada. Sin embargo uno no puede estudiar el movimiento de un contaminante transportado por el agua sin conocer el movimiento del agua.

1.4.1 Presión capilar

La principal diferencia del flujo en la zona no saturada con el de la zona saturada es debida a la interacción del aire y el agua en el espacio vacío del medio poroso. Cuando dos fluidos inmiscuibles (en este caso agua y aire) están en contacto, existe una discontinuidad en la presión a través de la interfase que las separa. Esta es una consecuencia de la tensión de interfase que existe entre las dos fases en contacto. La magnitud de la diferencia de presiones depende de la curvatura de la interfase. La diferencia de presiones se llama *presión capilar* (p_c):

$$p_c = p_{aire} - p_{agua}$$

donde las presiones se toman en las dos fases aproximándose a la interfase desde el lado correspondiente.

Asumiendo que la tensión de interfase, σ_{12} , entre dos fases con presiones p_1 y p_2 es constante, la fórmula de Laplace para la presión capilar dice que la relación entre la curvatura y la presión capilar está dada por:

$$p_c = p_2 - p_1 = \sigma_{12} \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) = \frac{2\sigma_{12}}{r^*}$$

donde r^* es el radio medio de curvatura definido como $2/r^* = 1/r' + 1/r''$. La presión capilar es así una medida de la tendencia que tiene el medio poroso parcialmente saturado de absorber agua ó de repeler aire. En edafología el valor negativo de la presión capilar se conoce como *succión ó tensión*.

Si suponemos que el aire en el espacio vacío está a presión atmosférica entonces el agua en el espacio vacío está a una presión p_{agua} menor que la atmosférica. Un modelo simple que explica lo que sucede en el espacio vacío, es el agua en un tubo capilar sumergido parcialmente en una bandeja con agua como lo muestra la figura 5. El tubo simula las estrechas aberturas entre los granos.

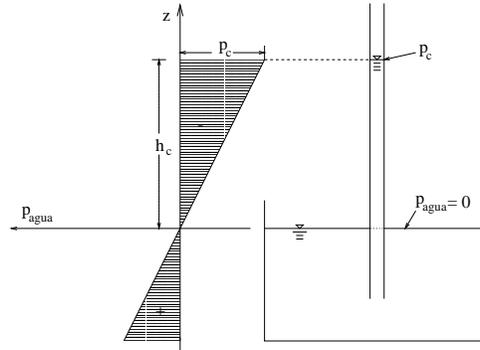


Figura 5. Un tubo capilar.

Supongamos que la presión atmosférica es cero. En el agua justo debajo de la superficie en el tubo, la presión p_{agua} está dada por:

$$p_c = p_{aire} - p_{agua}; \quad p_{agua} = -p_c \quad \text{pues} \quad p_{aire} = 0.$$

La presión del agua es también negativa a lo largo del tubo y hasta la superficie del agua en la bandeja donde $p_{agua} = 0$.

La figura 6 muestra como la presión negativa (menor que la atmosférica) se puede medir en los suelos. En la figura 6(a) una muestra de suelo se coloca en una membrana porosa (ó plato poroso) conectada a un manómetro. Las aberturas de la membrana son muy pequeñas de modo que el aire no puede ser absorbido a través de ellas hacia adentro del manómetro. La altura h_c , indicada en la figura 6(a), nos da la altura de la columna de agua que está siendo soportada por la succión que ejerce la muestra del suelo sobre el agua en el manómetro. Si denotamos por γ_{agua} al peso específico del agua, entonces $p_c = \gamma_{agua} h_c$ corresponde al promedio de presión, sobre el área de contacto, que ejerce la muestra de suelo sobre el agua del manómetro. El plato poroso, que es permeable al agua pero impermeable al aire, es necesario para establecer contacto hidráulico entre el agua de la muestra y la del manómetro sin que el aire sea absorbido hacia el último.

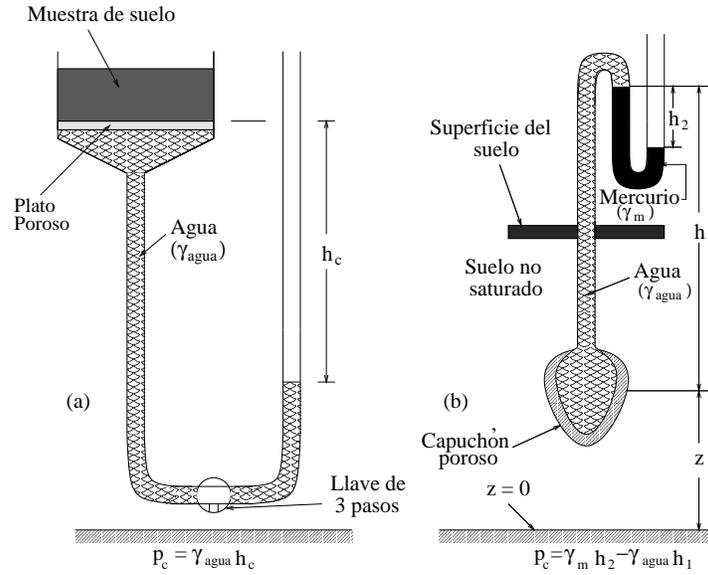


Figura 6. Medición de la presión capilar en el laboratorio (a) y en el campo (b).

El instrumento usado para medir la presión capilar en la zona no saturada se llama *tensiómetro*. El contacto entre el agua del tensiómetro y la del suelo es establecido a través de un capuchón poroso. Al utilizar un tensiómetro hay que asegurarse de que el equilibrio se haya alcanzado, ya que esto puede tomar mucho tiempo. En la figura 6(b) se muestra un tensiómetro para mediciones en el campo.

Haciendo un balance de fuerzas en el tubo de la figura 5 se obtiene que:

$$h_c = \frac{p_c}{\rho g} = -\frac{p_{\text{agua}}}{\rho g}; \quad p_c > 0; \quad \text{ya que} \quad p_{\text{aire}} = 0$$

donde ρ es la densidad del agua. A h_c se le llama la cabeza de presión capilar.

Como en el flujo saturado aquí también podemos definir una cabeza piezométrica $\phi = z + p_{\text{agua}}/\gamma_{\text{agua}}$ en cada punto del dominio de flujo. Generalmente el término *cabeza capilar* (ϕ_c) se utiliza para denotar la cabeza piezométrica para el flujo no saturado. Tenemos entonces que

$$\phi_c = z + \frac{p_{\text{agua}}}{\gamma_{\text{agua}}} = z - \frac{p_c}{\gamma_{\text{agua}}} = z - h_c; \quad p_c > 0; \quad p_{\text{aire}} = 0$$

Como en el flujo saturado, la cabeza capilar también está medida desde un nivel arbitrario de referencia.

Muchos autores utilizan el símbolo ψ para el negativo de la cabeza de presión de tal manera que $\psi \equiv h_c = -p_{\text{agua}}/\gamma_{\text{agua}} > 0$. Y entonces para la cabeza capilar tenemos:

$$\phi_c = -\psi + z \quad (1.4)$$

Es importante recordar que los conceptos de ϕ_c , ψ , h_c se utilizan únicamente para fluidos incompresibles.

La definición de la cabeza capilar, ϕ_c , nos permite generalizar la ley de Darcy, (1.2), para el flujo no saturado como

$$\mathbf{q} = -K\nabla\phi_c. \quad (1.5)$$

En la sección 1.4.3 veremos que, en este caso, la conductividad hidráulica, K , deja de ser una constante y depende del contenido de agua, u . Esta generalización será discutida con más detalle en la sección 1.4.4.

La figura 7 muestra los instrumentos de medición de ϕ y ϕ_c e indica las diferencias entre ellas.

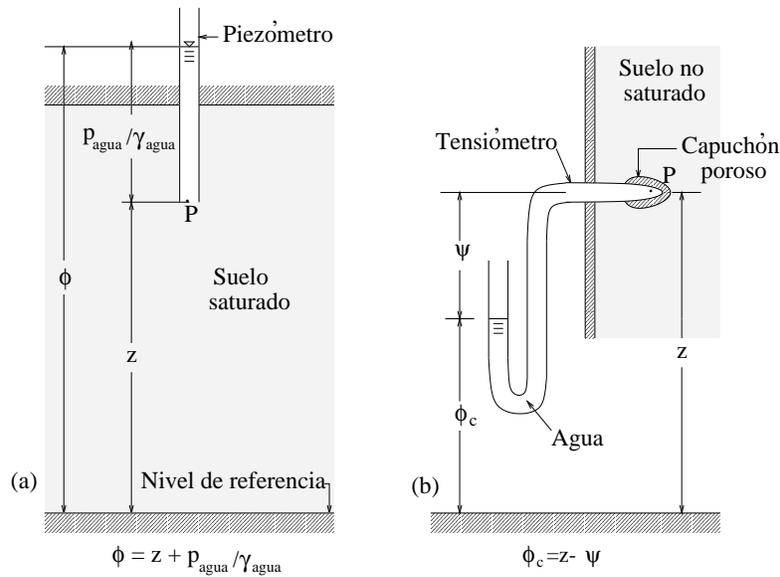


Figura 7. Diagramas de definición de ϕ y ϕ_c .

1.4.2 Retención de humedad

En la sección anterior se dijo que la presión capilar depende de la curvatura de la interfase entre el agua y el aire en el espacio vacío del medio poroso. Lo que hace aun más

interesante el estudio del flujo no saturado es que esta curvatura depende a su vez del contenido de agua en el medio poroso.

Consideremos una muestra saturada colocada en el plato poroso de la figura 6a. Ahora supongamos que el agua es drenada a través de la llave de paso. La figura 8 muestra las sucesivas etapas del drenaje. El estado inicial es denotado por 1. Mientras el agua es drenada, la superficie comienza a curvarse, 2. El radio de curvatura de la interfase dependerá de la succión. Mientras el agua es drenada y las interfases son aspiradas hacia abajo, la curvatura se vuelve más pronunciada y la succión aumenta. En cada etapa, la mayor succión que puede ser soportada por la interfase corresponde a la curvatura más aguda que puede ser acomodada en el canal a través del cual la interfase está siendo empujada, y la curvatura más pronunciada se presenta en la parte más angosta (etapa 3). Mientras el drenaje prosigue la interfase se retira hacia canales que soportan una curvatura de mayor radio, 4. Sin embargo, como esto significa menor succión, ésta no es una etapa de equilibrio y el agua continuará retirándose hasta que las interfases tomen una posición de equilibrio en canales que sean suficientemente estrechos para soportar interfases de curvatura más pronunciada, 5. Obviamente que si todos los canales son iguales y amplios, a una determinada succión no puede soportarse una etapa de equilibrio y un repentino y casi completo retiro de agua de la muestra tendrá lugar.

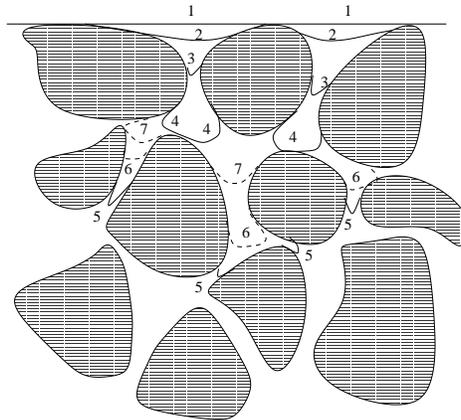


Figura 8. Etapas del drenaje de agua.

Generalmente, los poros tienen distintos tamaños y, por lo tanto, no se vaciarán a la misma succión. Los poros grandes (o aquellos con canales más amplios de entrada) se vaciarán con succiones bajas, mientras que los de canales de entrada más estrechos, que soportan interfases de curvatura más aguda, se vaciarán con succiones mayores.

Supongamos que ahora revertimos el proceso, y en vez de incrementar la succión para vaciar más poros, la reducimos con el propósito de rellenar el espacio vacío. La transición es ahora de la etapa 5 a las etapas 6 y 7. La curvatura de la interfase se vuelve progresivamente menos pronunciada.

La figura 9 muestra un típico ejemplo de la curva $\psi = \psi(u)$ o $h_c = h_c(u)$ durante el drenaje. En edafología esta curva se llama *curva de retención*, ya que muestra como el agua es retenida por fuerzas capilares contra la gravedad. El punto A de la figura 9 es llamado la *cabeza de presión capilar crítica* ψ_c . Si empezamos con una muestra saturada como en la figura 6a, y producimos una pequeña cabeza capilar ψ , casi nada de agua dejará la muestra (i.e., nada de aire penetrará la muestra) hasta que el valor de la cabeza capilar crítica se alcanza. Al seguir aumentando ψ los poros más grandes comienzan a drenar y el contenido de agua disminuye drásticamente.

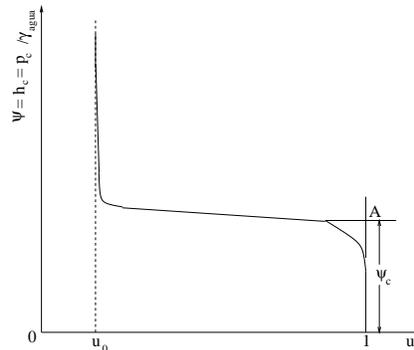


Figura 9. Curva típica de retención durante el drenaje.

Mientras el proceso de drenaje continúa se observa que una cierta cantidad de agua permanece en la muestra incluso a presiones capilares muy altas. Este valor de u , denotado u_0 , se llama el contenido irreducible de agua.

Durante el proceso de abastecimiento se observa que la curva $\psi = \psi(u)$ difiere de la obtenida durante el drenaje. Esto se debe a un fenómeno de histéresis. Al modelar un flujo en un medio poroso habrá que usar entonces la curva de retención correspondiente al fenómeno que se desea estudiar.

1.4.3 Conductividad hidráulica

El coeficiente de proporcionalidad K que aparece en las distintas formas de la ley de Darcy y en las ecuaciones para el flujo en la zona no saturada se llama conductividad hidráulica. Puede ser definida utilizando (1.2) como la descarga específica por unidad de gradiente hidráulico. Es un escalar que mide la facilidad con que un fluido es transportado a través de un medio poroso. Es, por lo tanto, un coeficiente que depende de las propiedades del fluido y de la matriz sólida. Las propiedades relevantes del fluido son su densidad y su viscosidad; y para la matriz sólida son el tamaño, la forma y la distribución de los granos (ó poros) y la porosidad.

