

**APUNTES DE ECUACIONES EN  
DERIVADAS PARCIALES**

**Antonmaria Minzoni**

IIMAS - FENOMECS, UNAM

<http://www.fenomec.unam.mx>

Autor:

**Antonmaria Minzoni**

Título:

**Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales**

Editores:

***Comité Editorial FENOMECC***

**Gustavo Cruz**

**Clara Garza**

**Jorge Ize**

**Ma. del Carmen Jorge**

**Arturo Vargas**

Apoyo Editorial:

**Gilberto Flores**

**Clara Garza**

**Ma. del Carmen Jorge**

**Arturo Olvera**

**Ana Pérez**

**Alma Rosa Rodríguez**

Diseño de Portada:

**Ana Pérez**

**Ramiro Chávez**

Primera Edición:

**Diciembre de 2003**

<http://www.fenomec.unam.mx>

# SERIE FENOMECC

Uno de los propósitos del *Proyecto Universitario de Fenómenos Nolineales y Mecánica*, **FENOMECC**, es el fomentar el estudio de los Fenómenos Nolineales que aparecen en distintas disciplinas científicas, al impulsar investigaciones conjuntas de especialistas en estas disciplinas que comparten un lenguaje común.

Con este fin, la **SERIE FENOMECC** publica textos monográficos sobre un amplio espectro de temas nolineales de gran interés en esas disciplinas. Estos textos están orientados tanto a investigadores como a estudiantes que quieran iniciarse en la manera de pensar nolineal.

Algunos de estos textos fueron escritos por visitantes de **FENOMECC** y son el resultado de transcribir, a petición del Comité Editorial, las ponencias realizadas durante su visita.

Todos los textos de esta **SERIE** son cuidadosamente seleccionados por el Comité Editorial y sometidos a un proceso de arbitraje.

La publicación se realiza gracias al apoyo que la Coordinación de la Investigación Científica de la UNAM brinda a **FENOMECC** e, indirectamente, al Proyecto de Grupo G25427-E, Matemáticas Nolineales en la Física y la Ingeniería, del CONACyT.

## COMITÉ EDITORIAL

Dr. Gustavo Cruz

Dra. Clara Garza

Dr. Jorge Ize

Dra. Ma. del Carmen Jorge

Dr. Arturo Vargas

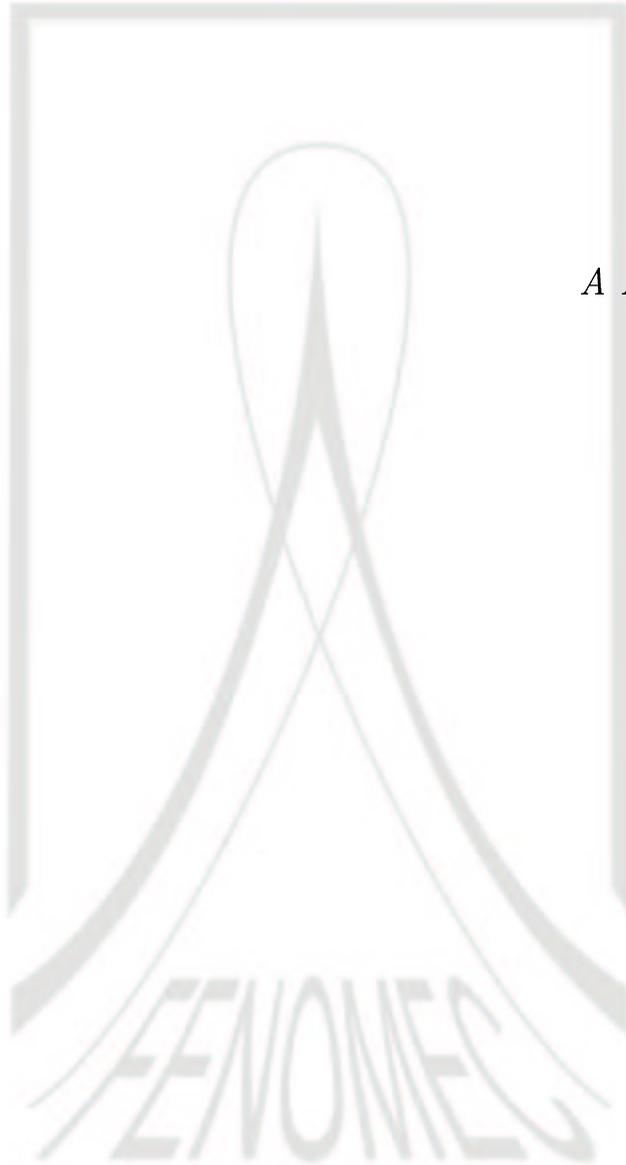
### INFORMES

Alma Rosa Rodríguez

Tel/Fax: 5622 35 64

fenomec@mym.iimas.unam.mx

<http://www.fenomec.unam.mx>



*A Angela, Sofia y Delia*

<http://www.fenomec.unam.mx>

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	VII
<b>Introducción</b>	IX
<b>1. Ecuaciones hiperbólicas</b>	<b>1</b>
1.1. La ecuación lineal de primer orden . . . . .	1
1.2. Geometría de las características . . . . .	7
1.3. Unicidad y discusión de las soluciones de la ecuación de primer orden . . . . .	10
1.4. Ecuación lineal de segundo orden con características . . . . .	12
1.5. Unicidad de las soluciones para la ecuación de onda . . . . .	23
<b>2. Sistemas de ecuaciones con características</b>	<b>29</b>
2.1. El problema de las líneas de transmisión . . . . .	29
2.2. Propagación de ondas en agua . . . . .	33
2.3. Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	38
<b>3. Ecuaciones elípticas</b>	<b>49</b>
3.1. Introducción y algunos problemas típicos . . . . .	49
3.1.1. Ecuación de una membrana elástica en equilibrio . . . . .	49
3.1.2. Ecuaciones elípticas en mecánica de fluidos . . . . .	53
3.2. Soluciones a algunos problemas elípticos . . . . .	55
3.2.1. Problemas de Dirichlet . . . . .	55
3.2.2. La fórmula de Poisson . . . . .	61
3.2.3. Problema de Neumann . . . . .	62
3.2.4. El principio del máximo para la ecuación de Laplace . . . . .	64
3.2.5. Problemas elípticos . . . . .	65
3.2.6. Problema de difracción . . . . .	66
<b>4. Separación de variables para ecuaciones</b>	<b>71</b>
4.1. Separación de variables para la ecuación . . . . .	71
4.2. Separación de variables para un sistema de ecuaciones . . . . .	77

4.3. La transformada de Laplace . . . . .	78
<b>5. Ecuación de onda en tres dimensiones</b>	<b>83</b>
5.1. Propagación de ondas sonoras . . . . .	83
5.2. La fórmula de Poisson y su interpretación . . . . .	86
5.3. Aplicaciones de la fórmula de Poisson . . . . .	87
5.4. El problema con valores iniciales . . . . .	92
<b>6. Ecuación de difusión</b>	<b>99</b>
6.1. Propagación de calor . . . . .	99
6.2. Dispersión de contaminantes . . . . .	100
6.3. El efecto de las fuentes . . . . .	102
<b>Apéndice A</b>	
<b>Transformada de Fourier</b>	<b>111</b>
<b>Apéndice B</b>	
<b>Transformada de Laplace</b>	<b>117</b>
<b>Apéndice C</b>	
<b>Funciones de Green</b>	<b>121</b>
<b>Notas</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>143</b>

# Agradecimientos

Quiero agradecer a Mari Carmen Jorge por la reedición de estas notas y su mejora en muchos aspectos.

Agradezco también a Marco Antonio Iglesias por su reescritura y mejoramiento sustancial de las figuras y de la presentación. Agradezco las múltiples mejoras que Gilberto Flores y Ma. del Carmen Jorge hicieron a esta nueva versión de las notas, al usarlas como material de apoyo en sus cursos de la Facultad de Ciencias.

El Apéndice de Funciones de Green que completa esta presentación fue escrito por Arturo Olvera.

Agradezco a todos mis colegas del Departamento de Matemáticas y Mecánica las numerosas sugerencias que han enriquecido este trabajo. Finalmente a Alma Rodríguez y Ana Pérez mi agradecimiento por los últimos toques a esta edición.

<http://www.fenomec.unam.mx>



<http://www.fenomec.unam.mx>

# Introducción

El propósito de estas notas es el de presentar algunos temas de la teoría clásica elemental de las ecuaciones en derivadas parciales. Sobre este tema hay una gran cantidad de libros que cubren gran parte del material de estas notas; por mencionar algunos tenemos el de Weinberger, John, Petrovski, Copson, donde el lector interesado podrá consultar muchos de los temas tratados en estas notas.

El material aquí tratado difiere del de los textos arriba mencionados, ya que en ellos se tratan, en forma elemental, algunos temas como sistemas hiperbólicos, ecuaciones de Maxwell, fórmulas de Poisson para la ecuación de onda, así como aplicaciones que usualmente se tratan en cursos más avanzados.

En el primer capítulo se discute la ecuación lineal de primer orden, y se resuelve usando el método de las características. Se discute con detalle la geometría de las características y maneras alternativas de operar con ellas; las aplicaciones con el flujo de coches por una carretera. Se omite el problema de ecuaciones no lineales; para estos problemas se proporciona al lector la literatura. Se discute con detalle la ecuación lineal de segundo orden con características (la ecuación de propagación de ondas), y los varios problemas con valores iniciales y de frontera asociados con ella. Se da una interpretación detallada del papel de las características en cada caso. Finalmente se discute la unicidad de las soluciones para la ecuación de onda.

En el segundo capítulo se discuten algunos sistemas hiperbólicos simples, utilizando ejemplos de líneas de transmisión eléctricas y propagación de ondas en agua. Aquí también se discute con cierto detalle el papel de las características. Finalmente se resumen los experimentos que llevaron a las ecuaciones de Maxwell y se discuten éstos con cierto detalle en casos simples. Nuevamente los problemas se resuelven usando el método de las características.

El tercer capítulo trata del tipo opuesto de ecuaciones a las tratadas en los primeros dos. Se trata de ecuaciones de equilibrio que no propagan señales. Se introducen al estudiar las deflexiones de una membrana bajo la acción de su propio peso, así como también a través de problemas de fluidos, y como aproximaciones a las ecuaciones de Maxwell en electrostática. Para su solución se introduce la técnica de separación de

variables y las series de Fourier. Se discuten varios problemas simples de valores en la frontera.

Finalmente se discuten problemas en regiones infinitas; en particular el problema de difracción de una onda periódica por un obstáculo, ilustrando esto la separación de variables en regiones infinitas.

En el capítulo cinco se estudia la ecuación de propagación de ondas en tres dimensiones. Se introduce como una aproximación a las ecuaciones de Navier Stokes (las ecuaciones de la mecánica de fluidos) cuando los movimientos son pequeños, como en el caso de ondas sonoras. Se resuelve la ecuación en términos de una integral usando una combinación de transformadas de Laplace y Fourier. Se obtiene la fórmula de Poisson la cuál se interpreta con detalle y se aplica en varias situaciones de acústica y de sismología. Se estudian varias aproximaciones y se discuten las dificultades geométricas que hay para obtener información a partir de la fórmula de Poisson.