Para el flujo no saturado se observa que la conductividad hidráulica, K , depende del

contenido de agua, u . Cuando la saturación disminuye, los poros grandes drenan primero por lo que el flujo tiene lugar a través de los poros más pequeños. Esto provoca una reducción en el área de la sección transversal accesible para el fluido y un incremento en la tortuosidad de los pasadizos en los que el flujo tiene lugar. La combinación de estos dos efectos causa una rápida reducción de la conductividad hidráulica mientras el contenido de agua disminuye. Cuando las películas de agua se hacen aún más delgadas, ciertos fenómenos en la interfase del agua con la matriz sólida intervienen provocando que la conductividad hidráulica siga disminuyendo. Entre estos factores podemos mencionar un incremento en la viscosidad del agua en las proximidades de las superficies sólidas.

La figura 10 muestra la relación $K = K(u)$ obtenida experimentalmente.

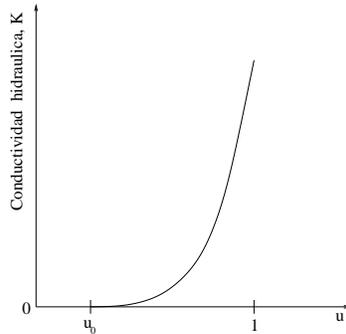


Figura 10. Gráfica de la conductividad hidráulica K , contra el contenido de agua, u .

Muchos autores sugieren diversas relaciones entre K y u . Childs & Collis-George (1950) suponen $K = Bu^3/M^2$ donde M es el área específica de la superficie de la fase sólida y B es una constante.

Irmay (1954) deduce una relación similar suponiendo que la resistencia al flujo ofrecida por la matriz sólida es proporcional al área de la interfase líquida-sólida. La conductividad hidráulica se vuelve entonces proporcional al radio hidráulico, i.e., al volumen del espacio vacío dividido entre el área humedecida. Este modelo nos lleva a la parábola cúbica:

$$K = K_0 \left(\frac{u - u_0}{1 - u_0} \right)^3$$

donde K_0 es la conductividad cuando el flujo es saturado. La curva experimental mostrada en la figura 10 es bien aproximada por la relación anterior. Otros experimentos en suelos donde el tamaño de los granos es uniforme coinciden también con esta relación.

También resulta conveniente presentar a K como una función de la cabeza de presión capilar, ψ . Sin embargo esta relación no es del todo precisa debido a que la dependencia $\psi = \psi(u)$ no es única por el fenómeno de histéresis. A pesar de ello, en gran parte de este trabajo supondremos que $\psi(u)$ está bien definida para $u \in [0, 1]$ y que

$$K = K_0 \exp(-a\psi) \quad (1.6)$$

donde a es una constante y K_0 es la conductividad cuando el flujo es saturado.

Esta última relación fue propuesta por Gardner en 1958 y a pesar de que no aproxima muy bien los datos experimentales, es utilizada por ser más conveniente para fines analíticos. La principal diferencia entre esta relación y las anteriores es que $K > 0$ mientras que en las otras relaciones se tiene que $K(u = 0) = 0$.

1.4.4 Las ecuaciones de movimiento para el flujo no saturado

Supondremos que el aire está estancado (i.e., $\mathbf{q}_{aire} = \mathbf{0}$) y que está a una presión constante usualmente tomada como 0 (i.e., $p_{aire} = 0$).

Siguiendo a muchos autores, entre los que se cuentan Buckingham (1907), Richards (1931), Childs (1936), Childs & Collis-George (1950), suponemos que la ley de Darcy, ó la ecuación de movimiento en tres dimensiones, es aplicable al flujo no saturado en un medio isótropo en la forma:

$$\mathbf{q} = -K(u)\nabla\phi_c \quad (1.7)$$

donde \mathbf{q} es el flujo volumétrico (volumen de agua por unidad de área por unidad de tiempo), ϕ_c es la cabeza capilar discutida en la sección 1.4.1 y $K(u) > 0$ es la conductividad hidráulica, que en este caso deja de ser una constante como en el flujo saturado y depende del contenido de agua, u , como se discutió en la sección anterior.

Al sustituir (1.4) en (1.7) se obtiene:

$$\mathbf{q} = -K(u)\nabla(-\psi + z) \quad (1.8)$$

En la sección 1.4.2 se discutió la relación $\psi = \psi(u)$. Es importante recordar que esta relación no es única debido a la histéresis, y que, por lo tanto, la historia del abastecimiento y el drenaje juegan un papel muy importante en el análisis de problemas de flujo.

A pesar de eso, suponiendo que la relación $\psi = \psi(u)$ es única (como cuando se trata únicamente de un problema de drenaje) y que está definida para $u \in [0, 1]$, hacemos uso de la regla de la cadena en (1.8) y obtenemos:

$$\mathbf{q} = K(u) \frac{d\psi}{du} \nabla u - K(u) \mathbf{e}_3 \quad (1.9)$$

Klute (1952) llamó a $D(u) \equiv -K(u) \frac{d\psi}{du}$ el coeficiente de difusividad ó la difusividad capilar. Recordando que $K(u) \geq 0$ y observando la relación $\psi = \psi(u)$ de la figura 9, en donde es claro que $\frac{d\psi}{du} < 0$, se sigue que $D(u) \geq 0$. Sustituyendo esta definición de $D(u)$ en (1.9) se obtiene:

$$\mathbf{q} = -D(u) \nabla u - K(u) \mathbf{e}_3 \quad (1.10)$$

Para el flujo horizontal en dos dimensiones en el plano xy tenemos:

$$\mathbf{q} = -D(u) \nabla u \quad (1.11)$$

La similitud entre (1.11) y la ley de Fick de difusión explica porque el término difusividad es utilizado aquí.

Para el flujo vertical tenemos:

$$q_z = -D(u) \frac{\partial u}{\partial z} - K(u) \quad (1.12)$$

A pesar de que hay suficiente evidencia experimental para justificar el uso de las ecuaciones anteriores (para el mismo rango de número de Reynolds para el que la ley de Darcy es válida), también hay evidencia experimental en la literatura de que cuando los gradientes hidráulicos (que son aquí la fuerza conductora) son muy bajos, el flujo se desvía de la ley de Darcy.

1.4.5 Ecuación de Richards

En esta sección deduciremos la ecuación de Richards, que es la ecuación que estudiaremos en los siguientes capítulos. Es una ecuación diferencial parcial no lineal para u para el caso del flujo vertical en la zona no saturada.

Por (1.12) tenemos que para el flujo vertical:

$$q_z = -D(u) \frac{\partial u}{\partial z} - K(u)$$

donde z es la altura medida desde un cierto nivel de referencia. En esta ecuación el término $-K(u)$ en la parte derecha representa el flujo debido a la gravedad y $-D(u) \frac{\partial u}{\partial z}$ representa el flujo debido a fuerzas capilares.

Supongamos ahora que deseamos modelar la filtración vertical de un fluido en el suelo. Si $x \in [0, \infty)$ mide la profundidad en el suelo entonces hacemos el cambio de variable $x = -z$ en (1.12). De este modo se tiene que $q_z = -q_x$ y que $\partial u / \partial z = -\partial u / \partial x$ y entonces tenemos

$$q_x = -D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + K(u). \quad (1.13)$$

A continuación haremos un argumento de conservación de masa. Consideremos dos puntos cualesquiera con profundidades a y b respectivamente como se muestra en la figura 11.

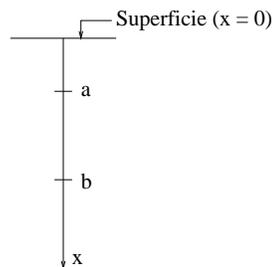


Figura 11

La masa total del agua entre a y b al tiempo t , $m((a, b); t)$, está dada por:

$$m((a, b); t) = \int_a^b u(x, t) dx. \quad (1.14)$$

La razón de cambio de esta masa es entonces:

$$\frac{d}{dt} m((a, b); t) = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx. \quad (1.15)$$

Si suponemos que la masa se conserva entonces esta razón de cambio deberá ser igual al agua que entra menos el agua que sale del intervalo (a, b) al tiempo t . Esta cantidad de agua está dada por:

$$q_x(a, t) - q_x(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q_x(x, t) dx. \quad (1.16)$$

Por lo tanto suponiendo que hay conservación de masa, igualamos (1.15) con (1.16) para obtener:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q_x(x, t) dx \quad (1.17)$$

que usando (1.13) se convierte en:

$$\int_a^b u_t + [-D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + K(u)]_x dx = 0 \quad (1.18)$$

Como a y b son arbitrarios entonces el integrando debe ser cero. Por lo tanto tenemos que:

$$u_t = [D(u) \frac{\partial u}{\partial x} - K(u)]_x \quad (1.19)$$

Esta es la ecuación de Richards para el flujo vertical en la zona no saturada en un medio homogéneo. Si el medio no es homogéneo entonces tanto D como K dependen también de x . Así que en este caso se tiene:

$$u_t = [D(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - K(u, x)]_x, \quad x \in [0, \infty); t \geq 0 \quad (1.20)$$

Las funciones $D(u, x)$ y $K(u, x)$ que aparecen en (1.19) y (1.20) son las llamadas funciones hidráulicas. Son altamente no lineales lo que hace que la ecuación de Richards sea muy difícil de resolver analíticamente.

Capítulo 2

Existencia y propiedades de las soluciones

Al estudiar la ecuación de Richards hay dos condiciones de frontera que en principio podrían considerarse, las del tipo Dirichlet $u(0, t) = u_1(t)$, $u(\infty, t) = u_2(t)$, o imponer condiciones sobre el flujo en la frontera:

$$-D(u)u_x + K(u)|_{x=0} = f_1(t) \quad -D(u)u_x + K(u)|_{x=\infty} = f_2(t).$$

De estos dos tipos de condiciones de frontera, la del flujo prescrito en $x = 0$ es más relevante físicamente, ya que éste puede relacionarse con irrigaciones o con el agua de lluvia.

El problema que estudiaremos entonces será el de encontrar soluciones de la ecuación de Richards dada la concentración inicial de humedad y con el flujo prescrito en la superficie del suelo, $x = 0$.

Es decir, estudiaremos el problema

$$u_t = [D(u)u_x - K(u)]_x \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{para} \quad x \geq 0, \quad (2.2)$$

$$-D(u)u_x + K(u)|_{x=0} = f(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

El objetivo de este capítulo es probar la existencia de soluciones a este problema. Obtendremos de paso, en la sección 2.3, algunas propiedades de las soluciones. Una de ellas, particularmente importante para la interpretación física, es que si $0 < u_0(x) < 1$

entonces $0 < u(x, t) < 1$, de modo que u efectivamente representa el contenido de humedad del suelo.

En todo el capítulo haremos las siguientes suposiciones sobre las funciones hidráulicas D y K :

Supondremos que $K(u)$ está dada por (1.6) con $a = 1$:

$$K(u) = K_0 \exp(-\psi(u))$$

y por lo tanto

$$K(u) > 0, \tag{2.4}$$

$$K'(u) = D(u) > 0 \tag{2.5}$$

$$K''(u) > 0 \quad \text{para} \quad u \in [0, 1]. \tag{2.6}$$

La relación (2.6) es crucial y está de acuerdo con los datos experimentales. Supondremos también que K y D son funciones acotadas para $u \in [0, 1]$ y que $K, D \in C^2[0, 1]$.
₁

La ventaja principal de estas suposiciones es que podemos hacer el cambio de variable

$$v(x, t) = K(u(x, t)). \tag{2.7}$$

entonces

$$v_t = K'(u)u_t \tag{2.8}$$

o

¹La figura 10 del capítulo 1 muestra la relación $K(u)$ obtenida experimentalmente. Observamos que $K(u)$ vale cero para $u \in [0, u_0]$ (donde $u_0 \in (0, 1)$ es el contenido irreducible de agua) lo que no está siendo reflejado por la suposición (2.4). También la figura 9 del capítulo 1 nos hace suponer que $\frac{d\psi}{du}$ no es acotada en el intervalo $[0, 1]$ lo que implica que $D(u)$ tampoco lo es. A pesar de que eso, estas suposiciones nos dan suficientes condiciones de regularidad para poder trabajar y son una aproximación al problema real.

$$u_t = \frac{v_t}{M(v)} \quad (2.9)$$

donde

$$M(v) = K'(u) = K'(K^{-1}(v)). \quad (2.10)$$

De (2.5) y (2.6) se sigue que $M(v)$, $M'(v) > 0$. Tenemos entonces la siguiente ecuación parabólica para $v(x, t)$:

$$v_t = M(v)v_{xx} - M(v)v_x. \quad (2.11)$$

Las condiciones inicial y de frontera quedan

$$v(x, 0) = v_0(x) \equiv K(u_0(x)), \quad (2.12)$$

$$-v_x(0, t) + v(0, t) = f(t). \quad (2.13)$$

En el resto del capítulo trabajaremos con esta formulación.

Para probar la existencia de soluciones de (2.1), (2.2) y (2.3) estudiaremos la existencia de las soluciones de

$$\begin{aligned} v_t = M(v)v_{xx} - M(v)v_x & \quad \text{en} \quad x \geq 0, t \geq 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v(0, t) - v_x(0, t) = f(t), & \end{aligned} \quad (2.14)$$

considerando ecuaciones lineales de la siguiente manera: si $v(x, t)$ es una función continua y acotada para $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ con $v(x, 0) = v_0(x)$, la solución $W(x, t)$ de la ecuación lineal

$$\begin{aligned} W_t = M(v)W_{xx} - M(v)W_x & \quad \text{en} \quad x \geq 0, 0 \leq t \leq T \\ W(x, 0) = v_0(x), \quad W(0, t) - W_x(0, t) = f(t) & \end{aligned} \quad (2.15)$$

define un operador $W = \Phi(v)$. La solución de (2.14) corresponde a un punto fijo de Φ . Las condiciones sobre los datos inicial y de frontera son $K(0) < \alpha_0 \leq v_0(x) \leq \alpha_1 < K(1)$ y $K(0) < \alpha_0 \leq f(t) \leq \alpha_1 < K(1)$.²

Una manera elemental de resolver (2.15) es por medio del método de diferencias finitas, ver [6], capítulo 7.2. La idea es fijar dos números pequeños Δx y Δt y discretizar la región $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ considerando únicamente los puntos de la forma $(n\Delta x, m\Delta t)$, donde n y m son enteros no negativos, y aproximar las derivadas de W por

$$\begin{aligned} W_t(x, t) &\approx \frac{W(x, t + \Delta t) - W(x, t)}{\Delta t} \\ W_x(x, t) &\approx \frac{W(x + \Delta x, t) - W(x, t)}{\Delta x} \\ W_{xx}(x, t) &\approx \frac{W(x + \Delta x, t) - 2W(x, t) + W(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Dado que conocemos $W(x, 0)$ podemos sustituir estas expresiones en (2.15) y de manera recursiva obtener los valores de W en los puntos de la retícula $(n\Delta x, m\Delta t)$, $n \geq 1$.

Para el caso $n = 0$ utilizamos la condición de frontera, que se puede aproximar por

$$W(0, t) = \frac{1}{1 + \Delta x} [W(\Delta x, t) + f(t)\Delta x].$$

Después se hace tender Δx y Δt a cero y en el límite obtenemos la solución $W(x, t)$.

Sin embargo, para buscar puntos fijos de Φ es más conveniente trabajar en espacios de funciones de Hölder, en los cuales es posible estimar $\|W\|$ de manera adecuada en términos de $\|v\|$.

2.1 Espacios de funciones

Consideremos un número real $\alpha \in (0, 1]$. Una función continua $v_0 : R^+ \rightarrow R$ es *Hölder continua con exponente α* si

$$\sup_{x \neq y} \frac{|v_0(x) - v_0(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty. \quad (2.16)$$

²Esta condición puede interpretarse como una restricción sobre los valores del flujo que puede soportar el suelo que dependen de los valores extremos de la conductividad hidráulica K .

El espacio $C^\alpha(R^+)$ consiste de las funciones acotadas, continuas en el sentido de Hölder con exponente α . La norma en este espacio está definida como

$$\|v_0\|_{C^\alpha(R^+)} \equiv |v_0|_\infty + |v_0|_\alpha$$

donde $|v_0|_\alpha$ es el supremo que aparece en (2.16).

Análogamente, si $k \in N$, el espacio $C^{k+\alpha}(R^+)$ consiste de las funciones v_0 tales que $v_0^{(j)}$ es acotada y continua en R^+ , $j = 0, 1, \dots, k$, y $v_0^{(k)} \in C^\alpha(R^+)$.

En este caso la norma es

$$\|v_0\|_{C^{k+\alpha}(R^+)} \equiv \sum_{j=0}^k |v_0^{(j)}|_\infty + |v_0^{(k)}|_\alpha.$$

En el caso de funciones $v(x, t)$ definidas para $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, si $R_T = R^+ \times [0, T]$ entonces $C^{\alpha, \alpha/2}(R_T)$ es el espacio de funciones que son Hölder continuas en ambas variables, con exponente α en x y exponente $\alpha/2$ en t .

En este caso

$$\begin{aligned} |v|_{\alpha, x} &= \sup_{0 \leq t \leq T} |v(\cdot, t)|_\alpha, & |v|_{\alpha/2, t} &= \sup_{x \geq 0} |v(x, \cdot)|_{\alpha/2} \\ \|v\|_{C^{\alpha, \alpha/2}(R_T)} &\equiv |v|_{\alpha, x} + |v|_{\alpha/2, t}, & \text{que denotaremos por } \|v\|_{\alpha, \alpha/2}^T. \end{aligned}$$

De manera análoga se definen los espacios $C^{k+\alpha, l+\alpha/2}(R_T)$, ver [9], capítulo 1. Nuestro espacio de funciones básico es $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$.

2.2 Existencia local de las soluciones

Estableceremos la existencia local de las soluciones de (2.14) para $0 \leq t \leq T$ y T suficientemente pequeño. Para ello analizaremos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación lineal (2.15). La estimación básica es la siguiente:

Si $v \in C^{\alpha, \alpha/2}(R_T)$, $v_0 \in C^{2+\alpha}(R^+)$, y $f \in C^{1+\alpha}([0, T])$, entonces la solución $W(x, t)$ de (2.14) existe, $W(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ y

$$\|W\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^T \leq c \left(|v_0|_{C^{2+\alpha}(R^+)} + |f|_{C^{1+\alpha/2}([0, T])} \right). \quad (2.17)$$

Ver [9], capítulo 4, secciones 5 y 6 ((5.10) y (6.6)). La constante c depende de $\|v\|_{\alpha, \alpha/2}^T$.

Si $r_1 = |v_0|_{C^{2+\alpha}}$, $r_2 = |f|_{C^{1+\alpha/2}([0, T])}$ y r es tal que

$$c[r_1 + r_2] < r$$

entonces la estimación (2.17) establece que $\Phi(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_r(0)}$ donde $B_r(0)$ es la bola con centro en el origen de $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ y radio r .

Finalmente verificamos que Φ es una contracción si T es suficientemente pequeño. Para ello, consideremos $v_1, v_2 \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ y las soluciones correspondientes W_1, W_2 . La diferencia $W = W_1 - W_2$ es solución de

$$\begin{aligned} W_t &= M(v_1)W_{xx} - M(v_1)W_x + M'(\theta)[(W_2)_{xx} - (W_2)_x][v_1 - v_2] \quad x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ W(x, 0) &= 0, \quad W(0, t) - W_x(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Si $\Lambda(t; v_1)$ denota al operador solución de (2.15) con coeficientes determinados por v_1 , entonces

$$W(x, t) = \int_0^t \Lambda(t - \tau; v_1)[(W_2)_{xx} - (W_2)_x][v_1 - v_2](x, \tau) d\tau.$$

Se sigue de la estimación (2.17) que

$$\begin{aligned} \|W_1 - W_2\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^T &\leq c \int_0^t \|W_2\|_{4+\alpha, 3+\alpha/2}^\tau \|v_1 - v_2\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^\tau d\tau \\ &\leq c T \|W_2\|_{4+\alpha, 3+\alpha/2}^T \|v_1 - v_2\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^T. \end{aligned}$$

Hay una estimación similar a (2.17) para derivadas de orden superior, ver [9], cap.4 sección 5, (5-10):

$$\|W_2\|_{4+\alpha, 3+\alpha/2}^T \leq \tilde{c} [|v_0|_{4+\alpha} + |f|_{3+\alpha/2}]$$

si v_0 y f son suficientemente regulares. La constante \tilde{c} depende de $\|v_2\|_{\alpha, \alpha/2}^T$ y por lo tanto es acotada cuando $T \rightarrow 0$. Se sigue que Φ es una contracción para T suficientemente pequeña y por lo tanto tiene un único punto fijo $v \in B_r(0)$, es decir $v(x, t)$ es solución de (2.14) para $0 \leq t \leq T$.

Nótese que T depende de $\|v\|_{\alpha, \alpha/2}^T$. Para T pequeño $\|v\|_{\alpha, \alpha/2}^T$ está cerca de $r_1 = |v_0|_\alpha$ y por lo tanto no depende de T .

2.3 Cotas a priori y comportamiento asintótico

Supongamos que $v(x, t)$ es una solución de (2.14) para $0 \leq t \leq T$. Estableceremos algunas propiedades de v que son válidas en cualquier intervalo donde dicha solución exista.

Proposición 2.1 *Si $v(x, t)$ es una solución de (2.14) y $K(0) < \alpha_0 \leq v_0(x) \leq \alpha_1 < K(1)$ entonces $\alpha_0 \leq v(x, t) \leq \alpha_1$ para todo $x \geq 0$ $0 \leq t \leq T$.*

Demostración: Es claro que $v(x, t)$ no puede alcanzar un máximo mayor que α_1 en $x > 0$, $0 < t \leq T$. Si $v(0, t_0) = \alpha_1$ por primera vez para $t_0 > 0$ entonces $v_x(0, t) = v(0, t) - f(t) = \alpha_1 - f(t) > 0$, con lo cual v alcanzaría su máximo en R_{t_0} en algún $x_0 > 0$. Esta contradicción prueba que $v(x, t) \leq \alpha_1$ para $0 \leq t \leq T$. Un argumento similar establece que $v(x, t) \geq \alpha_0$ para $0 \leq t \leq T$. La proposición está probada.

Una consecuencia interesante de este resultado es que la solución $u(x, t)$ que representa el contenido de agua satisface $0 < u(x, t) < 1$ mientras dicha solución exista.

Las siguientes demostraciones están adaptadas de las correspondientes pruebas en [11] para la ecuación (2.1). En ellas se usa el principio del máximo para ecuaciones parabólicas en diversas formas (ver [12] cap.3). El resultado principal es el siguiente:

Considérese el operador lineal

$$L = a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - h(x, t) - \frac{\partial}{\partial t}$$

en la región $x \geq 0$, $t \geq 0$ donde $a(x, t) \geq \mu > 0$, $h(x, t) \geq 0$ y a, b y h son funciones acotadas. Si $u(x, t)$ satisface $L[u] \leq 0$, $u(x, 0) \geq 0$, $u(0, t) \geq 0$ entonces $u(x, t) \geq 0$ para $x \geq 0$, $t \geq 0$.

La siguiente proposición muestra que las soluciones de (2.14) mantienen el comportamiento asintótico en $x = \infty$ de la condición inicial.

Proposición 2.2 *Si $v(x, t)$ es una solución de (2.14) en $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} v_0(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = l$ uniformemente en $t \in [0, T]$.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ de tal forma que $|v_0(x) - l| \leq \epsilon/2$ para $x \geq x_0$. Consideremos la función

$$r(x, t) = l + \frac{\epsilon}{2} + Ce^{\beta t + (x_0 - x)}$$

y el operador

$$L = M(v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M(v) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t},$$

entonces

$$L(r) = [2M(v) - \beta]Ce^{\beta t + (x_0 - x)}.$$

Como $v(x, t) \leq K(1)$, si $\beta > 2K'(1)$ se tiene que $L(r) < 0$. Por lo tanto $L(r - v) \leq 0$. En $t = 0$ tenemos

$$r(x, 0) - v(x, 0) = l + \frac{\epsilon}{2} + Ce^{x_0 - x} - v_0(x) \geq Ce^{x_0 - x} > 0 \quad \text{si} \quad x \geq x_0.$$

En $0 \leq x \leq x_0$ basta tomar $C > |v_0|_\infty$ para que $r(x, 0) - v(x, 0) > 0$.

En la frontera lateral $x = 0$ tenemos

$$r(0, t) - v(0, t) = l + \frac{\epsilon}{2} + Ce^{\beta t + x_0} - v(0, t) > 0 \quad \text{si} \quad C > K(1).$$

Con la elección de las constantes C y β se tiene, por el principio del máximo, que $r(x, t) \geq v(x, t)$ para $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, es decir

$$v(x, t) \leq l + \frac{\epsilon}{2} + Ce^{\beta t + (x_0 - x)} \leq l + \frac{\epsilon}{2} + Ce^{\beta T} e^{x_0 - x}.$$

La estimación por abajo es similar. Combinando ambas vemos que existe $x_1 > 0$ de tal forma que

$$|v(x, t)| \leq \epsilon \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \geq x_1.$$

La proposición está probada.

Proposición 2.3 Si $v(x, t)$ es una solución de (2.14) en $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} v'_0(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} v_x(x, t) = 0$ uniformemente en $t \in [0, T]$.

Demostración: La ecuación para $W = v_x$ es

$$W_t = M(v)W_{xx} - M(v)W_x + M'(v)WW_x - M'(v)W^2.$$

Consideremos la función

$$r(x, t) = \frac{\epsilon}{2}e^{\beta(t-T)} + Ce^{\beta t + (x_0 - x)}$$

y el operador

$$L = M(v)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - M(v)\frac{\partial}{\partial x} + M'(v)v_x\frac{\partial}{\partial x} - M'(v)v_x - \frac{\partial}{\partial t},$$

entonces $L(W) = 0$ y por lo tanto

$$L(r - W) = L(r) = [2M(v) - 2M'(v)v_x - \beta] Ce^{\beta t + (x_0 - x)} + [-\beta - M'(v)v_x] \frac{\epsilon}{2}e^{\beta(t-T)}.$$

Dado que $|v_x(x, t)| \leq \|v\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^T$ se sigue que podemos escoger β suficientemente grande tal que $L(r) \leq 0$. En $t = 0$ se tiene

$$r(x, 0) - v_x(x, 0) = \frac{\epsilon}{2}e^{-\beta T} + Ce^{(x_0 - x)} - v'_0(x) > Ce^{(x_0 - x)} > 0$$

si x_0 es tal que $|v'_0(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}e^{-\beta T}$ para $x \geq x_0$. Si $C > |v'_0|_\infty$ y $0 \leq x \leq x_0$, entonces

$$r(x, 0) - v_x(x, 0) > Ce^{(x_0 - x)} - v'_0(x) > 0$$

y por lo tanto

$$r(x, 0) - v_x(x, 0) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \geq 0.$$

En la frontera lateral $x = 0$ se tiene

$$r(0, t) - v_x(0, t) = Ce^{\beta t} e^{x_0} + \frac{\epsilon}{2} e^{\beta(t-T)} - v_x(0, t) > 0$$

si $C > \|v\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^T$. Entonces por el principio del máximo se sigue que $r(x, t) - v_x(x, t) \geq 0$, es decir

$$v_x(x, t) \leq \frac{\epsilon}{2} e^{\beta(t-T)} + Ce^{\beta t} e^{(x_0-x)} \leq \frac{\epsilon}{2} + Ce^{\beta T} e^{(x_0-x)}.$$

La acotación por abajo es similar. De ambas concluimos que existe $x_1 > 0$ tal que

$$|v_x(x, t)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad x \geq x_1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La proposición está probada.

El siguiente resultado es una estimación uniforme en el tiempo para $|v_x|_\infty$.

Proposición 2.4 *Existe una constante positiva C de tal forma que si $v(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ es solución de (2.14) en $0 \leq t \leq T$, entonces $|v_x(x, t)| \leq C$.*

Demostración: Recordemos que la ecuación para $W = v_x$ es

$$\begin{aligned} W_t &= M(v)W_{xx} - M(v)W_x + M'(v)WW_x - M'(v)W^2 \\ W(x, 0) &= v'_0(x), \quad W(0, t) = v(0, t) - f(t). \end{aligned}$$

Como $M'(v) > 0$, se sigue del principio del máximo que v_x alcanza un máximo en la frontera de R_T , por lo tanto existe una constante $C_1 > 0$ de tal forma que $v_x(x, t) \leq C_1$.