Esta nueva edición se completó añadiendo un capítulo sobre ecuaciones de difusión y convección. Se añadió también una sección escrita por Arturo Olvera sobre Funciones de Green y construcción e interpretación en teoría del potencial.

Estas adiciones permiten usar estas notas en un primer curso de Ecuaciones Parciales. Un libro que continúa con este tipo de material es el libro reciente de Richard Haberman.

Para concluir, reconocemos haber omitido temas de importancia, como la ecuación de propagación del calor; tampoco se desarrolló detalladamente la técnica de separación de variables en problemas más complicados.

Otros temas de gran utilidad como el estudio de soluciones analíticas aproximadas y óptica geométrica, se omitieron completamente. Para éstos el lector podrá consultar la literatura que señalamos aquí.

A lo largo de estas notas se ha tomado el punto de vista de resolver problemas razonando en forma geométrica o por analogía con otros problemas. Las soluciones formales obtenidas así probaron ser soluciones de los problemas cuando se satisfacen condiciones técnicas apropiadas que justificaban el método seguido para obtener la solución formal. Deliberadamente se omiten los detalles técnicos, dando así la flexibilidad de usar los métodos para gran cantidad de problemas, verificando a posteriori la solución obtenida. La finalidad de esta manera de presentar el material es que el lector se familiarice con los problemas más simples de las ecuaciones parciales y con las técnicas para obtener y discutir soluciones.

Gran parte del material de estas notas se obtuvo en los cursos de verano en Morelia, Mich. en 1977 y en Mérida, Yuc., en 1978.

# Capítulo 1

## Ecuaciones hiperbólicas

### 1.1. La ecuación lineal de primer orden

Se empezará esta sección introduciendo la ecuación lineal de primer orden con un ejemplo: el tránsito de coches por una carretera. Se supone para esto una carretera recta a lo largo del eje  $x$  tal como se ve en la figura siguiente:



*Fig. 1.1*

Representemos por  $\rho(x, t)$  la densidad de coches en el punto  $x$  de la carretera al tiempo  $t$ ; el problema es encontrar el comportamiento de  $\rho(x, t)$  (el tráfico en la carretera) a tiempos futuros, si es que se conoce  $\rho(x, 0)$ ; es decir el tráfico inicialmente. Para esto debemos encontrar una ecuación para  $\rho$ . Como esta función depende de dos variables, la ecuación que encontraremos será una ecuación diferencial parcial. La ecuación deseada la encontramos considerando la rapidez de cambio de la cantidad de coches entre  $x_0$  y  $x$ . Esto es:

Rapidez de cambio del número de coches entre  $x_0$  y  $x = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi$ .

Por otra parte sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi &= \text{Número de coches que entran en } x_0 \text{ por unidad de tiempo} \\ &\quad - \text{Número de coches que salen por } x \text{ por unidad de tiempo} \\ &= \text{Flujo de coches que entra} - \text{Flujo de coches que sale.} \end{aligned}$$

Si denotamos el flujo mediante  $Q$ , tendremos que la ecuación de conservación de la cantidad de coches es:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(x_0, t) - Q(x, t). \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) es una ecuación con dos incógnitas  $Q$  y  $\rho$ . Sin embargo es un hecho experimental (lo comprobamos siempre que viajamos con tráfico) que el flujo de coches, en un punto, depende de la densidad  $\rho$  en ese punto. Esta dependencia se encuentra experimentalmente, y una gráfica típica de  $Q(\rho)$  se muestra en la Fig. 1.2.

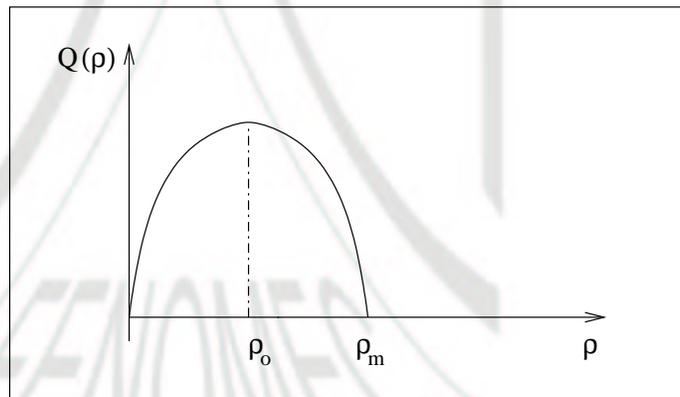


Fig. 1.2

La Fig. 1.2 nos indica que hay una densidad  $\rho_M$  para la cual ya no pasan coches (un embotellamiento) y una densidad  $\rho_0$  para la cual el flujo de coches es máximo.

La ecuación para  $\rho$  se encuentra pues sustituyendo  $Q(\rho)$  en la (1.1) y es

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(\rho(x_0, t)) - Q(\rho(x, t)). \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) es integrodiferencial. Para encontrar una ecuación diferencial para  $\rho$  es conveniente derivar respecto a  $x$  ambos miembros de (1.2) y obtener:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}Q(\rho(x, t)) = \rho_t + Q'(\rho)\rho_x = 0. \quad (1.3)$$

Para completar la formulación del problema, nos basta decir la disposición de coches en la carretera al tiempo  $t = 0$ ; es decir, especificar  $\rho(x, 0) = f(x)$  donde  $f(x)$  es una función conocida. Para encontrar la distribución de coches debemos resolver

$$\begin{aligned} \rho_t + Q'(\rho)\rho_x &= 0, -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Donde la función  $Q$  se determina experimentalmente y tiene una forma parecida a la de la Fig. 1.2.

Resolver la ecuación (1.4) es complicado y como primer paso trataremos de resolverla cuando  $\rho \ll 1$  (no hay la posibilidad de embotellamiento que compliquen la solución del problema). En este caso podemos aproximar  $Q(\rho)$  como una función lineal  $Q(\rho) = Q'(0)\rho$ . Así, (1.4) se aproxima por

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, -\infty < x < \infty, \\ \rho(x, 0) &= f(x), \\ c &= Q'(0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para bajas densidades, debemos resolver (1.5) para encontrar el tráfico en la carretera. Dicha solución se obtiene notando que la ecuación (1.5) se escribe en la forma siguiente:

$$(\rho_x, \rho_t) \cdot (c, 1) = 0 \quad (1.6)$$

que nos dice que  $\rho$  tiene la derivada direccional cero a lo largo del vector  $(c, 1)$ . Es decir  $\rho = cte.$  sobre las rectas paralelas a  $(c, 1)$ . Una manera diferente de escribir (1.6) es

$$\rho_t + c\rho_x = \frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{dx(t)}{dt} = c.$$

Utilizando estos hechos podemos construir la solución de (1.5) así:

- i) Sabemos que  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de las rectas  $\frac{dx}{dt} = c$ , es decir a lo largo de la familia de rectas  $x = ct + \xi$ . Por esto dibujamos la familia de rectas y tenemos la Fig. 1.3.

Obervemos que para cada punto  $P = (x, t)$  pasa una y sólo una recta de la familia. Además las rectas  $x = ct + \xi$  intersectan al eje  $x$  en los puntos  $(\xi, 0)$ .

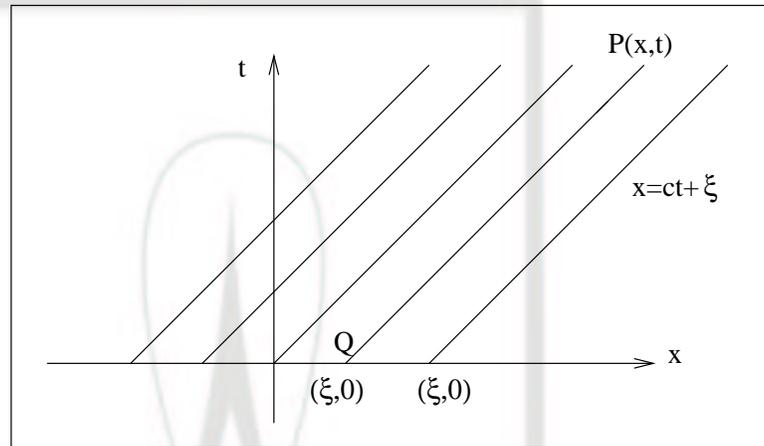


Fig. 1.3

- ii) Sabemos que  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de  $x = ct + \xi$ , por esto en la Fig. 1.3 el valor de  $\rho$  en  $P$  es el valor de  $\rho$  en  $Q$ . Por esto, para determinar  $\rho(x, t)$  basta ver cuál es el punto  $Q = (\xi, 0)$  donde la recta  $QP$  interseca el eje  $x$  y decir

$$\rho(x, t) = \rho(\xi, 0).$$

El valor de  $\rho(\xi, 0)$  se conoce ya que es la condición inicial  $f(\xi)$ . Para completar nuestra solución nos falta expresar  $\xi$  en términos de  $x$  y  $t$ . Esto se hace en la Fig. 1.3 y tendremos la solución

$$\rho(x, t) = f(x - ct). \quad (1.7)$$

Se puede verificar que (1.7) es efectivamente solución de (1.5) por sustitución directa. La interpretación de la solución en términos de tráfico la podemos obtener si graficamos (1.7) como función de  $x$  para dos tiempos diferentes como se ve en la Fig. 1.4.

Veamos que la gráfica de  $\rho$  al tiempo  $t_0$  es la gráfica  $\rho$  al tiempo  $t = 0$  desplazada hacia la izquierda una distancia  $ct_0$  sin cambiar de forma. Esto nos dice que el tráfico se moverá hacia la derecha con velocidad  $c$  sin cambiar la disposición de los coches. Esto se observa comúnmente, ya que cuando no hay embotellamientos un grupo de coches se desplaza en bloque sin cambiar apreciablemente de forma. La solución así construida está pues de acuerdo con nuestra experiencia.

Antes de resolver otros problemas notemos algunos detalles del método de solución de (1.5). De la Fig. 1.3 vemos que la solución es constante a lo largo de ciertas rectas que sólo dependen de la ecuación (a través de  $c$ ) y no de la  $f(x)$ . Estas rectas se llaman las

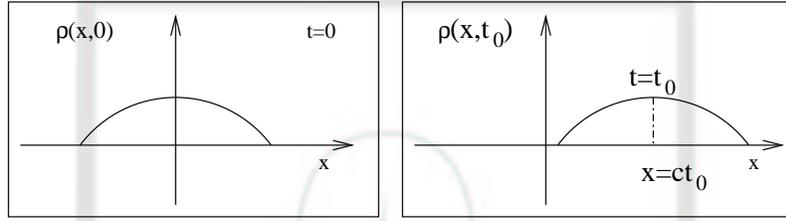


Fig. 1.4

**características** de la ecuación (1.7). A lo largo de las características vemos siempre el mismo valor de  $f$ . Finalmente el valor de  $\rho$  en  $P$  sólo depende del valor inicial en  $Q$ , por este motivo cambios en los valores iniciales en puntos distintos de  $Q$  no alteran  $\rho$  en  $P$ .