Para obtener la cota inferior, consideremos la función

$$r(x, t) = e^{-x}v(x, t).$$

La ecuación para r es

$$\begin{aligned} r_t &= M(v)r_{xx} + M(v)r_x \quad \text{en} \quad x \geq 0, t \geq 0 \\ r(x, 0) &= e^{-x}v_0(x), \quad r_x(0, t) = -f(t). \end{aligned}$$

Así que la ecuación para $q(x, t) = r_x(x, t)$ es

$$\begin{aligned} q_t &= M(v)q_{xx} + M(v)q_x + M'(v)v_xq_x + M'(v)v_xq \\ &= M(v)q_{xx} + M(v)q_x + M'(v)e^x[r + q]q_x + M'(v)e^x(r + q)q \\ &= M(v)q_{xx} + (M(v) + M'(v)e^x[r + q])q_x + M'(v)e^x(r + q)q \\ q(x, 0) &= e^{-x}[v'_0(x) - v_0(x)], \quad q(0, t) = -f(t). \end{aligned}$$

Se sigue que q no puede alcanzar un mínimo interior en (x_0, t_0) tal que $q(x_0, t_0) < -K(1)$, pues $r \leq K(1)$. Dado que q es acotada inferiormente en $\partial(R_T)$, se sigue que existe C_2 de tal forma que $q(x, t) \geq -C_2$.

De la relación $r_x = e^{-x}v_x - e^{-x}v$ y la proposición 2.3 se sigue que v_x es acotada inferiormente. Si $C = \max\{C_1, C_2\}$, entonces

$$|v_x(x, t)| \leq C \quad \text{para} \quad x \geq 0, 0 \leq t \leq T.$$

La proposición está probada.

El siguiente resultado es una cota inferior uniforme para v_t .

Proposición 2.5 *Existe una constante positiva C de tal forma que si $v(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ es solución de (2.14) en $0 \leq t \leq T$, entonces $v_t(x, t) \geq -C$.*

Demostración: La ecuación para $q(x, t) = v_t(x, t)$ es

$$\begin{aligned} q_t &= M(v)q_{xx} - M(v)q_x + M'(v)qv_{xx} - M'(v)qv_x \\ &= M(v)q_{xx} - M(v)q_x + \frac{M'(v)}{M(v)}q^2 \\ q(x, 0) &= M(v_0(x))[v''_0(x) - v'_0(x)], \quad q(0, t) - q_x(0, t) = f'(t). \end{aligned}$$

La estimación es consecuencia del principio del máximo.

Finalmente supondremos que $v_t \leq C$ para todo $x \geq 0$, $0 \leq t \leq T$. En este caso, $|v_t|_\infty$ es acotada uniformemente en t y en consecuencia $\|v\|_{\alpha, \alpha/2}^T$ es acotada, independientemente de T , para cualquier $\alpha \in (0, 1]$.

De aquí se sigue que podemos continuar la solución local por medio del esquema de contracciones como se hizo en la sección 2.2 y obtener una solución definida para todo $t \geq 0$.

Capítulo 3

Convergencia de las soluciones a ondas viajeras

En este capítulo estudiaremos los frentes húmedos para un suelo homogéneo. Matemáticamente los frentes húmedos son representados por soluciones en forma de onda viajera de la ecuación de Richards para un suelo homogéneo (1.19).

El principal resultado de este capítulo es que bajo algunas suposiciones, las soluciones de (2.1) con las condiciones de frontera (2.2) y (2.3) “se parecen” a soluciones en forma de onda viajera para tiempos largos.

En la sección 3.1 se prueba la existencia de ondas viajeras para (2.1) y se discuten algunas de sus propiedades. En la sección 3.2 estudiamos la aproximación de las soluciones de (2.1) por la onda viajera.

Como en el capítulo anterior supondremos que las funciones hidráulicas D y K satisfacen

$$\begin{aligned} K(u) &> 0, \\ K'(u) &= D(u) > 0 \\ K''(u) &> 0 \quad \text{para} \quad u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

y que ellas y sus derivadas son acotadas.

3.1 Existencia de ondas viajeras

En esta sección probamos la existencia de soluciones en forma de onda viajera para la ecuación de Richards (2.1). Las ondas viajeras son conexiones entre dos soluciones estacionarias. En 3.1.1 estudiamos estas soluciones estacionarias para en 3.1.2 buscar ondas viajeras de (2.1).

3.1.1 Soluciones estacionarias

Las soluciones estacionarias de (2.1) satisfacen

$$0 = [D(u)u_x - K(u)]_x.$$

Lo que implica que la expresión dentro del paréntesis debe ser igual a una constante, entonces

$$k_0 = -D(u)u_x + K(u) \tag{3.1}$$

donde $-k_0$ es dicha constante. Vemos entonces que las soluciones estacionarias de (2.1) son aquellas que tienen un flujo constante a cualquier profundidad $x \in [0, \infty)$.

Usando que $K'(u) > 0$, como el capítulo anterior hacemos el cambio de variable

$$v(x) = K(u(x))$$

La ecuación (3.1) se transforma en

$$k_0 = -v_x + v$$

cuya solución general es

$$v(x) = k_0 + ke^x, \quad k \in \mathbb{R}^+ \tag{3.2}$$

Como u representa el contenido de agua, entonces $0 \leq u \leq 1$. Por lo tanto las únicas soluciones acotadas se obtienen cuando $k = 0$ en (3.18). De este modo tenemos que

$$v = k_0$$

o bien

$$u = K^{-1}(k_0) \tag{3.3}$$

Entonces, dado un flujo constante k_0 , hay una única solución estacionaria constante asociada a él y está dada por (3.3). Además como K es creciente vemos que esta solución varía monótonamente con k_0 .

Como queremos que $0 \leq u \leq 1$ necesitamos pedir que

$$K(0) \leq k_0 \leq K(1)$$

Esta condición puede interpretarse como una restricción sobre los valores del flujo que puede soportar el suelo y dependen de los valores extremos de la conductividad hidráulica K .

3.1.2 Soluciones en forma de onda viajera

En esta sección discutiremos la existencia de ondas viajeras para (2.1), es decir

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \tag{3.4}$$

donde c es la velocidad de la onda. Llamando $\xi = x - ct$ tenemos que $\varphi = \varphi(\xi)$. Si denotamos $\frac{d}{d\xi} = '$ obtenemos, al sustituir (3.4) en (2.1), la siguiente ecuación diferencial ordinaria para φ :

$$-c\varphi' = [D(\varphi)\varphi' - K(\varphi)]' \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Por lo tanto

$$k_0 = D(\varphi)\varphi' - K(\varphi) + c\varphi \quad (3.5)$$

donde k_0 es una constante de integración.

Como se mencionó en el principio de esta sección la onda viajera φ será una conexión entre dos soluciones estacionarias de (2.1), φ_a y φ_b .

Hechas estas consideraciones, nuestro problema matemático es ahora probar la existencia de φ que satisfice

$$k_0 = D(\varphi)\varphi' - K(\varphi) + c\varphi, \quad (3.6)$$

$$\varphi(-\infty) = \varphi_a, \quad \varphi(\infty) = \varphi_b, \quad (3.7)$$

Supondremos que $\varphi_b < \varphi_a$ lo que corresponde a suponer que el suelo se está humedeciendo a medida que avanza el tiempo.

Reescribimos (3.6) como una ecuación autónoma,

$$\varphi' = \frac{K(\varphi) - c\varphi + k_0}{D(\varphi)}. \quad (3.8)$$

La única forma en que las condiciones (3.7) pueden cumplirse es que φ_a y φ_b sean soluciones de equilibrio de (3.8), es decir

$$0 = K(\varphi_a) - c\varphi_a + k_0, \quad (3.9)$$

$$0 = K(\varphi_b) - c\varphi_b + k_0. \quad (3.10)$$

de donde vemos que la velocidad, c , tiene el valor único

$$c = \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi_b)}{\varphi_a - \varphi_b} > 0. \quad (3.11)$$

Además

$$\begin{aligned}
k_0 &= c\varphi_a - K(\varphi_a) \\
&= c\varphi_b - K(\varphi_b).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sea $\varphi(\xi)$ una solución de (3.8) que satisface $\varphi_b < \varphi(0) < \varphi_a$. Nos gustaría poder extender el dominio de φ a $(-\infty, \infty)$ y garantizar que $\varphi(-\infty) = \varphi_a$, $\varphi(\infty) = \varphi_b$. La extensión del dominio es posible ya que el lado derecho de (3.8) está acotado y tiene derivada continua para $\varphi \in [0, 1]$.

Para asegurar que $\varphi(-\infty) = \varphi_a$ y que $\varphi(\infty) = \varphi_b$ es necesario y suficiente que el lado derecho de (3.8) sea estrictamente negativo para $\varphi_b < \varphi < \varphi_a$. Es decir

$$K(\varphi) - c\varphi + k_0 < 0.$$

Usando (3.12) tenemos

$$\begin{aligned}
K(\varphi) - c\varphi + c\varphi_a - K(\varphi_a) &< 0 \\
K(\varphi) - c\varphi + c\varphi_b - K(\varphi_b) &< 0,
\end{aligned}$$

o

$$\frac{K(\varphi) - K(\varphi_b)}{\varphi - \varphi_b} < c < \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi)}{\varphi_a - \varphi}$$

que por (3.11) nos da

$$\frac{K(\varphi) - K(\varphi_b)}{\varphi - \varphi_b} < \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi_b)}{\varphi_a - \varphi_b} < \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi)}{\varphi_a - \varphi} \tag{3.13}$$

que es cierto para $\varphi_b < \varphi < \varphi_a$ ya que $K''(u) > 0$.

Notemos que dado que el lado derecho de (3.8) es estrictamente negativo, se sigue que φ es una función monótona decreciente de ξ .

Probaremos ahora que φ converge exponencialmente a los estados de equilibrio φ_a y φ_b . Esto es una consecuencia de la hiperbolicidad. El jacobiano de el lado derecho de (3.8) es

$$\frac{K'(\varphi) - c}{D(\varphi)} - \frac{D'(\varphi)}{D^2(\varphi)} [K(\varphi) - c\varphi + k_0].$$

Al evaluar en φ_b el segundo término se cancela. Entonces si escribimos

$$\varphi(\xi) = \varphi_b + h(\xi) \tag{3.14}$$

con $h(\xi)$ positiva, tenemos que h satisface

$$h'(\xi) = \frac{K'(\varphi_b) - c}{D(\varphi_b)} h(\xi) + O(h^2(\xi)).$$

Sea

$$M = \frac{c - K'(\varphi_b)}{D(\varphi_b)}.$$

Por (3.11) y la convexidad de K vemos que $M > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $0 < h(\xi) < \delta$ entonces

$$O(h^2(\xi)) \leq \frac{M}{2} h(\xi)$$

y por lo tanto tenemos que

$$h'(\xi) \leq -Mh(\xi) + \frac{M}{2}h(\xi) = -\frac{M}{2}h(\xi) \leq 0$$

de donde concluimos que

$$h(\xi) \leq h(\xi_0)e^{\frac{M}{2}(\xi_0 - \xi)} \quad \text{para} \quad \xi \geq \xi_0 \quad \text{si} \quad 0 \leq h(\xi_0) < \delta. \tag{3.15}$$

Como $\varphi(\xi) \rightarrow \varphi_b$ cuando $\varphi \rightarrow \infty$ sabemos que existe ξ_0 tal que $0 \leq h(\xi_0) < \delta$ y entonces por (3.14) y (3.15) tenemos

$$\varphi(\xi) \leq \varphi_b + \delta e^{\frac{M}{2}(\xi_0 - \xi)} \quad \text{para} \quad \xi \geq \xi_0.$$

Por lo tanto $\varphi(\xi)$ converge exponencialmente a φ_b cuando $\xi \rightarrow \infty$. De manera completamente análoga puede probarse que $\varphi(\xi)$ converge exponencialmente a φ_a cuando $\xi \rightarrow -\infty$.

Resumiendo hemos probado que dados dos estados estacionarios φ_a y φ_b tales que $\varphi_a > \varphi_b$, existe una onda viajera que los conecta y que converge exponencialmente a ellos cuando $\xi \rightarrow \mp\infty$. La elección correcta de estos estados estacionarios nos dará la onda viajera que se aproxima a la solución de (2.1) que satisface (2.2) y (2.3).

3.2 Aproximación de las soluciones por ondas viajeras

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones de (2.1) para tiempos largos. Veremos que estas soluciones son bien descritas por las ondas viajeras discutidas en la sección anterior. Los resultados principales aparecen en [11].

Comenzamos escribiendo la ecuación (2.1), la condición inicial (2.2) y la de frontera (2.3)

$$u_t = [D(u)u_x - K(u)]_x \quad \text{para} \quad x \in [0, \infty), t \geq 0 \quad (3.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{para} \quad x \geq 0, \quad (3.17)$$

$$-D(u)u_x + K(u)|_{x=0} = f(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0 \quad (3.18)$$

en términos de la variable móvil $\xi = x - ct$. Escribimos

$$u(x, t) = u(\xi + ct, t) = \tilde{u}(\xi, t).$$

Sustituyendo en (3.16) tenemos la siguiente ecuación para $\tilde{u}(\xi, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} K(\tilde{u}) + c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \quad \text{para} \quad \xi \geq -ct, t \geq 0 \quad (3.19)$$

Por comodidad quitaremos la tilde, $\tilde{\cdot}$, en (3.19). Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} K(u) + c \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \text{para} \quad \xi \geq -ct, t \geq 0. \quad (3.20)$$

Las condiciones de (3.17) y (3.18) quedan

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad \xi \geq 0 \quad (3.21)$$

$$-D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + K(u)|_{(-ct, t)} = f(t), \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

En la sección anterior probamos que dados dos estados estacionarios φ_a y φ_b existe una onda viajera, $\varphi(x - ct)$, que los conecta y que converge exponencialmente a ellos cuando $\xi \rightarrow \mp\infty$. La elección correcta de estos estados estacionarios nos dará la onda viajera que se aproxima a la solución $u(\xi, t)$ de (3.20) que satisface (3.21) y (3.22).

También se probó, en la sección 3.1, que $\varphi(\xi)$ es una función monótona decreciente de ξ , que la velocidad de la onda está determinada por (3.11),

$$c = \frac{K(\varphi_a) - K(\varphi_b)}{\varphi_a - \varphi_b} > 0, \quad (3.23)$$

y que φ satisface las condiciones de flujo en las fronteras

$$\begin{aligned} -D(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} + K(\varphi)|_{\xi=-\infty} &= a = K(\varphi_a), \\ -D(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} + K(\varphi)|_{\xi=\infty} &= b = K(\varphi_b) \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $K(0) \leq a < b \leq K(1)$.

Para que $\varphi(\xi)$ se aproxime a $u(\xi, t)$ será necesario hacer ciertas suposiciones sobre $u_0(\xi)$ y sobre $f(t)$.

En primer lugar supondremos que tienen límite:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_0(\xi) &= l_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= l_2. \end{aligned}$$

Estos límites determinan nuestra elección de los estados estacionarios para φ :

$$\varphi_b = l_1 \quad \varphi_a = K^{-1}(l_2).$$

Además se debe cumplir $K^{-1}(l_2) > l_1$.

Pedimos además que la convergencia de u_0 y f a sus límites sea suficientemente rápida de modo que

$$\int_0^\infty (u_0(\xi) - \varphi_b) d\xi < \infty, \quad (3.25)$$

$$\int_0^\infty (K(\varphi_a) - f(t)) dt < \infty. \quad (3.26)$$

Supondremos también que $f \in C^{3+1/4}[0, \infty)$ y que $u_0 \in C^{4+1/2}[0, \infty)$, estas condiciones de suavidad vienen de tomar $\alpha = 1/2$ en el análisis del capítulo anterior. Pedimos además que $0 < \alpha_0 \leq u_0(x) \leq \alpha_1 < 1$, y que $K(0) < \beta_0 \leq f(t) \leq \beta_1 < K(1)$ para completar las hipótesis necesarias para aplicar los resultados del capítulo anterior. De este modo sabemos que la solución $u(\xi, t)$ en verdad existe. Además por las proposiciones 2.2 y 2.3 sabemos que

$$u(\xi, t) \rightarrow \varphi_b, \quad u_\xi(\xi, t) \rightarrow 0$$

cuando $\xi \rightarrow \infty$, uniformemente para $t \in [0, T]$. Por la proposición 2.4 sabemos que $|u_\xi(\xi, t)|$ es acotado para $t \in [0, T]$. Estos resultados serán utilizados frecuentemente en las siguientes secciones. También supondremos que $|u_t|$ es uniformemente acotada de tal forma que la solución existe para todo $t \geq 0$.

A lo largo de esta sección llamaremos $\Omega = \{(\xi, t) : \xi > -ct, t > 0\}$.

El objetivo de esta sección es probar que bajo estas suposiciones existe un número γ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)| = 0$$

uniformemente para $x \geq 0$. El resultado será probado en la subsección 3.2.2 y para la demostración será necesario usar 3 lemas que son probados en la sección 3.2.1.

Como se mencionó al principio de este capítulo, también supondremos que K, K', K'', D, D' son funciones positivas y acotadas y que $D, K \in C^2[0, 1]$.

3.2.1 Lemas preliminares

Lema 1 [11] *La integral*

$$\int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds$$

existe y es finita para $(\xi, t) \in \Omega$.

Demostración: Sea

$$W(\xi, N, t) = \int_{\xi}^N (u(s, t) - \varphi_b) ds.$$

Usando (3.20) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \int_{\xi}^N \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} - K(u) + cu \right] ds \\ &= D(u(s, t)) \frac{\partial u}{\partial \xi}(s, t) - K(u(s, t)) + cu(s, t) \Big|_{s=\xi}^{s=N} \\ &= D(u(N, t)) \frac{\partial u}{\partial \xi}(N, t) - K(u(N, t)) + cu(N, t) - D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + K(u) - cu. \end{aligned}$$

Por las proposiciones 2.2 y 2.3 tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial t} = -K(\varphi_b) + c\varphi_b - D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + K(u) - cu, \quad (3.27)$$

uniformemente en t en cualquier intervalo acotado de la forma $[0, T]$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} W(\xi, N, t) &= W(\xi, N, 0) + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t} dt \\ &= \int_{\xi}^N (u_0(s) - \varphi_b) ds + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(\xi, N, t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto usando (3.27) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} W(\xi, N, t) &= \int_{\xi}^{\infty} (u_0(s) - \varphi_b) ds \\ &+ \int_0^t \left(-K(\varphi_b) + c\varphi_b - D(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + K(u) - cu \right) dt, \end{aligned} \quad (3.28)$$

que es finito por (3.25).

El lema está probado.

Para la demostración de los siguientes dos lemas se utiliza un principio del máximo similar al enunciado en el capítulo 2, pg. 35, para la región $\xi \geq -ct$, $t \geq 0$.

Lema 2 [11] *Sea*

$$W(\xi, t) = \int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds.$$

Entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi, t) = 0$$

uniformemente para $t \geq 0$.

Demostración: El resultado para $t \in [0, T]$ se sigue de tomar $\xi \rightarrow \infty$ en (3.28) y usar las proposiciones 2.2 y 2.3.

Para obtener un resultado uniforme en $t \geq 0$, sea $\epsilon > 0$. Primero acotaremos $W(\xi, t)$ por debajo por $-Me^{-\beta\xi} - \frac{\epsilon}{2}$ para alguna $\beta > 0$ y $M > 0$. Sean

$$W_1(\xi, t) = Me^{-\beta\xi} + \frac{\epsilon}{2} + W(\xi, t)$$

y

$$L = D(u) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} LW &= D(u)(-u_\xi) + c(-u + \varphi_b) \\ &\quad -(-K(\varphi_b) + c\varphi_b - D(u)u_\xi + K(u) - cu) \\ &= K(\varphi_b) - K(u) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$LW_1 = (\beta^2 D(u) - c\beta)Me^{-\beta\xi} + K(\varphi_b) - K(u). \quad (3.29)$$

Dado que $K''(u) > 0$, que $\varphi_b < \varphi_a$ y que c está dada por (3.23) se sigue que $c > K'(\varphi_b)$ y entonces podemos escoger β tal que

$$0 < \beta < \frac{c - K'(\varphi_b)}{\sup_{(\xi,t) \in \Omega} D(u(\xi,t))}. \quad (3.30)$$

Por otro lado se tiene que

$$W_1(\xi, 0) = Me^{-\beta\xi} + \frac{\epsilon}{2} + \int_\xi^\infty (u_0(s) - \varphi_b)ds$$

y

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(-ct, t) = -M\beta e^{c\beta t} + \varphi_b - u(-ct, t).$$

Claramente podemos escoger $M > 0$ suficientemente grande tal que

$$W_1(\xi, 0) \geq 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi}(-ct, t) < 0 \quad \text{para} \quad (\xi, t) \in \Omega. \quad (3.31)$$

Afirmamos ahora que con esta elección de β y M , $W_1(\xi, t) \geq 0$ para todo $(\xi, t) \in \Omega$. Supongamos por el contrario que W_1 toma valores negativos. Entonces existe un conjunto compacto $\Omega_T = \{(\xi, t) : 0 \leq t \leq T, -ct \leq \xi \leq \xi_0\}$ que contiene puntos en donde W_1 toma valores negativos. En consecuencia existe $(\xi_1, t_1) \in \Omega_T$ que es un mínimo negativo

de W_1 en Ω_T . Es claro que las condiciones dadas en (3.31) impiden que (ξ_1, t_1) esté en las secciones de la frontera de Ω_T determinadas por $t = 0$, $-ct \leq \xi \leq \xi_0$ y $0 \leq t \leq T$, $\xi = -ct$.

Por otro lado, como $\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi, t) = 0$, uniformemente para $0 \leq t \leq T$, podemos escoger ξ_0 tal que $W(\xi_0, t) \geq -\frac{\epsilon}{2}$ para $0 \leq t \leq T$, y por lo tanto

$$W_1(\xi_0, t) \geq 0.$$

Entonces (ξ_1, t_1) debe ser un punto interior o pertenecer a la sección de la frontera de Ω_T determinada por $t = T$, $-ct \leq \xi \leq \xi_0$. Veremos que estas dos posibilidades nos llevan a una contradicción.

Supongamos que (ξ_1, t_1) es un punto interior de Ω_T . Entonces debe tenerse

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(\xi_1, t_1) = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\xi_1, t_1) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(\xi_1, t_1) \geq 0.$$

Por lo tanto $LW_1(\xi_1, t_1) \geq 0$ y por (3.29) tenemos que

$$(\beta^2 D(u) - c\beta)Me^{-\beta\xi} + K(\varphi_b) - K(u) \geq 0 \tag{3.32}$$

en (ξ_1, t_1) . Por otro lado como $K''(u) > 0$ tenemos

$$K(\varphi_b) - K(u) \leq K'(\varphi_b)(\varphi_b - u)$$

y entonces podemos escribir (3.32) como

$$(\beta^2 D(u) - c\beta)Me^{-\beta\xi} + K'(\varphi_b)(\varphi_b - u) \geq 0 \tag{3.33}$$

en (ξ_1, t_1) . Además tenemos

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\xi_1, t_1) = -\beta Me^{-\beta\xi_1} + \varphi_b - u(\xi_1, t_1) = 0. \tag{3.34}$$

Multiplicando (3.34) por $-K'(\varphi_b)$ y sumándosela a (3.33) obtenemos

$$(\beta D(u(\xi_1, t_1)) - c + K'(\varphi_b))\beta M e^{-\beta \xi_1} \geq 0$$

lo que implica

$$\beta \geq \frac{c - K'(\varphi_b)}{D(u(\xi_1, t_1))} \geq \frac{c - K'(\varphi_b)}{\sup_{(\xi, t) \in \Omega} D(u(\xi, t))}$$

que contradice (3.30). Por lo tanto (ξ_1, t_1) no puede ser un punto interior de Ω_T .

Si (ξ_1, t_1) estuviera en la frontera superior de Ω_T , $t = T$, entonces debiera cumplirse

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\xi_1, T) = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial t}(\xi_1, T) \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(\xi_1, T) \geq 0.$$

Como en el caso anterior tenemos que $LW_1 \geq 0$ y llegamos a la misma contradicción.

Por lo tanto $W_1(\xi, t) \geq 0$ y entonces

$$W(\xi, t) \geq -M e^{-\beta \xi} - \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.35)$$

Nótese que dado que ni M ni β dependen de T , (3.35) es cierta en todo Ω .

Ahora acotaremos W por arriba por

$$U(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds + \frac{\epsilon}{2}.$$

$U(\xi)$ está bien definida para todo ξ ya que $\varphi(\xi - \gamma)$ converge exponencialmente a φ_b cuando $\xi \rightarrow \infty$. También es claro que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) = \frac{\epsilon}{2}$.

Sea

$$\begin{aligned} W_2(\xi, t) &= U(\xi) - W(\xi, t) \\ &= \int_{\xi}^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds + \frac{\epsilon}{2} - \int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds \\ &= \int_{\xi}^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - u(s, t)) ds + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi} = u - \varphi, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} = u_\xi - \varphi_\xi. \quad (3.36)$$

Además usando (3.20) y las proposiciones 2.2 y 2.3 puede verse que

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = K(\varphi_b) - c\varphi_b + D(u)u_\xi - K(u) + cu. \quad (3.37)$$

Por otro lado, por (3.5) y (3.12) tenemos

$$0 = -K(\varphi_b) + c\varphi_b - D(\varphi)\varphi_\xi + K(\varphi) - c\varphi. \quad (3.38)$$

Sumando (3.37) y (3.38) se tiene

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = D(u)(u_\xi - \varphi_\xi) + \left(\frac{D(u) - D(\varphi)}{u - \varphi} \varphi_\xi - \frac{K(u) - K(\varphi)}{u - \varphi} + c \right) (u - \varphi).$$

Usando (3.36) tenemos finalmente

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = D(u) \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{D(u) - D(\varphi)}{u - \varphi} \varphi_\xi - \frac{K(u) - K(\varphi)}{u - \varphi} + c \right) \frac{\partial W_2}{\partial \xi}.$$

Como D y K tienen derivada acotada vemos que W_2 es solución de una ecuación diferencial parcial lineal parabólica con coeficientes acotados. Además

$$W_2(\xi, 0) = \int_\xi^\infty (\varphi(s - \gamma) - u_0(s)) ds + \frac{\epsilon}{2}.$$

Nótese que $\varphi(s - \gamma) \rightarrow \varphi_a$ cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Como $\varphi_a > \varphi_b$ y dado que $u_0(s) \rightarrow \varphi_b$ cuando $s \rightarrow \infty$ se sigue que podemos escoger γ suficientemente grande de forma que $W_2(\xi, 0) \geq 0$ para todo $\xi \geq 0$. En la frontera $\xi = -ct$ tenemos

$$\frac{dW_2(-ct, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-ct}^\infty (\varphi(s - \gamma) - u(s, t)) ds$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-ct}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds - c(u(-ct, t) - \varphi(-ct - \gamma)) \\
&= - \int_{-ct}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} [D(u)u_{\xi} - K(u) + cu] ds + c\varphi(-ct - \gamma) - cu(-ct, t) \\
&= - [D(u)u_{\xi} - K(u) + cu]_{-ct}^{\infty} + c\varphi(-ct - \gamma) - cu(-ct, t) \\
&= K(\varphi_b) - f(t) + c(\varphi(-ct - \gamma) - \varphi_b).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
W_2(-ct, t) &= W_2(0, 0) + \int_0^t [K(\varphi_b) - f(\tau) + c(\varphi(-c\tau - \gamma) - \varphi_b)] d\tau \\
&= W_2(0, 0) + \int_0^t [K(\varphi_a) - f(\tau)] d\tau \\
&\quad + \int_0^t [K(\varphi_b) - K(\varphi_a) + c(\varphi(-c\tau - \gamma) - \varphi_b)] d\tau \\
&= W_2(0, 0) + \int_0^t [K(\varphi_a) - f(\tau)] d\tau \\
&\quad + (K(\varphi_b) - K(\varphi_a)) \int_0^t \left(\frac{\varphi_a - \varphi(-c\tau - \gamma)}{\varphi_a - \varphi_b} \right) d\tau \\
&= W_2(0, 0) + \int_0^t [K(\varphi_a) - f(\tau)] d\tau \\
&\quad - c \int_0^t (\varphi_a - \varphi(-c\tau - \gamma)) d\tau \tag{3.39}
\end{aligned}$$

La primera intergral del lado derecho de (3.39) es acotada por (3.26). La segunda intergral es uniformemente acotada en t y exponencialmente pequeña en γ ya que $\varphi(-c\tau - \gamma)$ converge exponencialmente a φ_a cuando $\tau \rightarrow \infty$.