Otro problema de interés es aquél en el cual la carretera se extiende en el intervalo  $0 \leq x < \infty$  y no hay coches inicialmente; pero en el extremo  $x = 0$  están entrando coches con una densidad  $\rho(0, t) = g(t)$  que es una función conocida. Interesa también conocer la distribución de coches a lo largo de la carretera. El problema a resolver es

$$\begin{aligned}\rho_t + c\rho_x &= 0, 0 \leq x < \infty, t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, 0 \leq x < \infty, \\ \rho(0, t) &= g(t), t \geq 0, g(t) = 0, t \leq 0.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Para resolver (1.8) procedemos como en (1.5) y vemos que  $\rho$  es constante a lo largo de la familia de rectas  $x = ct + \xi$  que se ven en la Fig. 1.5.

En la Fig. 1.5 vemos que si  $P$  está a la derecha de la recta  $AB$  ( $x = ct$ )  $\rho = 0$ , ya que el valor de  $\rho$  en  $P$  es el valor de  $\rho$ , donde la característica  $PQ$  corta el eje  $x$  y el valor de  $\rho$  ahí es cero. Esto está de acuerdo con el hecho de que si tenemos un observador en  $x_0$ , éste no vería ningún coche hasta que  $t > x_0/c =$  tiempo que tarda en llegar el primer coche que salió de  $x = 0$  al tiempo  $t = 0$ . De la Fig. 1.5 podemos verificar este hecho, ya que en  $x = x_0$ ,  $\rho = 0$  si  $t < x_0/c$ . Por otro parte, si  $x < ct$ , es decir arriba de la recta  $AB$ ,  $\rho$  será diferente de cero. Para calcular el valor de  $\rho$  en  $R$  mostrado en la Fig. 1.5, basta recordar que

$$\rho(x, t) = \rho(0, \tau) = g(\tau), \quad (1.9)$$

donde  $(0, \tau)$  es el punto donde la característica  $RS$  intersecta al eje  $t$ . Para recordar el valor de  $\tau$  basta notar que

$$0 = c\tau + \xi, \quad \xi = -c\tau,$$

donde

$$x = ct - c\tau, \quad \tau = t - x/c. \quad (1.10)$$

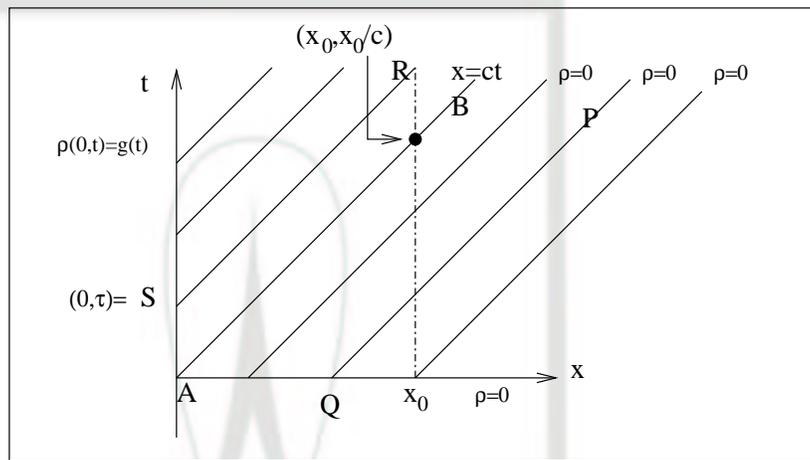


Fig. 1.5

En (1.9) y (1.10) vemos que la solución de (1.8) está dada por

$$\rho(x, t) = g(t - x/c). \quad (1.11)$$

Podemos ahora interpretar la ecuación (1.11) de esta forma: en un punto fijo  $x_0$  tenemos que  $\rho(x_0, t) = g(t - x_0/c)$  por esto si  $t < x_0/c$ ,  $\rho = 0$ . Cuando  $t > x_0/c$  la densidad que observamos es la misma distribución  $g(t)$  que está entrando en  $x = 0$ , claro está retrasada un tiempo  $x_0/c$ . Esto está de acuerdo con el hecho que un observador parado en la calle ve llegar a los coches, cuando hay pocos, con la misma disposición con la que entraron a la calle. En este caso vemos también que los valores de  $\rho$  se propagan a velocidad constante a lo largo de las características.

Tanto en la Fig. 1.5 como en la Fig. 1.3 vemos que  $\rho(x, t)$  sólo depende de los valores  $\rho(0, \tau)$  ó  $\rho(\xi, 0)$  que son los valores de  $\rho$ , donde la característica a través de  $P$  corta al eje con los datos iniciales o de frontera. Estos puntos  $(0, \tau)$ ,  $(\xi, 0)$  se llaman **dominio de dependencia** de  $(x, t)$ . Los puntos a lo largo de la característica  $x = ct + \xi$ , como llevan el valor  $\rho(\xi, 0)$ , se llaman **región de influencia** del punto  $(\xi, 0)$ .

Queda como ejercicio resolver los problemas

**Problema 1.1.1 Resolver**

$$\begin{aligned} \rho_t - c\rho_x &= 0, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

**Problema 1.1.2** Resolver

$$\begin{aligned} \rho_t - c\rho_x &= 0, & -\infty < x \leq 0, & t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, & -\infty < x \leq 0, & \\ \rho(0, t) &= g(t), & t \geq 0. & \end{aligned}$$

Interpretar los resultados en términos de flujo de tráfico.

## 1.2. Geometría de las características

Es conveniente, tal como se hace en ecuaciones diferenciales ordinarias, interpretar a (1.5) como un problema geométrico para la superficie  $z = \rho(x, t)$ . Para dar la formulación deseada vemos que resolver (1.5) es encontrar una superficie  $\mathcal{S}$  cuya ecuación es  $\rho = \rho(x, t)$ , que cumple con la ecuación diferencial y que pasa por la curva parametrizada por  $(\xi, 0, f(\xi))$ . Esto se ve en la Fig. 1.6

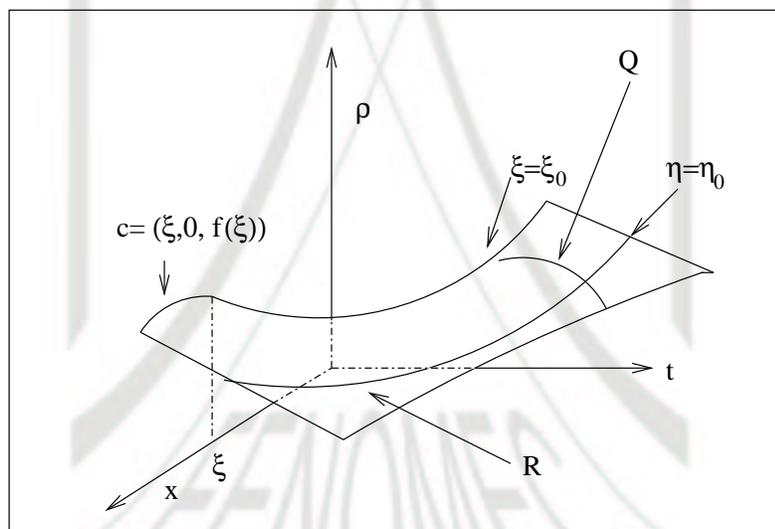


Fig. 1.6

La interpretación geométrica de la ecuación (1.6) es la de una restricción sobre la superficie  $\mathcal{S}$ . En forma más cuantitativa recordemos que el vector normal a  $\mathcal{S}$  está dado por  $(\rho_x, \rho_t, -1)$  y que usando esto, la Fig. 1.6 se interpreta como

$$(\rho_x, \rho_t, -1) \cdot (c, 1, 0) = 0. \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) nos dice que si  $\rho$  es una solución de (1.5), entonces el vector normal a  $\mathcal{S}$  es perpendicular a  $(c, 1, 0)$ . De ahí que el problema (1.5) es el de encontrar una superficie tangente al vector  $(c, 1, 0)$  y que pase por la curva  $\mathcal{C} = (\xi, 0, f(\xi))$ . Para construir la superficie deseada recurrimos a la Fig. 1.6. Es conveniente parametrizar a  $\mathcal{S}$  en la forma

$$(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta), \rho(\xi, \eta)) \quad (1.13)$$

donde para cada valor fijo de  $\xi$  la parametrización (1.13) nos da, como función de  $\eta$ , una de las curvas  $\Gamma$ . Cuando fijamos  $\eta = \eta_0$  nos movemos con la (1.13) como función de  $\xi$  a lo largo de una curva  $R$ . En particular es deseable que cuando  $\eta = 0$  nos movamos sobre  $\mathcal{C}$ , es decir queremos que

$$(x(\xi, 0), t(\xi, 0), \rho(\xi, 0)) = (\xi, 0, f(\xi)). \quad (1.14)$$

Como queremos que  $\mathcal{S}$  sea tangente a  $(c, 1, 0)$  nos basta pedir que las curvas  $Q$  que la generan lo sean. Esto se expresa como

$$\frac{d}{dt}x(\xi, \eta) = c, \quad \frac{d}{dt}t(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{d}{dt}\rho(\xi, \eta) = 0, \quad (1.15)$$

para toda  $\xi$ . Las ecuaciones (1.14), (5.15) son la expresión de (1.5) en paramétricas y su solución nos dará una expresión para  $\mathcal{S}$  en forma paramétrica.

Las ecuaciones (1.14) y (5.15) nos dicen que el resolver la ecuación parcial (1.5) es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones ordinarias. Podemos ahora resolver la (5.15) con las condiciones iniciales de la (1.14) y obtener

$$x(\xi, \eta) = c\eta + \xi, \quad t(\xi, \eta) = \eta, \quad \rho(\xi, \eta) = f(\xi). \quad (1.16)$$

La (1.16) y nos da la expresión paramétrica de  $\mathcal{S}$  nos dice que  $\rho$  es constante cuando  $x = c\eta + \xi$ ,  $t = \eta$  es decir a lo largo de las rectas  $x = ct + \xi$ . Este es el mismo resultado que obtuvimos de (1.6). Para obtener de (1.16)  $\rho(x, t)$ , basta despejar  $\xi, \eta$  en términos de  $t, x$ . Esto nos da

$$\rho(x, t) = f(x - ct), \quad (1.17)$$

que es la solución que ya obtuvimos en (1.7).

En este caso pudimos pasar sin dificultad de la forma paramétrica (1.16) a (1.17), debido a que la función  $(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$  resultó invertible. Geométricamente en el plano  $(x, t)$  es lo mismo usar coordenadas  $x, t$  que  $\xi, \eta$ ; esto se debe a que, como vimos en la Fig. 1.3, por cada punto  $(x, t)$  pasa una sola recta  $x = ct + \xi$ . En ejemplos más complicados la transformación no siempre es invertible y estos ejemplos requieren un estudio especial.

Queda como ejercicio resolver los problemas 1.1.1 y 1.1.2 usando este método y comparar las soluciones obtenidas en ambos casos.

Antes de terminar esta sección veremos cómo el método geométrico introducido puede usarse para resolver otro tipo de problemas asociados con la ecuación

$$\rho_t + c\rho_x = 0. \quad (1.18)$$

Podemos pensar en resolver la (1.18) sujeta a la especificación de los valores de  $\rho$ , a lo largo de alguna curva  $\mathcal{C}$ , en el plano  $(x, t)$  y que no sea la recta  $t = 0$ , tal como se muestra en la figura siguiente.

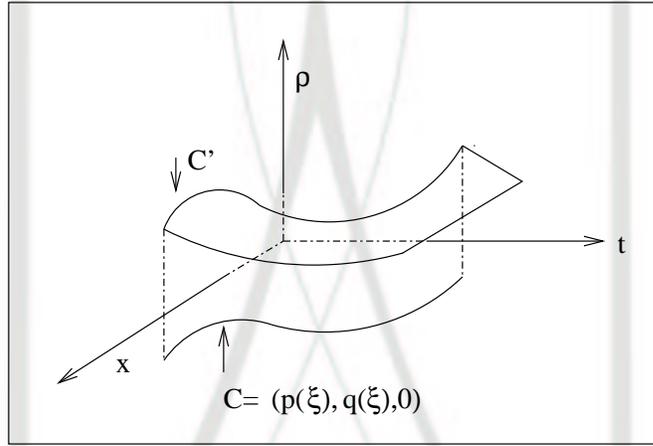


Fig. 1.7

En la Fig. 1.7 los valores de  $\rho$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  son datos del problema y por esto la condición que  $\rho$  tome en  $\mathcal{C}$  los valores especificados se traducen en el que  $\mathcal{S}$  pase por la curva  $\mathcal{C}'$ . Un ejemplo de esta situación ya lo discutimos en la (1.8) donde la curva  $\mathcal{C}$  estaba formada por las rectas  $x \geq 0, t \geq 0$ .

Para resolver la (1.18) las curvas  $Q$  de la Fig. 1.7 deberán ser paralelas al vector  $(c, 1, 0)$ . Si parametrizamos a  $\mathcal{S}$  como en (1.13) tenemos que

$$\frac{d}{dt}x(\xi, \eta) = c, \quad \frac{d}{dt}t(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{d}{dt}\rho(\xi, \eta) = 0. \quad (1.19)$$

Por otra parte cuando  $\eta = 0$  la curva  $(x(\xi, 0), t(\xi, 0), \rho(\xi, 0))$  tiene que ser la curva  $\mathcal{C}'$ . De aquí vemos que las condiciones iniciales para (1.19) son

$$x(\xi, 0) = p(\xi); \quad t(\xi, 0) = q(\xi), \quad \rho(\xi, 0) = \rho(p(\xi), q(\xi)) = \text{dato}. \quad (1.20)$$

Las funciones  $p(\xi)$  y  $q(\xi)$  también son conocidas y parametrizan a  $\mathcal{C}$ . La representación paramétrica de  $\mathcal{S}$  se obtiene resolviendo (1.19) con las condiciones iniciales dadas en

(1.20). De aquí obtenemos:

$$x = c\eta + p(\xi), \quad t = \eta + q(\xi), \quad \rho = \rho(p(\xi), q(\xi)). \quad (1.21)$$

Las ecuaciones (1.21) nos dicen que  $\rho$  es constante a lo largo de las rectas  $(x, t) = \eta(c, 1) + (p(\xi), q(\xi))$  es decir  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de las características. Además (1.21) nos dice que el valor  $\rho(x, t)$  es el valor de  $\rho$  en  $Q$ , donde  $Q$  es el punto de intersección de  $C$  con la características a través de  $(x, t)$ . Esto se muestra con detalle en la Fig. 1.8.

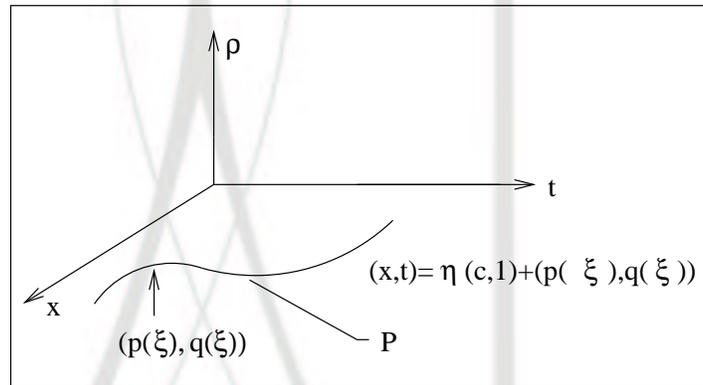


Fig. 1.8

Queda como un ejercicio el resolver el problema planteado en la ecuación (1.8) por este método. Queda también como ejercicio resolver el problema

**Problema 1.2.1 Resolver**

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, \\ \rho(x(t), t) &= g(t), \quad t \geq 0 \text{ cuando } x(t) = \alpha t, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Debe darse una solución explícita e interpretar el problema en el dibujo  $(x, t)$  correspondiente.

### 1.3. Unicidad y discusión de las soluciones de la ecuación de primer orden

Observemos que para resolver el problema (1.5) solamente necesitamos una condición inicial; por ejemplo, cuando  $t = 0$  y esto nos lleva a una solución única. Una manera

### 1.3. UNICIDAD Y DISCUSIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN 11

de justificar la suficiencia de una sola condición inicial para garantizar la unicidad es como sigue.

En el plano  $(x, t)$  conocemos  $\rho(x, 0) = f(x)$ . Resolver (1.5) significa encontrar el valor de  $\rho$  para  $t > 0$ . Refiriéndonos a la Fig. 1.6 vemos que resolver (1.5) es encontrar  $\rho(x, h)$  para cualquier valor de  $h$ . Para calcular  $\rho(x, h)$ , si  $h$  es pequeña, podemos desarrollar  $\rho(x, h)$  en serie de Taylor en la variable  $t$  y tener

$$\rho(x, h) = \rho(x, 0) + \rho_t(x, 0)h + R(x, h) \quad (1.22)$$

donde  $R(x, h)$  es el residuo. La función  $\rho(x, 0) = f(x)$  es un dato del problema. La función  $\rho_t(x, 0)$  también se puede determinar en términos de  $\rho(x, 0)$ , ya que de la ecuación (1.5) se sigue

$$\rho_t(x, 0) = -c\rho_x(x, 0) = -c\frac{\partial}{\partial x}f(x) = -cf'(x). \quad (1.23)$$

De (1.22) y (1.23) se sigue que cuando  $h$  es pequeño

$$\rho(x, h) = f(x) - cf'(x)h. \quad (1.24)$$

Para mejorar la aproximación de (1.24) usamos el desarrollo de Taylor a segundo orden y vemos que

$$\rho(x, h) = \rho(x, 0) + \rho_t(x, 0)h + \frac{1}{2}\rho_{tt}(x, 0)h^2.$$

Calculamos ahora  $\rho_{tt}$  en términos de  $f(x)$  derivando la ecuación (1.5) y obtenemos

$$\rho_{tt}(x, 0) = -c\rho_{tx} = -c\frac{\partial}{\partial x}\rho_t(x, 0) = -c\frac{\partial}{\partial x}(-cf'(x)) = c^2f''(x).$$

Procediendo de la misma forma podemos calcular de manera única las derivadas  $\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}$ . Se puede verificar que la aproximación de orden  $n$  a la solución  $\rho$  está dada por

$$\rho(x, h) = \sum_{k=0}^n \frac{(-)^k}{k!} f^{(k)}(x)(ch)^k.$$

Este proceso puede continuarse indefinidamente y vemos que dada una condición inicial  $f$  nos lleva a una solución formal única y que todas las derivadas  $\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}$  quedan determinadas en términos de  $f(x)$ .

La solución formal

$$\rho(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} f^{(k)}(x)(ct)^k. \quad (1.25)$$

construida por el proceso que acabamos de describir, será una solución real del problema, si la convergencia de (1.25) es lo suficientemente fuerte como para poder justificar

los pasos formales que nos llevaron a ella. Esta convergencia desde luego depende de las propiedades del dato inicial  $f(x)$ . En el caso de que  $f(x)$  sea tal que su serie de Taylor converja a ella, tendremos que (1.25) se puede sumar en la forma

$$\rho(x, t) = f(x - ct)$$

que es precisamente la solución de la (1.5). Esta discusión nos muestra cómo es suficiente un solo dato inicial para fijar de manera única los valores de la solución de (1.5). Análogamente al caso de ecuaciones ordinarias, el método de series discutido permite construir soluciones formales para ecuaciones parciales.

En esta sección vimos que cuando una ecuación tiene características, sus soluciones se interpretan como ondas que se propagan. Las características también proveen un método geométrico y analítico para construir y discutir las propiedades de las soluciones.

## 1.4. Ecuación lineal de segundo orden con características

Al igual que en la sección anterior fijaremos nuestra atención en un ejemplo de propagación de ondas que esperamos esté asociado con características.

Todos hemos observado cómo al deformar poco, y en forma localizada, una cuerda tensa, las deformaciones que se propagan a lo largo de la cuerda conservan inalterada su forma inicial. Veremos que este comportamiento está asociado y se puede describir cuantitativamente con las características de la ecuación que gobierna el movimiento de una cuerda tensa.

Empezamos encontrando la ecuación deseada. Para esto tomamos una porción de la cuerda entre  $x$  y  $x + h$  tal como se ve en la Fig. 1.9, donde  $T$  es la fuerza de tensión y  $u(x, t)$  representa al desplazamiento de la cuerda de su posición de equilibrio (al eje  $x$ ).

La ecuación deseada se obtiene al aplicar la ley de Newton a la porción de cuerda entre  $x$  y  $x + h$ . Usando la ley de Newton, con  $\rho$  = densidad de la cuerda, tenemos

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1. \quad (1.26)$$

Como los desplazamientos son pequeños tenemos que  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1$ . Usando esto, (1.26) se transforma en

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+h} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right] \quad (1.27)$$

que para  $h$  pequeños se transforma en

$$\rho h u_{tt} = T h u_{xx} \quad (1.28)$$

1.4. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 13

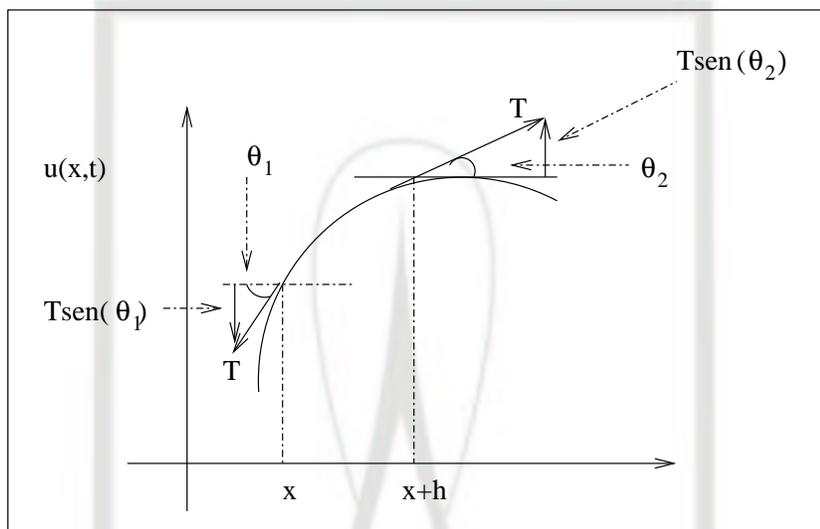


Fig. 1.9

y finalmente

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.29)$$

donde  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ .

La ecuación (1.4) es la que supondremos controla el movimiento de disturbios pequeños en la cuerda. Para completar la especificación del problema necesitamos saber la posición y velocidad de la cuerda cuando  $t = 0$ . Con esto el problema de determinar el movimiento de la cuerda es el de resolver

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x) & \text{desplazamiento inicial,} \\ u_t(x, 0) &= g(x) & \text{velocidad inicial.} \end{aligned} \quad (1.30)$$

La primera diferencia que notamos entre (1.30) y (1.5) es que la ecuación envuelve ahora dos derivadas en el tiempo y que damos dos condiciones iniciales. Esperamos que tenga soluciones en forma de ondas que se propagan, ya que (1.30) es un modelo de esa situación.

Antes de resolver (1.30) veremos cómo se puede construir una solución formal única del problema, si es que conocemos dos condiciones iniciales. Para encontrar la solución procedemos como en (1.23) y vemos que cuando  $h \ll 1$

$$u(x, h) = u(x, 0) + u_t(x, 0)h = f(x) + u_t(x, 0)h. \quad (1.31)$$

En (1.23) pudimos encontrar  $u_t(x, 0)$  ya que estaba relacionada a través de la ecuación con el dato inicial  $f'(x)$ . La ecuación (1.30) no proporciona información sobre  $u_t(x, 0)$

ya que tiene segundas derivadas, por esto debemos proporcionar esa información a través de  $g(x)$ . Veremos que dados  $u$  y  $u_t$  cuando  $t = 0$  podemos determinar en forma única la solución formal de (1.30). Para ilustrar el procedimiento consideremos una aproximación a tercer orden.

$$u(x, 0) = f(x) + g(x)h + \frac{1}{2!}u_{tt}(x, 0)h^2 + \frac{1}{3!}u_{ttt}(x, 0)h^3. \quad (1.32)$$

En (1.32)  $u_{tt}$  se determina a partir de (1.30) en la forma

$$u_{tt}(x, 0) = c^2 u_{xx}(x, 0) = c^2 f''(x),$$

y análogamente

$$u_{ttt}(x, 0) = c^2 u_{txx}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_t(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = c^2 g''(x)$$

obteniendo así

$$u(x, h) = f(x) + g(x)h + \frac{1}{2}c^2 f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}c^2 g''(x)h^3. \quad (1.33)$$

Queda como ejercicio el convencerse que todas las aproximaciones pueden expresarse en términos de  $f$  y  $g$ . Además cuando  $g = 0$  queda como ejercicio probar que las series infinitas suman a  $u(x, t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\}$  que es efectivamente una solución del problema. Esta discusión y la análoga para la ecuación de primer orden no son más que una ilustración en dos casos particulares del teorema de existencia y unicidad de Cauchy Kovalevski [3].

El método de desarrollo en serie (análogamente a lo que sucede en ecuaciones ordinarias) da poca información sobre la naturaleza de las soluciones del problema. Por esto resolveremos (1.30) de otra forma.

Para resolver (1.30) notemos que la ecuación puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u. \quad (1.34)$$

De la (1.34) se sigue que resolver (1.30) es resolver sucesivamente dos problemas de la forma (1.5). Recordemos que los problemas (1.5) tienen por soluciones funciones  $v(x+ct)$ ,  $w(x-ct)$ . Por (1.34) vemos también que (1.30) tiene soluciones de la forma

$$u(x, t) = v(x+ct) + w(x-ct) \quad (1.35)$$

es decir ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda. Las funciones  $v$  y  $w$  son arbitrarias y deberán ser determinadas usando las condiciones iniciales.

Empezamos por estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

#### 1.4. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 15

que describe el movimiento de una cuerda desplazada inicialmente en una forma  $f(x)$ . Usando (1.35) debemos encontrar  $v$  y  $w$  de tal forma que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= w(x) + v(x) = f(x), \\ u_t(x, 0) &= cv'(x) - cw'(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

De la segunda ecuación (1.37) tenemos que

$$v(x) = w(x) + d, \quad (1.38)$$

y sustituyendo (1.38) en la primera ecuación (1.37) tenemos que

$$w(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{d}{2}. \quad (1.39)$$

Análogamente

$$v(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{d}{2}. \quad (1.40)$$

De (1.39) y (1.40) vemos que la solución de (1.36) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) \quad (1.41)$$

resultado que concuerda con el obtenido al sumar la serie.

Para interpretar (1.41) es conveniente graficarla para dar valores de  $f$  tal como lo hicimos en la Fig. 1.4. En este caso la gráfica de (1.41) es la Fig 1.10.

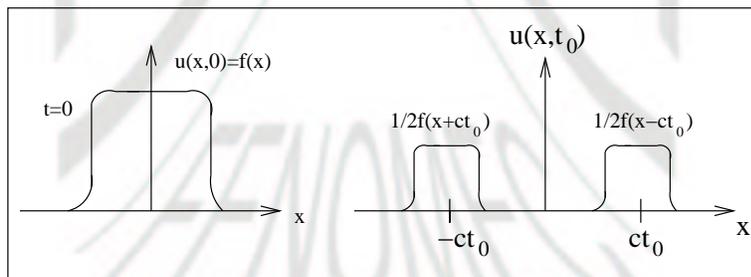


Fig. 1.10

En la Fig. 1.10 vemos que la deformación inicial se propaga hacia la derecha y hacia la izquierda con velocidad  $ct$ , sin cambiar de forma, pero reduciendo su altura a la mitad. Este hecho nos es familiar en la práctica. Vemos además que el valor  $u(x, t)$  depende solamente del valor de la condición inicial  $f$  en los puntos de intersección de

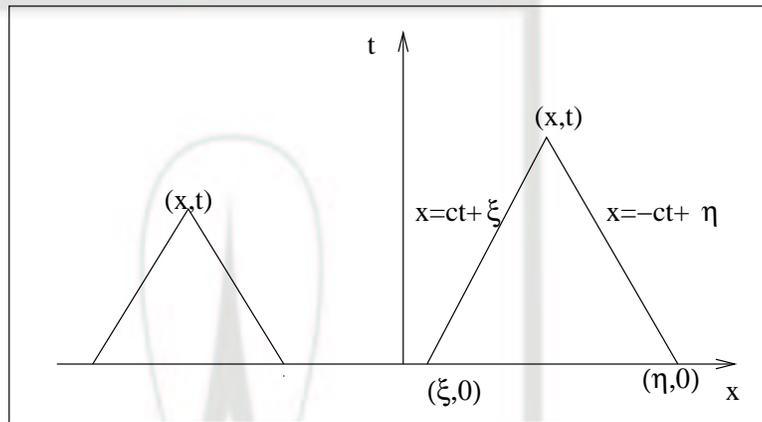


Fig. 11

las rectas  $x = ct + \xi$ ,  $x = -ct + \eta$  con la recta  $t = 0$ , tal como se ve en la Fig. 1.11.

La Fig. 1.11 nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar dos rectas de pendiente  $\pm \frac{1}{c}$  (llamadas también en este caso características) a través de  $(x, t)$ ; encontrar las intersecciones  $(\xi, 0)$ ,  $(\eta, 0)$  de esas rectas con el eje  $x$  y tomar el promedio de los valores  $f(\xi)$  y  $f(\eta)$  como  $u(x, t)$ . Nuevamente vemos que el diagrama  $(x, t)$  juega un papel importante para entender las soluciones de (1.36).

Usaremos ahora el plano  $(x, t)$  para describir en detalle la solución (1.41). Para esto usaremos la Fig. 1.12.

De (1.41) y de la construcción de la Fig. 1.11 vemos que  $u = 0$  si  $p = (x, t)$  está a la derecha de la recta  $x = ct + a$ , ó si está a la izquierda de  $x = -ct - a$ , ya que las características intersectan la recta  $t = 0$  en puntos donde la condición inicial  $f = 0$ . La interpretación de esta situación es así: los puntos a la derecha de  $x = ct + a$ , distan de  $(a, 0)$  una longitud mayor que  $ct$ . El hecho de que la solución sea cero para esos puntos nos indica que el disturbio que sale de  $a$  no llega a esos puntos en un tiempo  $t$ , lo cual dice que los disturbios se propagan precisamente con velocidad  $c$ . También vemos que el primer tiempo en el que  $u(x_0, t) \neq 0$  es precisamente  $t = \frac{x_0 - a}{c}$  que es el tiempo que tarda un disturbio que viaja con velocidad  $c$  para ir desde  $a$  hasta  $x_0$ . De la Fig. 1.10 y de (1.41) se sigue que  $u(x_0, t) = 0$  si  $t > \frac{x_0 + a}{c}$  que es el tiempo que tarda el disturbio generado en  $-a$  en llegar hasta  $x_0$ . Queda ahora como un ejercicio el repetir el análisis exterior para la región  $x < 0$ . En la banda acotada por  $x = ct \pm a$  y arriba de la recta  $QA$  la solución es  $u = \frac{1}{2}f(x - ct)$ .

En la región triangular  $-a, a, Q$  la situación es más complicada, ya que para cada punto  $R$  de ella pasan dos características  $C^+$  y  $C^-$  que intersectan  $t = 0$  en puntos donde  $f \neq 0$ . Queda como ejercicio el convencerse que  $u = 0$  en la región triangular



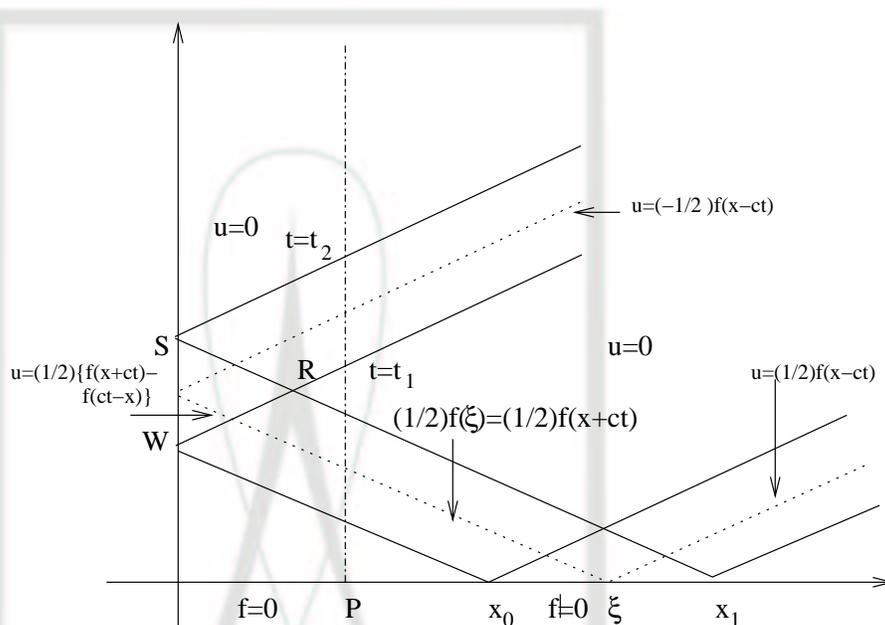


Fig. 1.13

que ese es el caso.