Dado que

$$W_2(0, 0) = \int_0^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - u_0(s)) ds + \frac{\epsilon}{2}$$

se sigue que podemos escoger γ suficientemente grande de manera que $W_2(-ct, t) \geq 0$ para toda $t \geq 0$.

Entonces podemos aplicar el principio del máximo y obtener que $W_2(\xi, t) \geq 0$ para todo $(\xi, t) \in \Omega$. Es decir

$$W(\xi, t) \leq \int_{\xi}^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds + \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $(\xi, t) \in \Omega$. Por lo tanto

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi, t) = 0$$

uniformemente para $t \geq 0$.

El lema está probado.

Lema 3 [11] Dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\left| \int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds \right| < \epsilon$$

para $\xi \leq -N$ y $t \geq \frac{N}{c}$.

Demostración: Sea

$$W(\xi, t) = \int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds + \int_{t_0}^t (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau.$$

Entonces

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \varphi_a - u(\xi, t), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t).$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= - \int_{-ct}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial t} ds - c(u(-ct, t) - \varphi_a) + f(t) - K(\varphi_a) \\ &= - \left[D(u)u_{\xi} - K(u) + cu|_{-ct}^{\xi} \right] + c\varphi_a - cu(-ct, t) + f(t) - K(\varphi_a) \\ &= D(u)(-u_{\xi}) + c(\varphi_a - u) + K(u) - K(\varphi_a) \\ &= D(u) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial W}{\partial \xi} + K(u) - K(\varphi_a). \end{aligned}$$

Sean ahora

$$W_1(\xi, t) = W(\xi, t) + \frac{\epsilon}{2} + Me^{\beta\xi}$$

y

$$L = D(u) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Entonces

$$LW_1 = K(\varphi_a) - K(u) + (\beta^2 D(u) + c\beta) M e^{\beta \xi}. \quad (3.40)$$

Además

$$W_1(\xi, 0) = \int_0^\xi (\varphi_a - u_0(s)) ds + \int_{t_0}^0 (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} + M e^{\beta \xi}$$

y entonces $W_1(\xi, 0) \geq 0$ si M es suficientemente grande, pues $\varphi_a > \varphi_b$ y por lo tanto $u_0(\xi) < \varphi_a$ si ξ es suficientemente grande.

También escogemos t_0 suficientemente grande tal que

$$\left| \int_{t_0}^t (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

si $t > t_0$. De este modo

$$W_1(-ct, t) = \int_{t_0}^t (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} + M e^{-\beta ct} \geq 0$$

para $t \geq 0$ si M es suficientemente grande.

Por otro lado como $K''(u) > 0$ podemos escoger β tal que

$$0 < \beta < \frac{K'(\varphi_a) - c}{\sup_{(\xi, t) \in \Omega} D(u(\xi, t))}. \quad (3.41)$$

Afirmamos que con estas elecciones de β y M , $W_1(\xi, t) \geq 0$ para $(\xi, t) \in \Omega$. Supongamos lo contrario. Entonces W_1 toma valores negativos en algún conjunto compacto de la forma $\Omega_T = \{(\xi, t) : 0 \leq t \leq T, -ct \leq \xi \leq \xi_0\}$. Dado que $u(\xi, t)$ es acotada se sigue que $W(\xi, t)$ tiende a infinito a lo más linealmente en ξ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Entonces podemos suponer que ξ_0 es tal que

$$W_1(\xi_0, t) \geq 0.$$

Sabemos que W_1 alcanza un mínimo negativo en $(\xi_1, t_1) \in \Omega_T$. Por lo visto anteriormente (ξ_1, t_1) debe estar en la frontera superior $t = T$ o ser un punto interior de Ω_T . Veremos que esto tampoco es posible.

Si (ξ_1, t_1) es un punto interior de Ω_T entonces debe tenerse $LW_1(\xi_1, t_1) \geq 0$. Entonces por (3.40) tenemos

$$K(\varphi_a) - K(u) + (\beta D(u) + c)\beta M e^{\beta \xi} \geq 0$$

en (ξ_1, t_1) . Por otro lado, como $K''(u) > 0$, se cumple que

$$K(\varphi_a) - K(u) \leq K'(\varphi_a)(\varphi_a - u)$$

y por lo tanto

$$K'(\varphi_a)(\varphi_a - u(\xi_1, t_1)) + (\beta D(u(\xi_1, t_1)) + c)\beta M e^{\beta \xi_1} \geq 0. \quad (3.42)$$

Además como $-ct < \xi_1 < \xi_0$ debe tenerse

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\xi_1, t_1) = \varphi_a - u(\xi_1, t_1) + \beta M e^{\beta \xi_1} = 0,$$

es decir

$$\varphi_a - u(\xi_1, t_1) = -\beta M e^{\beta \xi_1}.$$

Sustituyendo en (3.42) tenemos

$$(\beta D(u(\xi_1, t_1)) + c - K'(\varphi_a))\beta M e^{\beta \xi_1} \geq 0$$

lo que implica

$$\beta D(u(\xi_1, t_1)) + c - K'(\varphi_a) \geq 0$$

o

$$\beta \geq \frac{K'(\varphi_a) - c}{D(u(\xi_1, t_1))} \geq \frac{K'(\varphi_a) - c}{\sup_{(\xi, t) \in \Omega} D(u(\xi, t))}$$

que contradice (3.41). Entonces (ξ_1, t_1) no puede ser un punto interior. Si el mínimo fuera (ξ_1, T) tendríamos que

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(\xi_1, T) \geq 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\xi_1, T) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial W_1}{\partial t}(\xi_1, T) \leq 0,$$

lo que implica $LW_1(\xi_1, T) \geq 0$ y llegamos a la misma contradicción. Entonces concluimos que $W_1(\xi, t) \geq 0$ para $(\xi, t) \in \Omega$, es decir

$$\int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds \geq \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau - \frac{\epsilon}{2} - Me^{\beta \xi}.$$

Escogemos $N > 0$ tal que $-Me^{\beta \xi} \geq -\frac{\epsilon}{4}$ para $\xi \leq -N$ y tal que $\frac{N}{c} \geq t_0$. Entonces

$$\int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds \geq -\epsilon$$

para $\xi \leq -N$ y $t \geq \frac{N}{c}$.

Para encontrar una cota superior de

$$\int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds$$

consideramos

$$\begin{aligned} W_2(\xi, t) &= \int_{-ct}^{\xi} (u(s, t) - \varphi(s + \gamma)) ds + \int_{-\infty}^{-ct} (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi} = u(\xi, t) - \varphi(\xi + \gamma), \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} = u_{\xi}(\xi, t) - \varphi_{\xi}(\xi + \gamma), \quad (3.43)$$

y usando la ecuación para u , (3.20), puede verse que

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = D(u)u_\xi - K(u) + cu - c\varphi_a + K(\varphi_a). \quad (3.44)$$

Por otro lado $\varphi(\xi + \gamma)$ satisface

$$0 = \frac{d}{d\xi} (D(\varphi)\varphi_\xi - K(\varphi) + c\varphi)$$

Integrando respecto a ξ y tomando $\xi \rightarrow -\infty$ se obtiene

$$-K(\varphi_a) + c\varphi_a - D(\varphi)\varphi_\xi + K(\varphi) - c\varphi = 0.$$

Sumando esta última ecuación a (3.44) nos da

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = D(u)u_\xi - D(u)\varphi_\xi + D(u)\varphi_\xi - D(\varphi)\varphi_\xi - (K(u) - K(\varphi)) + c(u - \varphi)$$

que usando (3.43) podemos escribir como

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = D(u)\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{D(u) - D(\varphi)}{u - \varphi}\varphi_\xi - \frac{K(u) - K(\varphi)}{u - \varphi} + c \right) \frac{\partial W_2}{\partial \xi}$$

Como D y K tienen derivada acotada vemos que $W_2(\xi, t)$ es solución de una ecuación diferencial parcial lineal parabólica con coeficientes acotados.

Además

$$\begin{aligned} W_2(\xi, 0) &= \int_0^\xi (u_0(s) - \varphi(s + \gamma))ds + \int_{-\infty}^0 (\varphi_a - \varphi(s + \gamma))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^0 (K(\varphi_a) - f(\tau))d\tau + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \int_0^\xi (u_0(s) - \varphi_b)ds + \int_0^\xi (\varphi_b - \varphi(s + \gamma))ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 (\varphi_a - \varphi(s + \gamma))ds + \int_{t_0}^0 (K(\varphi_a) - f(\tau))d\tau + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^\xi (u_0(s) - \varphi_b) ds + \int_0^\infty (\varphi_b - \varphi(s + \gamma)) ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds + \int_{t_0}^0 (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} \quad (3.45)
\end{aligned}$$

La primera integral del lado derecho de (3.45) es una función acotada de ξ por la hipótesis (3.25). Nótese que $\varphi(s + \gamma) \rightarrow \varphi_b$ exponencialmente cuando $\gamma \rightarrow \infty$, entonces la segunda integral es exponencialmente pequeña en γ cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Además como $\varphi_a > \varphi_b$ se sigue que la tercera integral tiende a ∞ cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Por último, por (3.26) vemos que la última integral está acotada por una constante que no depende de t_0 . Por lo tanto existe γ_0 tal que si $\gamma > \gamma_0$ entonces

$$W_2(\xi, 0) \geq 0.$$

En la otra frontera, $\xi = -ct$, tenemos

$$W_2(-ct, t) = \int_{-\infty}^{-ct} (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds + \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.46)$$

Escogemos t_0 suficientemente grande tal que

$$\left| \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

si $t \geq t_0$. Entonces para $t \geq t_0$, $W_2(-ct, t) \geq 0$. Observemos ahora que cuando $\gamma \rightarrow \infty$ la primera integral del lado derecho de (3.46) también tiende a ∞ uniformemente para $0 \leq t \leq t_0$. Por lo tanto existe γ suficientemente grande tal que $W_2(-ct, t) \geq 0$ para toda $t \geq 0$.

Finalmente por el principio del máximo tenemos

$$\begin{aligned}
W_2(\xi, t) &= \int_{-ct}^\xi (u(s, t) - \varphi(s + \gamma)) ds + \int_{-\infty}^{-ct} (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \int_{-ct}^\xi (u(s, t) - \varphi_a) ds + \int_{-\infty}^\xi (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds &\leq \int_{-\infty}^{\xi} (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (K(\varphi_a) - f(\tau)) d\tau + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Existe $N > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{N}{c} \geq t_0$ y

$$\int_{-\infty}^{\xi} (\varphi_a - \varphi(s + \gamma)) ds \leq \frac{\epsilon}{4}$$

si $\xi \leq -N$.

Por lo tanto

$$\int_{-ct}^{\xi} (\varphi_a - u(s, t)) ds \leq \epsilon$$

para $\xi \leq -N$ y $t \geq \frac{N}{c}$.

El lema está probado.

3.2.2 Comportamiento de las soluciones para tiempos largos

A continuación elegiremos un valor de γ adecuado para hacer de $\varphi(\xi - \gamma)$ un candidato para describir el comportamiento de $u(\xi, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este valor de γ dependerá de u_0 y de $f(t)$ a través de φ_a y φ_b .

Definimos

$$M(t) = \int_{-ct}^0 (u(s, t) - \varphi_a) ds + \int_0^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{-ct}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds - c(\varphi_a - u(-ct, t)) \\ &= (D(u)u_{\xi} - K(u) + cu|_{-ct}^{\infty}) + cu(-ct, t) - c\varphi_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(t) - K(\varphi_b) + c(\varphi_b - \varphi_a) \\
&= f(t) - K(\varphi_a)
\end{aligned}$$

Entonces

$$M(t) = M(0) + \int_0^t (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau.$$

Por la condición (3.26) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \int_0^\infty (u_0(x) - \varphi_b) dx + \int_0^\infty (f(\tau) - K(\varphi_a)) d\tau = M_\infty < \infty.$$

Escogemos γ tal que

$$\int_{-\infty}^0 (\varphi(s - \gamma) - \varphi_a) ds + \int_0^\infty (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds = M_\infty. \quad (3.47)$$

Para ver que dicho valor de γ existe notemos que la cantidad de la izquierda en (3.47) varía continuamente respecto de γ , tiende a $-\infty$ cuando $\gamma \rightarrow -\infty$ y tiende a ∞ cuando $\gamma \rightarrow \infty$, y por lo tanto toma todos los valores entre $-\infty$ e ∞ . De hecho esta cantidad es creciente respecto de γ , su derivada es

$$-\int_{-\infty}^\infty \varphi'(s - \gamma) ds = \varphi_a - \varphi_b > 0$$

por lo que el valor de γ que satisface (3.47) es único.

Con esta elección de γ probaremos lo siguiente

Teorema 1 [11]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_x^\infty (u(s, t) - \varphi(s - ct - \gamma)) ds = 0$$

para toda $x \geq 0$.

Para la demostración del resultado necesitamos un lema más de ecuaciones parabólicas.

Lema 4 Suponga que $u(x, t)$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t &= a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x & \text{en} & \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(x_1, t) = f_1(t), \quad u(x_2, t) = f_2(t), \end{aligned}$$

donde $a(x, t) > 0$ y $|f_j(t)| < \epsilon$, $j = 1, 2$. Entonces existe $T > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [x_1, x_2]$, $t \geq T$.

Demostración: Sea $\lambda > 0$ y sea $v(x, t) = e^{\lambda t}u(x, t)$. Entonces $v(x, t)$ satisface

$$\begin{aligned} v_t &= a(x, t)v_{xx} + b(x, t)v_x - \lambda v & \text{en} & \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0 \\ v(x, 0) &= u_0(x), \quad u(x_1, t) = e^{\lambda t}f_1(t), \quad u(x_2, t) = e^{\lambda t}f_2(t), \end{aligned}$$

Es claro que v no puede alcanzar un máximo positivo o un mínimo negativo en el interior, por lo tanto los alcanza en la frontera, así que si T es tal que $|u_0(x)| \leq \epsilon e^{\lambda T}$, entonces $|v(x, t)| \leq \epsilon e^{\lambda T}$, para $0 \leq t \leq T$. En particular $|u(x, T)| = e^{-\lambda T}|v(x, T)| \leq \epsilon$ y si ahora aplicamos el principio del máximo en $t \geq T$ obtenemos que $|u(x, t)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [x_1, x_2]$, $t \geq T$.