Damos ahora la fórmula que esperamos sea solución de nuestro problema. Para  $(x, t)$  dentro de la región acotada por  $C_+^1$ ,  $C_+^2$ ,  $C_-^1$ ,  $C_-^2$ , excepto por el triángulo  $W$ ,  $R$ ,  $S$ , tenemos

$$u = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct)$$

que es la solución en ausencia de pared. Desde luego  $u = 0$  fuera de esa región y satisface las condiciones iniciales.

En el triángulo  $W$ ,  $R$ ,  $S$  la solución es la suma de la onda incidente  $\frac{1}{2}f(x + ct)$  (que es distinta de cero sólo entre  $C_-^1$ ,  $C_-^2$ ) y de la onda reflejada  $-\frac{1}{2}f(ct - x)$ . En la región fuera de  $W$ ,  $R$ ,  $S$  y acotada por  $C_+^3$  y  $C_+^4$ , la solución es la onda reflejada  $-\frac{1}{2}f(ct - x)$ . Resumiendo

$$U = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2}f(ct - x) \quad (1.43)$$

donde los factores de la suma son sólo distintos de cero en las regiones marcadas en la Fig. 1.13.

Finalmente notamos que un observador en un punto  $P$ , como el que se ve en la Fig. 1.13, primero ve pasar la onda emitida en  $x_0 \leq x \leq x_1$ ; después al tiempo  $t = t_1$  la primera parte de la onda reflejada y cuando  $t = t_2$  vuelve al reposo. Queda como

#### 1.4. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 19

ejercicio el calcular  $t_1$  y  $t_2$  en términos de  $x_0$  y  $x_1$ .

Podemos comprobar directamente que (1.43) es solución de (1.42) con las condiciones iniciales y de frontera especificadas. Además, la discusión anterior nos da el significado de los tres términos y una manera gráfica de construir la solución si se conoce  $f(x)$ . Debemos notar que las características llevan siempre un valor constante de  $u$  hasta que son “reflejadas en la frontera”; y las características reflejadas llevan un valor constante de  $u$  pero de signo contrario al valor que llevan las incidentes.

Ahora resolvemos (1.42) sin recurrir a la Fig. 1.13. Sabemos que

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) \quad (1.44)$$

y procedemos como en (1.37) determinando  $v$  y  $w$ , usando las condiciones de frontera. Sustituyendo (1.44) en (1.42) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x) + w(x) = f(x), x \geq 0, \\ u(0, t) &= v(-ct) + w(ct) = 0, t \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= -cv'(x) + cw'(x) = 0, x \geq 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

La primera y tercera ecuaciones (1.45) nos dan

$$v(\xi) = w(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi), \quad \xi \geq 0. \quad (1.46)$$

La segunda ecuación determina a  $v$  para valores negativos ya que

$$\begin{aligned} v(-c\eta) &= -w(c\eta), \eta \geq 0, \\ v(c\eta) &= -w(-c\eta), \eta \leq 0, \\ v(\eta) &= -w(-\eta), \eta \leq 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

De (1.46), (1.47) y (1.44) tenemos que la solución es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + v(x - ct) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \begin{cases} \frac{1}{2}f(x - ct), & \text{si } x - ct > 0, \\ -\frac{1}{2}f(ct - x), & \text{si } x - ct < 0. \end{cases}$$

Desde luego la solución coincide con la que obtuvimos geoméricamente.

De la discusión anterior concluimos que en el problema de reflexión, la solución es constante a lo largo de las características y cuando una característica encuentra una pared, ésta se refleja y la solución continúa igual pero con signo contrario. Veremos ahora cómo este proceso nos permite construir las soluciones para problemas más complicados, como cuando hay reflexión para dos paredes.

Ahora discutimos con detalle el problema de reflexión de ondas cuando la cuerda está fija en  $x = \pm l$ . El problema es resolver

**Problema 1.4.1** Resolver

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx}, |x| \leq l, \\
 u(x, 0) &= f(x), f(x) = 0 \text{ para } a \leq |x|, \\
 u_t(x, 0) &= 0 \\
 u(-l, t) &= u(l, t) = 0, t \geq 0.
 \end{aligned}$$

En palabras debemos encontrar el movimiento de una cuerda fija desplazada inicialmente en la forma  $f(x)$ . Es de esperarse que el movimiento sea de vaivén de pulsos por la cuerda. La solución se examina en la Fig. 1.14.

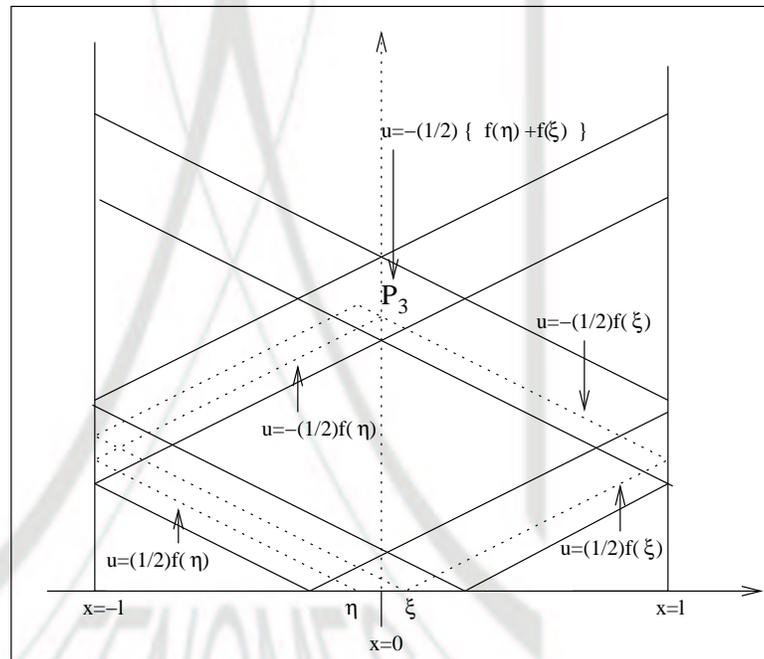


Fig. 1.14

La solución es distinta de cero sólo en las bandas limitadas por las características. En la región triangular sombreada verticalmente tenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct).$$

Para puntos  $P_1$  la solución es el valor de  $u$  sobre  $C_+^1$  que es  $u = \frac{1}{2}f(x - ct)$ . En la región cuadrículada tenemos la interacción de la onda incidente y de la onda reflejada

#### 1.4. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 21

que describimos en la Fig. 1.13. Para puntos  $P_2$  la solución es el valor a lo largo de  $C_-^2$ , en el caso de la Fig. 1.14,  $u = -\frac{1}{2}f(\xi)$ . En la región donde está  $P_3$ , tenemos la interacción del pulso reflejado por la pared derecha y de aquél reflejado por la pared izquierda. En  $P_3$ ,  $u$  es la suma de los pulsos que viajan a lo largo de  $C_+^1$  y  $C_-^1$  y de  $C_-^2$  y  $C_+^2$ . El pulso que llega por  $C_-^1$  contribuye  $-\frac{1}{2}f(\xi)$  y el que llega por  $C_+^2$  contribuye con  $-\frac{1}{2}f(\eta)$ , donde  $u(P_3) = -\frac{1}{2}(f(\xi) + f(\eta))$ . Esta construcción determina el valor de  $u$  en todas las regiones.

Queda como ejercicio continuar el procedimiento y encontrar algunos valores cuando  $f(x) = -x^2 + a^2$ ,  $f = 2a$ . También queda verificar si la solución obtenida geométricamente con ayuda de la Fig. 1.14 coincide con la solución analítica. (Ver Weinberger para más detalles y ejemplos).

Otro ejercicio interesante es el de hacer ver que las soluciones del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0, \\ -f(-x) & x \leq 0, \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.48}$$

son para  $x \geq 0$ , soluciones de (1.42). Esto nos da una manera alternativa de construir las soluciones para el problema de reflexión. Queda como ejercicio examinar la extensión del método cuando se tienen dos fronteras.

Para completar nuestra discusión sobre la ecuación de onda consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Buscamos una solución de la forma

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) \tag{1.50}$$

y tratamos de determinar  $v$  y  $w$  usando las condiciones iniciales en (1.49). Sustituyendo (1.50) en (1.49) tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x) + w(x) = 0, \\ u_t(x, 0) &= cw'(x) - cv'(x) = g(x). \end{aligned} \tag{1.51}$$

De (1.51) vemos que

$$\begin{aligned} v'(x) &= -\frac{1}{2c}g(x); & v(\xi) &= -\frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds + d; \\ w(\xi) &= -v(\xi) = \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds - d, \end{aligned} \tag{1.52}$$

y de (1.52) obtenemos

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (1.53)$$

que nos da la solución de (1.49) como puede verificarse por sustitución directa. Una interpretación útil de (1.53) se obtiene de nuevo examinando la Fig. 1.15. La

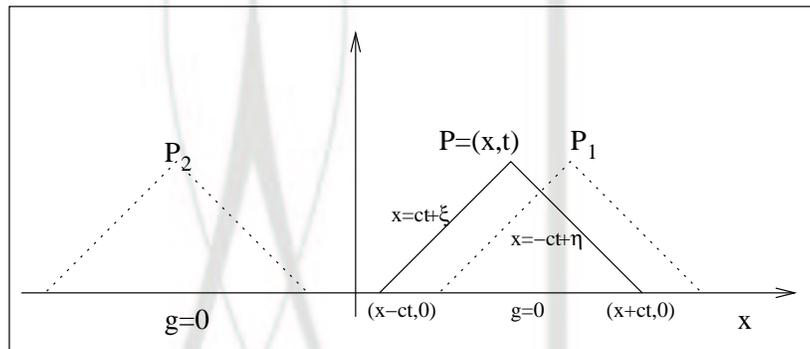


Fig. 1.15

ecuación (1.53) nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar las características a través de  $(x, t)$ , ver dónde intersectan la recta  $t = 0$ , e integrar en el intervalo comprendido entre las dos intersecciones, la condición inicial  $g$ . El valor de la integral es  $u(x, t)$ . Vemos que  $u(x, t)$  depende solamente de los valores iniciales de  $u$  en la base del triángulo con vértice en  $P$  y no siente los valores de la condición inicial fuera de esa región.