El lema está probado.

Ahora sí damos la demostración del teorema 1:

Demostración: Trabajaremos en términos de la variable móvil $\xi = x - ct$ como en los lemas anteriores.

Definimos

$$Z(\xi, t) = \int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi(s - \gamma)) ds$$

Notemos que $Z(\xi, t) = -W_2(\xi, t) + \frac{\epsilon}{2}$ con $W_2(\xi, t)$ definida como en el lema 2. De modo que $Z(\xi, t)$ también satisface

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = D(u) \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \left(\frac{D(u) - D(\varphi)}{u - \varphi} \varphi_{\xi} - \frac{K(u) - K(\varphi)}{u - \varphi} + c \right) \frac{\partial Z}{\partial \xi}.$$

Además podemos escribir

$$\begin{aligned} Z(\xi, t) &= \int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi(s - \gamma)) ds \\ &= \int_{\xi}^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds + \int_{\xi}^{\infty} (\varphi_b - \varphi(s - \gamma)) ds \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por el lema 2 y como $\varphi(s - \gamma)$ converge exponencialmente a φ_b cuando $s \rightarrow \infty$ sabemos que existe N_1 tal que

$$|Z(\xi, t)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad \xi \geq N_1 \quad \text{y} \quad t \geq 0.$$

Para ver cual es el comportamiento de $Z(\xi, t)$ cerca de la frontera $\xi = -ct$ escribimos

$$\begin{aligned} Z(\xi, t) &= \int_0^{\infty} (u(s, t) - \varphi(s - \gamma)) ds + \int_{\xi}^0 (u(s, t) - \varphi(s - \gamma)) ds \\ &= \int_0^{\infty} (u(s, t) - \varphi_b) ds - \int_0^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds \\ &\quad + \int_{\xi}^0 (u(s, t) - \varphi_a) ds - \int_{\xi}^0 (\varphi(s - \gamma) - \varphi_a) ds \\ &= M(t) - \left(\int_0^{\infty} (\varphi(s - \gamma) - \varphi_b) ds + \int_{\xi}^0 (\varphi(s - \gamma) - \varphi_a) ds \right) \\ &\quad - \int_{-ct}^{\xi} (u(s, t) - \varphi_a) ds \end{aligned}$$

Por el lema 3 y nuestra elección de γ que satisface (3.47), existe $N_2 > 0$ tal que

$$|Z(\xi, t)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad -ct \leq \xi \leq -N_2 \quad \text{y} \quad t \geq \frac{N_2}{c}.$$

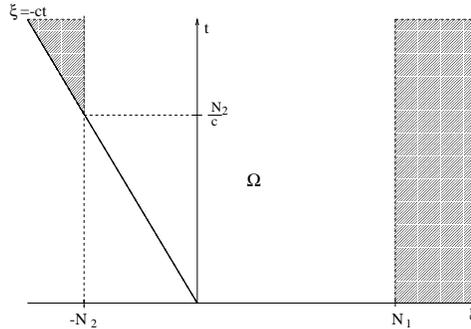


Figura 1. Región de Ω para la cual $|Z(\xi, t)| < \epsilon$ como consecuencia de los lemas 2 y 3.

La región sombreada de la figura 1 es la porción de Ω para la cual sabemos que $|Z(\xi, t)| \leq \epsilon$.

Para la región acotada $-N_2 \leq \xi \leq N_1$ aplicamos el resultado probado en el lema 4 para mostrar que existe $T \geq 0$ tal que $|Z(\xi, t)| \leq \epsilon$ para $t \geq T$, $-N_2 \leq \xi \leq N_1$. Juntando resultados tenemos que existe $T_1 \geq 0$ tal que $|Z(\xi, t)| \leq \epsilon$ para $t \geq T_1$, $\xi \geq -ct$. Por lo tanto

$$|Z(x - ct, t)| \leq \epsilon \quad \text{para} \quad x \geq 0, \quad t \geq T_1.$$

El teorema está probado.

Para analizar el comportamiento de $|u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)|$ cuando $t \rightarrow \infty$ necesitamos un lema de interpolación.

Lema 5 [11] Sea $F \in C^2[0, L]$, $F(0) = B$ y $|F''(x)| \leq M > 0$. Entonces

$$|F'(0)| \leq \sqrt{2M \sup_{x \in [0, L]} |F(x) - B|}$$

si

$$L \geq \sqrt{\frac{2 \sup_{x \in [0, L]} |F(x) - B|}{M}}$$

Demostración: Sea $x \in [0, L]$, por la fórmula de Taylor tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\theta)}{2}x^2 \\ &= B + F'(0)x + \frac{F''(\theta)}{2}x^2 \end{aligned}$$

para algún $\theta \in [0, L]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, L]} |F(x) - B| &\geq |F(x) - B| = |F'(0)x + \frac{F''(\theta)}{2}x^2| \\ &\geq |F'(0)|x - \frac{M}{2}x^2 \end{aligned}$$

o

$$\frac{M}{2}x^2 - |F'(0)|x + m \geq 0 \quad \text{para toda } x \in [0, L] \quad (3.48)$$

donde $m = \sup_{x \in [0, L]} |F(x) - B|$.

Sea

$$G(x) = \frac{M}{2}x^2 - |F'(0)|x + m$$

definida para toda $x \in R$. Afirmamos que $G(x) \geq 0$ para todo $x \in R$. Supongamos lo contrario, existen entonces $x_1, x_2, x_1 < x_2$, tales que $G(x_1) = G(x_2) = 0$. Debe cumplirse entonces

$$x_1 + x_2 = \frac{2|F'(0)|}{M} > 0 \quad \text{y} \quad x_1x_2 = \frac{2m}{M} \leq L^2$$

Estas desigualdades nos dicen que x_1 y x_2 son positivos y que no es posible que ambos sean mayores o iguales que L . Entonces $x_1 \leq L$. Pero $G(x) > 0$ en $[0, L]$ lo que implica que $x_1 \geq L$ y $x_2 \geq L$. Ésta contradicción establece que $G(x) \geq 0$ para toda x y entonces

$$|F'(0)|^2 - 2mM \leq 0$$

o

$$|F'(0)| \leq \sqrt{2M \sup_{x \in [0, L]} |F(x) - B|}$$

El lema está probado.

Teorema 2 [11]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)| = 0$$

uniformemente para toda $x \geq 0$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1 podemos escoger $T > 0$ suficientemente grande tal que

$$\left| \int_x^\infty (u(s, t) - \varphi(s - ct - \gamma)) ds \right| < \epsilon$$

si $t \geq T$ y $x \geq 0$.

Sabemos además que existe M suficientemente grande tal que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)) \right| \leq M$$

Sea $x_0 \geq 0$. Definimos

$$F(x; t) = \int_{x+x_0}^\infty (\varphi(s - ct - \gamma) - u(s, t)) ds.$$

Entonces $|F(x; t)| \leq \epsilon$ para $x \geq 0$, $t \geq T$. Además

$$F'(x; t) = u(x + x_0, t) - \varphi(x + x_0 - ct - \gamma)$$

$$F''(x; t) = \frac{\partial}{\partial x} [u(x + x_0, t) - \varphi(x + x_0 - ct - \gamma)],$$

entonces $|F''(x; t)| \leq M$ para $x \geq 0$. Aplicando el lema 5 a F nos da

$$|u(x_0, t) - \varphi(x_0 - ct - \gamma)| \leq \sqrt{2M(2\epsilon)}$$

para $x_0 \geq 0$, $t \geq T$, lo que prueba que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - \varphi(x - ct - \gamma)| = 0$$

uniformemente para $x \geq 0$.

El teorema está probado.

Capítulo 4

Discusión del caso no homogéneo

En los capítulos anteriores se estudió la ecuación de Richards para un suelo homogéneo.

Los experimentos y el uso práctico de los suelos muestran que los suelos en general son muy heterogéneos y que la variabilidad espacial de los suelos tiene un efecto importante en los modelos de filtración.

Resulta interesante entonces tratar de incorporar la dependencia espacial en los modelos de filtración. Como una primera aproximación a este problema supondremos que el suelo está formado por capas periódicas. Igual que en el caso homogéneo, buscaremos soluciones en forma de onda viajera para describir los frentes húmedos.

La ecuación de Richards para un suelo no homogéneo está dada por (1.20):

$$u_t = [D(u, x)u_x - K(u, x)]_x \quad (4.1)$$

En este capítulo discutimos las dificultades que surgen al incorporar la dependencia en x en las funciones hidráulicas D y K .

Si existiera una onda viajera esta sería una conexión entre dos estados estacionarios. Siguiendo la idea de los capítulos anteriores buscaremos soluciones estacionarias que satisfagan una condición de flujo constante. De este modo pediremos que la onda viajera satisfaga las condiciones de flujo constante en la frontera

$$\begin{aligned} -D(u, x)u_x + K(u, x)|_{x=0} &= \bar{c}_l, \\ -D(u, x)u_x + K(u, x)|_{x=\infty} &= \bar{c}_r. \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\bar{c}_l > \bar{c}_r > 0$.

Haremos las siguientes suposiciones sobre las funciones hidráulicas $D(u, x)$ y $K(u, x)$:

$$D(u, x) = D(u)a(x), \quad (A1)$$

$$K(u, x) = K(u)b(x), \quad (A2)$$

$$D(u) = K'(u), \quad (A3)$$

$$K(u), K'(u), K''(u) > 0, \quad (A4)$$

$$D(u), D'(u) > 0, \quad (A5)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones uno-periódicas y positivas.

A pesar de que la suposición de que el suelo es periódico no es aplicable a todos los suelos, es útil al modelar algunos experimentos en el laboratorio.

En la siguiente sección probaremos la existencia de soluciones estacionarias uno-periódicas de (4.1).

4.1 Soluciones estacionarias

Consideramos la ecuación de Richards dada por (4.1):

$$u_t = [D(u, x)u_x - K(u, x)]_x,$$

En vista de las condiciones (4.2) vemos que hay dos soluciones estacionarias de (4.1) que deben ser consideradas, una correspondiente a la frontera superior $x = 0$, $u_l(x)$; la otra correspondiente a la otra frontera $x = \infty$, $u_r(x)$. Así $u_l(x)$ y $u_r(x)$ son tales que:

$$\begin{aligned} D(u_l, x)(u_l)_x - K(u_l, x) &= -\bar{c}_l, \\ D(u_r, x)(u_r)_x - K(u_r, x) &= -\bar{c}_r. \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde \bar{c}_l y \bar{c}_r son los flujos prescritos en la frontera según las condiciones dadas en (4.2).

A continuación probaremos la existencia y unicidad de estas soluciones estacionarias.

Comenzamos con la ecuación de Richards (4.1) tomando $u_t = 0$:

$$(D(u, x)u_x - K(u, x))_x = 0. \quad (4.4)$$

Usando (A1)-(A5) la ecuación se convierte en:

$$(K'(u)a(x)u_x - K(u)b(x))_x = 0. \quad (4.5)$$

Dado que K es creciente podemos hacer el cambio de variable $v(x) = K(u(x))$ y obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden para v :

$$(a(x)v'(x) - b(x)v(x))_x = 0. \quad (4.6)$$

Integrando tenemos:

$$a(x)v'(x) - b(x)v(x) = \bar{m}. \quad (4.7)$$

Dividiendo entre $a(x)$

$$v' - \frac{b(x)}{a(x)}v = \frac{\bar{m}}{a(x)}. \quad (4.8)$$

Usando un factor integrante

$$P(x) = \int_0^x \frac{b(x)}{a(x)} dx \quad (4.9)$$

para $x \in [0, 1]$, tenemos

$$(e^{-P(x)}v)' = \bar{m} \frac{e^{-P(x)}}{a(x)}. \quad (4.10)$$

Integrando en ambos lados y despejando $v(x)$ se obtiene:

$$v(x) = \bar{m}e^{P(x)} \left[\int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 \right], \quad (4.11)$$

donde T_0 es una constante. A continuación elegiremos T_0 de manera que $v(x)$ sea uno-periódica. Dado que $a(x)$ y $b(x)$ son funciones uno-periódicas se cumple que

$$P(x+1) = P(x) + P(1), \quad P(x-1) = P(x) - P(1), \quad (4.12)$$

por lo que, de igualar $v(x) = v(x+1)$, resulta

$$\int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 = e^{P(1)} \left(\int_0^{x+1} \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 \right). \quad (4.13)$$

En la integral del lado izquierdo hacemos el cambio de variable $s = t - 1$ y usamos (4.12) para obtener

$$e^{P(1)} \int_1^{x+1} \frac{e^{-P(t)}}{a(t)} dt + T_0 = e^{P(1)} \left(\int_0^{x+1} \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 \right), \quad (4.14)$$

de donde vemos que T_0 tiene la solución única

$$T_0 = \frac{e^{P(1)}}{1 - e^{P(1)}} \int_0^1 \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds. \quad (4.15)$$

De la unicidad de T_0 se concluye que el espacio de soluciones uno-periódicas de (4.5) tiene dimensión 1 y que estas soluciones son de la forma

$$v(x) = \bar{m}T(x) \quad (4.16)$$

donde

$$T(x) = e^{P(x)} \left[\int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 \right]. \quad (4.17)$$

Obsérvese que $e^{P(x)} > 0$ y que

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + T_0 \\ &= \int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + \frac{e^{P(1)}}{1 - e^{P(1)}} \int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + \frac{e^{P(1)}}{1 - e^{P(1)}} \int_x^1 \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds \\ &= \frac{1}{1 - e^{P(1)}} \int_0^x \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds + \frac{e^{P(1)}}{1 - e^{P(1)}} \int_x^1 \frac{e^{-P(s)}}{a(s)} ds < 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

por lo cual $T(x) < 0$. Entonces las soluciones positivas y uno-periódicas de (4.5) están dadas por (4.16) con $\bar{m} < 0$. En particular las soluciones estacionarias $u_l(x)$ y $u_r(x)$ definidas según (4.3) están determinadas por la relación:

$$\begin{aligned} K(u_l(x)) &= v_l(x) = -\bar{c}_l T(x), \\ K(u_r(x)) &= v_r(x) = -\bar{c}_r T(x). \end{aligned} \quad (4.19)$$

De donde concluimos que $u_l(x) > u_r(x) > 0$ si $\bar{c}_l > \bar{c}_r > 0$.

Dado que u representa el contenido de agua nos gustaría ver que estas soluciones satisfacen además que $0 < u_r(x) < u_l(x) < 1$. A continuación probaremos que la solución estacionaria dada por (4.16) satisface

$$0 < v(x) \leq K(1) \quad \text{si} \quad 0 < -\bar{m} < K(1) \inf_{x \geq 0} b(x).$$

Supongamos que $v(x) > K(1)$ para algún valor de x . Como v es periódica debe alcanzar un máximo local mayor que $K(1)$. Supongamos que dicho máximo se alcanza en $x = x_1$. Entonces

$$v'(x_1) = 0 \quad v(x_1) > K(1).$$

entonces por (4.7) tenemos

$$-\bar{m} = v(x_1)b(x_1) > K(1)b(x_1) \geq K(1) \inf_{x \geq 0} b(x).$$

Esta contradicción establece que $0 < v(x) \leq K(1)$.

Hemos probado entonces que si \bar{c}_l y \bar{c}_r son tales que $0 < \bar{c}_r < \bar{c}_l < K(1) \inf_{x \geq 0} b(x)$ entonces existen dos soluciones estacionarias uno-periódicas de (4.1) que satisfacen $0 < u_r(x) < u_l(x) < 1$. Además estas soluciones son únicas.

4.2 Existencia de ondas viajeras

El problema de la existencia de una solución en forma de onda viajera de (4.1) que conecte a los estos estados estacionarios, u_l y u_r discutidos en la sección anterior es un problema difícil e interesante. En [5] se afirma la existencia de este tipo de soluciones para una velocidad constante c .

A continuación haremos desarrollos asintóticos que sugieren que la onda viajera, de existir, tendrá una velocidad que dependerá de las inhomogeneidades del medio.

El problema análogo al estudiado en los primeros tres capítulos es el siguiente:

$$u_t = [D(u, x)u_x - K(u, x)]_x \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (4.20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \geq 0, \quad (4.21)$$

$$-D(u, x)u_x + K(u, x)|_{x=0} = f(t) \quad t \geq 0. \quad (4.22)$$

Usando (A1)-(A5) tenemos

$$u_t = (K'(u)a(x)u_x - K(u)b(x))_x \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (4.23)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \geq 0, \quad (4.24)$$

$$-K'(u)a(x)u_x + K(u)b(x)|_{x=0} = f(t) \quad t \geq 0. \quad (4.25)$$

Como en la sección anterior trabajaremos con la formulación para $v = K(u)$. De este modo tenemos que

$$\begin{aligned} v_t &= M(v)(a(x)v_x - b(x)v)_x \\ &= M(v)a(x)v_{xx} - M(v)(b(x) - a'(x))v_x - M(v)b'(x)v \end{aligned} \quad (4.26)$$

para $x \geq 0$, $t \geq 0$, donde $M(v) = K'(K^{-1}(v))$.

Las condiciones (4.24) y (4.25) quedan

$$v(x, 0) = v_0(x) \equiv K(u_0(x)) \quad \text{para } x \geq 0, \quad (4.27)$$

$$-a(0)v_x(0, t) + b(0)v(0, t) = f(t) \quad \text{para } t \geq 0. \quad (4.28)$$

Trabajaremos con el caso particular

$$a(x) = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) \quad (4.29)$$

$$b(x) = 1 - \frac{3\epsilon}{4} \cos x. \quad (4.30)$$

La ecuación (4.26) queda

$$v_t = \epsilon \frac{M(v)}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) v_{xx} - M(v)(1 - \epsilon \cos x) v_x - M(v) \left(\frac{3\epsilon}{4} \sin x\right) v. \quad (4.31)$$

Supongamos que $\epsilon \ll 1$ y que $M(v)$ es de orden 1. Dado que las soluciones de interés son aquellas para las cuales v permanece acotada, el último término de la ecuación siempre es pequeño y lo despreciaremos. El término difusivo será despreciable únicamente si v_{xx} no crece demasiado. Por lo tanto en las regiones para las cuales v_{xx} es de orden 1, la parte hiperbólica domina y podemos escribir

$$v_t = -M(v)(1 - \epsilon \cos x) v_x. \quad (4.32)$$

Estudiaremos con cuidado esta ecuación. Por simplicidad supondremos que $v_0(x) \equiv \text{cte} = v_0$. La condición de frontera (4.28) puede reescribirse. Tenemos que

$$v_x(0, t) = \frac{b(0)v(0, t) - f(t)}{a(0)} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Haciendo uso de esta relación tenemos, por (4.32) que

$$\begin{aligned} v_t(0, t) &= -M(v(0, t))(1 - \epsilon)v_x(0, t) \\ &= (-M(v(0, t))(1 - \epsilon)) \left(\frac{b(0)v(0, t) - f(t)}{a(0)} \right), \end{aligned}$$

lo que implica que podemos conocer $v(0, t) = h(t)$.

Entonces hemos simplificado el problema a

$$v_t = -M(v)(1 - \epsilon \cos x)v_x, \quad (4.33)$$

$$v(x, 0) = v_0, \quad (4.34)$$

$$v(0, t) = h(t). \quad (4.35)$$

Haremos una simplificación más al dar una forma específica para $M(v)$. Supondremos que podemos escribir

$$M(v)(1 - \epsilon \cos x) = 1 + v + \delta \cos x.$$

donde $\delta \ll 1$. Nuestra ecuación queda

$$v_t + (1 + v + \delta \cos x)v_x = 0. \quad (4.36)$$

Para resolver este problema utilizamos el método de las características. Suponemos que la superficie solución se puede parametrizar por (ξ, τ) de modo que

$$x = x(\xi, \tau), \quad t = t(\xi, \tau), \quad v = v(\xi, \tau).$$

Hay dos familias de características que deben ser consideradas, las que cruzan el eje $t = 0$, y las que cruzan el eje $x = 0$.

Encontremos primero la familia que cruza el eje $t = 0$. Tomemos ξ fija, entonces

$$v_\tau = v_t \frac{dt}{d\tau} + v_x \frac{dx}{d\tau}.$$

Por la ecuación (4.36) podemos escribir el sistema de ecuaciones ordinarias para las características:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = 1 + v + \delta \cos x, \quad \frac{dv}{d\tau} = 0.$$

Las condiciones iniciales para este sistema se determinan a partir de (4.34), obteniéndose

$$x(\xi, 0) = \xi, \quad t(\xi, 0) = 0, \quad v(\xi, 0) = v_0.$$

De este modo nuestro sistema queda como

$$\begin{aligned} t &= \tau, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} = 1 + v_0 + \delta \cos x, & x(0) &= \xi, \\ v &= v_0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación es separable de modo que tenemos

$$\int_{\xi}^x \frac{dx/dr}{1 + v_0 + \delta \cos(x(r))} dr = t.$$

Como $\delta \ll 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + v_0 + \delta \cos(x(r))} &= \frac{1}{1 + v_0} \left[\frac{1}{1 + \frac{\delta \cos(x(r))}{1 + v_0}} \right] \\ &= \frac{1}{1 + v_0} \left[1 - \frac{\delta \cos(x(r))}{1 + v_0} + \left(\frac{\delta \cos(x(r))}{1 + v_0} \right)^2 - \dots \right] \end{aligned}$$

Quedándonos únicamente con los primeros términos tenemos

$$\begin{aligned} t &= \int_{\xi}^x \left(\frac{1}{1 + v_0} - \frac{\delta \cos(x(r))}{(1 + v_0)^2} \right) \frac{dx}{dr} dr \\ &= \frac{x - \xi}{1 + v_0} - \frac{\delta}{(1 + v_0)^2} (\sin x - \sin \xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación a primer orden de esta familia de características, está dada, en forma implícita, por

$$x = \xi + (1 + v_0)t + \frac{\delta}{(1 + v_0)} (\sin x - \sin \xi).$$

Vemos entonces que las características tienen velocidad media $1 + v_0$ pero oscilan en el medio periódico. Esto nos dice que el frente *no* se puede mover con velocidad constante.

Finalmente recordemos que a lo largo de estas curvas, v mantiene el valor constante v_0 .

Veamos ahora que pasa con las características que vienen del eje $x = 0$. En este caso para τ fija tenemos que

$$v_\xi = v_t \frac{dt}{d\xi} + v_x \frac{dx}{d\xi}.$$

Usando la ecuación (4.36) podemos escribir el sistema de ecuaciones ordinarias para las características

$$\frac{dx}{d\xi} = 1, \quad \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{1 + v + \delta \cos x}, \quad \frac{dv}{d\xi} = 0.$$

Las condiciones iniciales se determinan a partir de la condición de frontera (4.35) obteniéndose

$$x(0, \tau) = 0, \quad t(0, \tau) = \tau, \quad v(0, \tau) = h(\tau).$$

De este modo tenemos que $x = \xi$, $v = h(\tau)$ y entonces

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1 + h(\tau) + \delta \cos x}.$$

Por lo tanto

$$\int_\tau^t dt = \int_0^x \frac{1}{1 + h(\tau) + \delta \cos x} dx.$$

Pero

$$\frac{1}{1 + h(\tau) + \delta \cos x} = \frac{1}{1 + h(\tau)} \left[1 - \frac{\delta \cos x}{1 + h(\tau)} + \left(\frac{\delta \cos x}{1 + h(\tau)} \right)^2 - \dots \right].$$

Quedándonos con los primeros términos se sigue que

$$t - \tau = \frac{x}{1 + h(\tau)} - \frac{\delta \sin x}{(1 + h(\tau))^2}.$$

Esta última expresión nos da $\tau = \tau(x, t)$ en forma implícita y describe la segunda familia de características, a lo largo de las cuales v tiene el valor constante $v = h(\tau)$.

Este método de las características nos da entonces el valor de la solución a lo largo de ellas. Mientras las 2 familias de características no se crucen tenemos una solución univaluada.

Cuando las características se cruzan la solución se vuelve multivalente. Las de la primera familia (que vienen del eje $t = 0$) transportan el valor $v = v_0$, mientras que las de la segunda familia (que vienen del eje $x = 0$) transportan el valor $v = h(\tau)$. Entonces, debe ajustarse otra solución, en una capa de ancho ϵ , que interpole los 2 valores.

Se supone que la solución es una onda viajera de la ecuación con coeficientes constantes, cuya velocidad se ajusta a los valores izquierdo y derecho que vienen de las características.

Buscamos una solución de la forma

$$v(x, t) = g \left(\frac{x - \zeta(t)}{\epsilon} \right)$$

donde g , ζ , y $\dot{\zeta}$ deben determinarse.

Como en esta región hay un cambio brusco en v , v_x también cambia rápido y entonces el término difusivo de (4.31) ya no es despreciable.

Llamando $s = (x - \zeta(t))/\epsilon$, $' = \frac{d}{ds}$ tenemos que g es solución de (4.31):

$$-\frac{1}{\epsilon} \dot{\zeta} g' = \frac{1}{\epsilon} \frac{M(g)}{2} \left(1 + \frac{\sin(\zeta + \epsilon s)}{2} \right) g'' - \frac{1}{\epsilon} M(g) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \cos(\zeta + \epsilon s) \right) g'$$

A primer orden tenemos

$$-\dot{\zeta} g' = \frac{M(g)}{2} \left(1 + \frac{\sin(\zeta)}{2}\right) g'' - M(g) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \cos(\zeta)\right) g'.$$

Para la velocidad de la onda, $\dot{\zeta}$, tenemos la ecuación (véase [10], pag.12):

$$\dot{\zeta} = \text{velocidad} = \frac{\text{valor del flujo por la izq.} - \text{valor del flujo por la der.}}{v_{\text{izq.}} - v_{\text{der.}}}$$

Esto completa la solución ya que podemos determinar la ecuación diferencial para $\zeta(t)$ que nos da la trayectoria del choque. Para esto usamos la solución de las características.

Tenemos que

$$\dot{\zeta} = \frac{K(h(\tau(\zeta(t), t)), \zeta(t)) - K(v_0, \zeta(t))}{h(\tau(\zeta(t), t)) - v_0}.$$

Donde $K(x, t)$ es la función hidráulica que aparece en (4.1). Usando (A2) y (4.30) tenemos

$$\dot{\zeta} = \left(\frac{K(h(\tau(\zeta(t), t)) - K(v_0, \zeta(t)))}{h(\tau(\zeta(t), t)) - v_0} \right) \left(1 - \frac{3\epsilon}{4} \cos(\zeta(t))\right)$$

La expresión del primer paréntesis es el análogo de la expresión obtenida para la velocidad de la onda viajera para el suelo homogéneo. Si suponemos que h tiene límite esta expresión será constante para tiempos largos. Sin embargo el otro factor es oscilatorio, lo que nos hace suponer que de existir ondas viajeras, éstas siempre tendrán una velocidad dependiente de las inhomogeneidades del medio.

Con esto podemos dar una descripción de la propagación en términos sencillos. Cualquier condición inicial forma un frente que se propaga con velocidad *variable* debido a la periodicidad del medio. También la velocidad es variable debido al transitorio de $f(t)$. Si $f(t)$ se hace eventualmente constante, el frente seguirá teniendo fluctuaciones periódicas en su velocidad por el continuo reajuste al medio.

Bibliografía

- [1] **Bear, J.** *Modeling groundwater flow and pollution*. Reidel Publishing Company, 1990.
- [2] **Bear, J.** *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Publishing Company, Inc. 1972.
- [3] **Bear, J.** *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill, 1979.
- [4] **Coddington & Levinson** *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.
- [5] **Fennemore, G.G.** *Wetting Fronts in One-Dimensional Periodically Layered Soils*. University of Arizona, PhD Thesis, Tucson, AZ, 1995.
- [6] **John F.** *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1978.
- [7] **Halek, V. & Švec, J.** *Groundwater hydraulics* Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1979.
- [8] **Khushnytdinova, N.V.** *The Limiting Moisture Profile During Infiltration in to a Homogeneous Soil*. J. of Applied Math. Mech., 31, pp.770-776, 1967.
- [9] **Ladyzenskaja, O.A.** *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [10] **Madrid, S.A.** *Regularización de ondas de choque por difusión y dispersión* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.
- [11] **Noren, P.** *Asymptotic Behavior of Solutions of a Filtration Equation*. University of Arizona, PhD Thesis, Tucson, AZ, 1976.
- [12] **Protter M. H. & Weinberger H. F.** *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [13] **Whitham, G.B.** *Linear and nonlinear waves*. Pure & Applied Mathematics, Wiley Intersciences, 1973.