Nuevamente la propiedad de que los disturbios en  $u$  se propagan con velocidad finita se manifiesta. Esto se debe a que si  $g(x) = 0$  para  $|x| > a$  entonces  $u = 0$  a la derecha de  $x = ct + a$  y a la izquierda de  $-ct - a$  como puede verse de (1.53) y de la Fig. 13. Finalmente la solución de (1.3) está dada por la suma de (1.41) y (1.53) en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (1.54)$$

La fórmula (1.54) se debe a D'Alembert. En el plano  $(x, t)$  la ecuación (1.54) nos dice que el valor  $u(x, t)$  depende solamente de los datos iniciales en la base del triángulo formado por el punto  $(x, t)$ , la recta  $t = 0$  y las características a través de  $(x, t)$  que intersectan a la recta  $t = 0$ . La región de la recta  $t = 0$  entre  $x - ct$  y  $x + ct$  se llama dominio de dependencia de  $(x, t)$ . Esto se debe a que  $u(x, t)$  no se altera si se cambian los datos iniciales fuera de la región  $x - ct \leq \xi \leq x + ct$ . De (1.54) vemos también que un cambio en la condición inicial en un punto  $Q$  sólo puede influir en la solución  $u$  en

puntos  $R$  del cono que tiene por vértices a  $Q$  y cuyos lados son las características a través de  $Q$ .

En esta sección hemos encontrado una solución al problema para la ecuación de onda en diversas situaciones. La solución encontrada refleja nuestra experiencia en propagación de pulsos a lo largo de una cuerda y su reflexión por paredes. Sin embargo, para completar nuestra discusión debemos probar que las soluciones obtenidas son las únicas posibles.

En cuanto a la unicidad estamos razonablemente convencidos, con base en los casos particulares del teorema de Cauchy-Kovalevski, discutidos en los casos en que  $f$  y  $g$  tengan desarrollos de Taylor. Sin embargo, nos interesa probar la unicidad para datos iniciales más generales, así como también para problemas mixtos de valores iniciales y de frontera. Este es el objeto de la siguiente sección.

## 1.5. Unicidad de las soluciones para la ecuación de onda

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -l \leq x \leq l, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) &= u(l, t) = 0, & t &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

La solución de (1.55) fue construida en las secciones anteriores. Desde luego entendemos por una solución de (1.55) una función  $u$  con dos derivadas que satisfagan (1.55). Por esto, para que la construcción dada en la Fig. 1.14 valga, debemos suponer que tanto  $f$  como  $g$  tiene dos derivadas, lo que supondremos a partir de ahora. (Desde luego se puede ampliar el concepto de solución pero esto no nos interesa por el momento).

Para probar la unicidad de (1.55) utilizaremos el principio de la conservación de energía, que es un argumento general aplicable a muchas ecuaciones ordinarias y parciales como veremos a lo largo de estas notas.

Para motivar la prueba consideremos la ecuación de las oscilaciones

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= 0, \\ y(0) &= a, \quad y'(0) = b, \end{aligned} \quad (1.56)$$

que tiene por solución  $y(t) = a \cos t + b \sin t$ . Queremos probar la unicidad. Para probarla tomamos  $z = y_1 - y_2$  donde  $y_1$  y  $y_2$  son dos soluciones de (1.56), entonces  $z$  satisface

$$z'' + z = 0, \quad z(0) = z'(0) = 0, \quad (1.57)$$

y queremos probar que  $z = 0$ . Físicamente que  $z = 0$  es la única solución de (1.57), ya que  $z(0) = z'(0) = 0$ , nos dice que la energía total del movimiento es cero. Por

conservación de energía ésta debe seguir siendo cero para todo el tiempo, de aquí que  $z = 0$  si  $t \geq 0$ .

Ahora damos una expresión analítica para el argumento anterior. La energía  $E(t)$  de una solución de (1.57) es

$$E(t) = \frac{1}{2}y'^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t).$$

Veremos que  $E'(t) = 0$  lo cual nos dice que la energía se conserva si  $z$  es solución de (1.57). En efecto

$$E'(t) = z'(z'' + z) = 0. \quad (1.58)$$

De (1.58) tenemos que

$$\frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{2}z^2 = E(t) = E(0) = \frac{1}{2}z'^2(0) + \frac{1}{2}z^2(0) = 0 \quad (1.59)$$

de donde se sigue que  $z = 0$  para  $t \geq 0$  que es el resultado deseado.

Extenderemos ahora el argumento anterior a la ecuación de onda. Para esto necesitamos encontrar la energía cinética y potencial de la cuerda.

Pensemos la cuerda dividida en tramos como se ve en la Fig. 1.16 y recordemos que  $u_t$  es la velocidad de la cuerda en la dirección vertical.

De la Fig. 1.14 vemos que la energía cinética en el tramo  $x_i, x_{i+h}$  está dada por

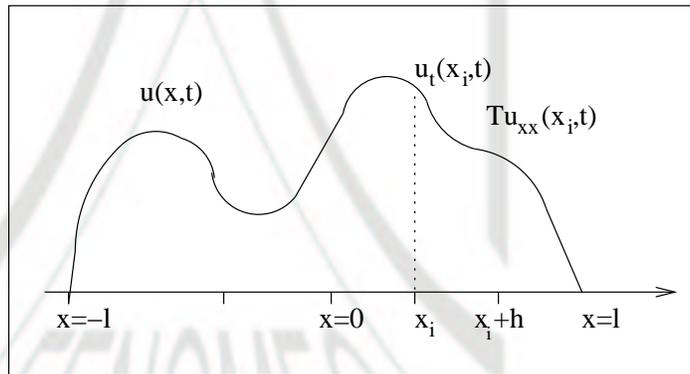


Fig. 1.16

$$\frac{1}{2} \rho h u_t^2(x, t)$$

y la energía cinética total de la cuerda está dada por

$$\frac{1}{2} \int_{-l}^l \rho h u_t^2(\xi, t) d\xi. \quad (1.60)$$

La energía potencial que adquiere la cuerda al subir de la posición  $u = 0$  al tiempo  $t = 0$ , a la posición  $u(x, t)$  al tiempo  $t$ , es el trabajo realizado para vencer a la fuerza de tensión. Para la cuerda entre  $x_i$  y  $x_{i+h}$  este trabajo es

$$-Th \int_0^t u_{xx}(x_i, s) u_s(x_i, s) ds \quad (1.61)$$

que es la integral de la potencia. De (1.61) obtenemos la energía potencial total integrando sobre toda la cuerda. Esto es:

$$- \int_{-l}^l \int_0^t T u_{xx}(x, s) u_s(x, s) ds dx . \quad (1.62)$$

Para nuestros propósitos es conveniente reescribir (1.62) eliminando a  $u_s$ . Esto lo hacemos así

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{-l}^l T u_{xx}(x, s) u_s(x, s) dx ds &= T \int_0^t \left\{ -u_x u_t \Big|_{-l}^l + \int_{-l}^l u_x u_{xs} dx \right\} ds \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \int_{-l}^l \frac{1}{2} T u_x^2(x, s) dx ds = \frac{T}{2} \int_{-l}^l u_x^2(x, t) dx \end{aligned} \quad (1.63)$$

ya que  $u(-l, t) = u(l, t) = u(x, 0) = 0$ . De (1.63) y (1.60) esperamos que la cantidad que se conserve para soluciones de (1.55) sea

$$E(t) = \rho \int_{-l}^l \frac{1}{2} u_t^2(x, t) dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l u_x^2(x, t) dx . \quad (1.64)$$

Para probar la unicidad procedemos como en (1.57) llamando  $z$  la diferencia de dos soluciones de (1.55) y probaremos que  $z = 0$ . Para esto veremos que

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_{-l}^l z_t^2 dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l z_x^2 dx \quad (1.65)$$

satisface  $E(t) = E(0)$ . Esto se obtiene calculando

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-l}^l \rho z_t z_{tt} dx + T \int_{-l}^l z_x z_{xt} dx = \rho \int_{-l}^l z_t z_{tt} dx - T \int_{-l}^l z_t z_{xx} dx + T z_x z_t \Big|_{-l}^l \\ &= \rho \int_{-l}^l z_t (z_{tt} - c^2 z_{xx}) dx = 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

ya que  $z_t(-l, t) = z_t(l, t) = 0$ . De (1.66) se sigue que  $E(t) = E(0)$  y como  $E(0) = 0$ , tenemos que

$$\frac{\rho}{2} \int_{-l}^l z_t^2 dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l z_x^2 dx = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.67)$$

De (1.67) concluimos que  $z_t = z_x = 0$  para todas las líneas paralelas a  $-l \leq x \leq l$ . Esto nos garantiza que  $z = \text{constante}$  y como  $z = 0$  en la línea inicial tenemos que  $z = 0$  para  $-l \leq x \leq l$ ,  $t \geq 0$ . Que es el resultado deseado.

Nótese que esta prueba de unicidad usa fuertemente el hecho de que el movimiento se lleva a cabo en una región acotada. Daremos ahora una prueba de unicidad para una región no acotada.

Para probar este resultado recordemos que la fórmula de D'Alambert (1.54) nos muestra que la solución  $u$  en la región  $VAB$  de la Fig. 1.17 sólo depende de los datos iniciales en la recta  $AB$ .

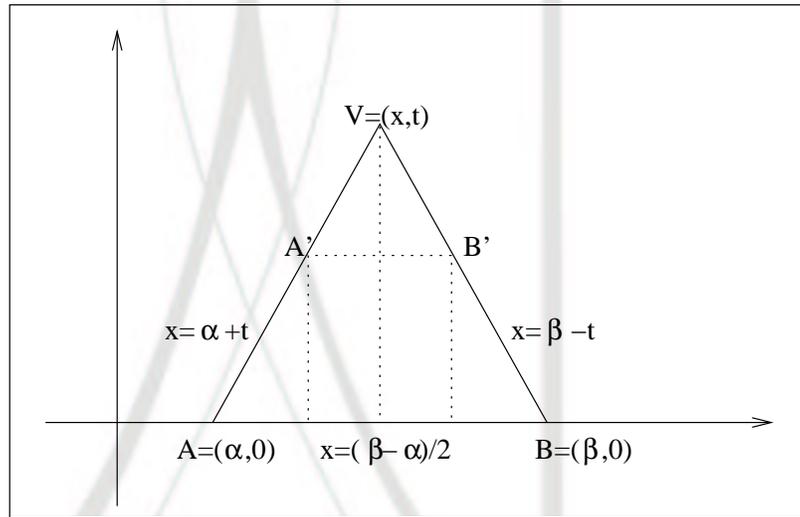


Fig. 1.17

Por este motivo esperamos que cualquier solución de (1.55) quede unívocamente determinada en  $VAB$  por los datos iniciales en  $AB$ . En particular, si los datos iniciales son cero en  $AB$ , deberá ser cero en toda  $VAB$ .

Ahora probaremos este resultado. Más precisamente: supongamos  $z(x, t)$  una solución de

$$z_{tt} = z_{xx}, \quad z_t = z = 0 \text{ en } AB,$$

entonces  $z = 0$  en  $VAB$ . Para probar el resultado consideremos de nuevo la energía de la solución en la recta  $A'B'$  como función del tiempo. Esto es

$$E(t) = \int_{x+t}^{\beta-t} \frac{1}{2} z_t^2 + \frac{1}{2} z_x^2 dx, \quad 0 \leq t \leq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Es de esperarse que  $E(t)$  no crezca ya que la región  $\alpha + t \leq x \leq \beta - t$  donde hay

movimiento se vuelve cada vez más pequeña cuando  $t \rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2}$ . Para probar esto calculamos  $E'(t)$  y tenemos:

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \int_{x+t}^{\beta-t} (z_t z_{tt} + z_x z_{xt}) dx + \frac{1}{2} \left\{ -(z_t^2 + z_x^2)(\beta - t, t) - (z_t^2 + z_x^2)(\alpha + t, t) \right\} \\
 &= \int_{x+t}^{\beta-t} z_t (z_{tt} - z_{xx}) dx - z_t z_x \Big|_{\alpha+t}^{\beta-t} - \frac{1}{2} (z_t^2 + z_x^2)(\beta - t, t) - \frac{1}{2} (z_t^2 + z_x^2) \\
 (\alpha + t, t) &= -\frac{1}{2} (z_t + z_x)^2 (\beta - t, t) - \frac{1}{2} (z_t - z_x)^2 (\alpha + t, t) \leq 0 \tag{1.68}
 \end{aligned}$$

De (1.68) concluimos que  $E'(t) \geq 0$  en  $VAB$  de donde se sigue que  $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$ . De aquí que  $E(t) = 0$  en todas las líneas horizontales  $A'B'$  en  $VAB$ . Esto nos muestra que  $z_t = z_x = 0$  en  $VAB$  y como  $z = 0$  en  $AB$  tenemos que  $z = 0$  en todo  $VAB$ . Esto prueba nuestra afirmación.

Este resultado nos da la unicidad para el problema de la cuerda infinita aplicándolo a todos los puntos  $V$ . Queda como un ejercicio, el probar con este método la unicidad de la solución del problema cuando sólo hay una pared que refleja. Se debe hacer esto con una combinación de (1.68) y (1.66).

Para mayores detalles consultar Courant-Hilbert [3] K. O. Friedrichs [7] y Jorge Ize [8].



<http://www.fenomec.unam.mx>

## Capítulo 2

# Sistemas de ecuaciones con características

En esta sección se discutirán sistemas de ecuaciones lineales que tiene características. Se analizarán problemas con valores iniciales y de frontera a partir de varios ejemplos. Se concluirá la sección con algunos problemas simples para las ecuaciones de Maxwell que se explican y se discuten con cierto detalle. Nuestra presentación sigue muy de cerca las notas de Friedrichs de propagación de ondas electromagnéticas.

### 2.1. El problema de las líneas de transmisión

Es un hecho conocido por todos que las señales eléctricas viajan a lo largo de los alambres con cierta velocidad. Ahora veremos cómo se puede describir cuantitativamente el fenómeno usando Ecuaciones en Derivadas Parciales. Para esto supondremos un cable recto representado por el eje  $x$  como el que se indica en la Fig. 2.1, con capacitancia constante  $c$  y una inductancia  $L$  por unidad de longitud.

Si se aplica un voltaje  $v(t)$ , una corriente  $i(t)$  fluirá hacia el lado derecho y nos interesa calcular esa corriente  $i(x, t)$  en todos los puntos del cable como función del voltaje aplicado  $g(t)$  en  $x = 0$ . Se deben encontrar las ecuaciones que relacionan a  $i$  y a  $v$  en el cable.

Las ecuaciones que necesitamos en este caso son la ley de conservación de la carga y la ley de Faraday.

La ley de conservación de la carga nos dice que si  $\rho(x, t)$  es la densidad de carga, tenemos entonces que

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+h} \rho(\xi, z) d\xi = i(x, t) - i(x + h, t). \quad (2.1)$$

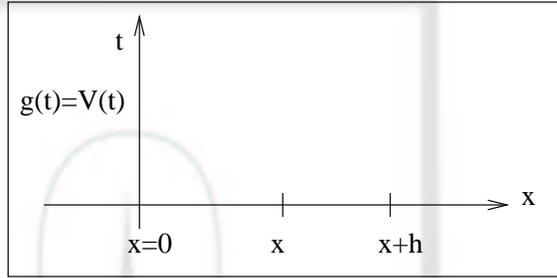


Fig. 2.1

Notemos que (2.1) es la misma que (1.1). En este caso por definición de  $c$  y del voltaje, tenemos que (2.1) se transforma en

$$cv_t + i_x = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es una sola ecuación para dos incógnitas. En (1.2) teníamos una relación algebraica  $Q(\rho)$  entre las dos incógnitas. En el caso del electromagnetismo no hay tal relación algebraica y la segunda ecuación para calcular  $i$  y  $v$  nos la dará la ley de Faraday. Para usar dicha ley examinemos la caída de voltaje  $v(x+h, t) - v(x, t)$  entre  $x+h$  y  $x$ . Sabemos por la ley de Faraday (que es experimental) que esa caída es proporcional a la rapidez de cambio  $i_t$ . En cantidades esto es

$$v(x+h, t) - v(x, t) = -Lhi_t(x, t) \quad (2.3)$$

donde  $L$  es la inductancia por unidad de longitud. Tomando en (2.3) el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , tenemos que

$$v_x + Li_t = 0 \quad (2.4)$$

Por lo tanto, las ecuaciones que queremos estudiar son

$$\begin{aligned} cv_t + i_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ Li_t + v_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ v(x, 0) &= i(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ v(0, t) &= g(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nótese que el valor  $i(0, t)$  no se especifica, ya que debe ser consistente con el valor de  $v(0, t)$  y su determinación es parte del problema. Las ecuaciones (2.5) corresponden a un cable que en  $t = 0$  está sin carga y sin corriente. Además, en  $x = 0$  se le aplica una señal de voltaje  $g(t)$ . Nos interesa conocer  $i$  y  $v$  a lo largo del cable. Esperamos soluciones en forma de ondas que se propagan hacia la derecha.

Al igual que en ecuaciones ordinarias es conveniente escribir (2.5) como matriz, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{x=0} &= \begin{pmatrix} g(t) \\ i(0, t) \end{pmatrix}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vemos que la ecuación (2.6) es análoga a la ecuación de primer orden, donde ahora el término de velocidad que multiplica a  $\frac{\partial}{\partial x}$  no es un escalar sino una matriz. Antes de resolver (2.6) consideremos el sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

es decir, un sistema donde la matriz está en forma diagonal. Vemos que (2.7) es equivalente a dos ecuaciones independientes (desacopladas)

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_1 w_x &= 0, \\ z_t + \lambda_2 z_x &= 0 \end{aligned}$$

que se resuelve inmediatamente con  $w = f(x - \lambda_1 t)$ ,  $z = g(x - \lambda_2 t)$ .

Vemos pues que para un sistema como (2.7) no hay dificultades. Por esto, al igual que en ecuaciones ordinarias trataremos de transformar (2.6) a su forma diagonal mediante un cambio de variables dependientes.

Introducimos entonces el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde  $U$  es una matriz invertible que se determinará en el proceso de reducción. Sustituyendo (2.8) en (2.7), tenemos que

$$\begin{aligned} U \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para que (2.9) sea como (2.7) debemos de escoger  $U$  de tal forma que

$$U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Para satisfacer (2.10) basta encontrar los valores propios de

$$\begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

que son  $\lambda_1 = (Lc)^{-\frac{1}{2}}$  y  $\lambda_2 = -(Lc)^{-\frac{1}{2}}$ . Entonces (2.10) queda como:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{L}{c}} \\ -1 & \sqrt{\frac{L}{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\frac{L}{c}} & \sqrt{\frac{L}{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Lc)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(Lc)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Transformando también las condiciones iniciales en (2.6) de acuerdo a (2.8) vemos que (2.6) es equivalente al sistema diagonal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (Lc)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(Lc)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{x=0} &= U^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ i(0, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g(t) + \sqrt{\frac{L}{c}} i(0, t) \\ -g(t) + \sqrt{\frac{L}{c}} i(0, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En (2.10) vemos que las ecuaciones para  $w$  y  $z$  se desacoplan y la situación se muestra en el plano  $(x, t)$  de la Fig. 2.2.

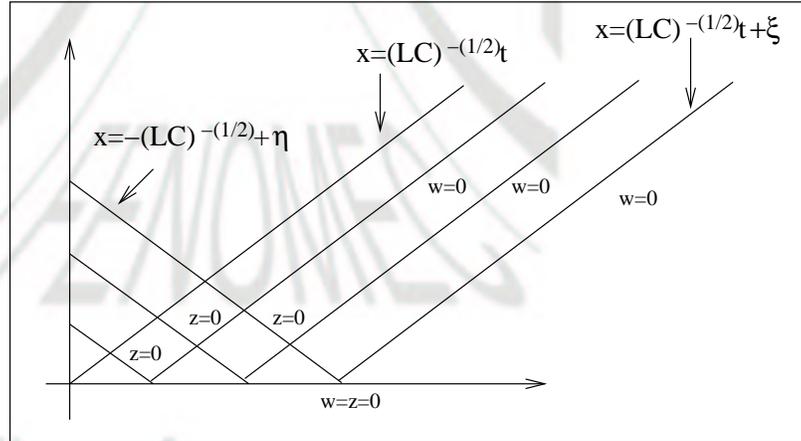


Fig. 2.2

Sabemos que  $w = \text{constante}$  y  $z = \text{constante}$  sobre las rectas  $x = t/\sqrt{Lc} + \xi$  y  $x = -t/\sqrt{Lc} + \eta$  respectivamente. Por esto vemos que  $z = w = i = v = 0$  para  $(x, t)$  abajo de la línea  $x = t/\sqrt{Lc}$ . Esto nos dice, al igual que la ecuación de primer orden, que las señales emitidas en  $x = 0$  viajan con velocidad  $\frac{1}{\sqrt{Lc}}$  que depende de las propiedades del cable.

A lo largo de las características que viajan hacia la izquierda tenemos que  $z = 0$ , en particular  $z = 0$  sobre la recta  $x = 0$ . Esto determina  $i(0, t)$  ya que

$$0 = z = -g(t) + i(0, t)\sqrt{\frac{L}{c}}, \quad i(0, t) = \sqrt{\frac{L}{c}}g(t).$$

El valor de  $w$  a lo largo de las características arriba de  $x = t/\sqrt{Lc}$  es

$$w(x, t) = g(t - \sqrt{Lc} x), \quad z(x, t) = 0. \quad (2.11)$$

De (2.11) pasamos a las variables originales usando (2.8) y obtenemos

$$v(t) = g(t - \sqrt{Lc} x), \quad i(t) = \sqrt{\frac{c}{L}}g(t - \sqrt{Lc} x). \quad (2.12)$$

Las fórmulas (2.12) representa ondas que viajan hacia la derecha sin distorsión con velocidad  $\frac{1}{\sqrt{Lc}}$ .

Queda como un ejercicio el resolver el problema con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¿Qué condiciones deben cumplir  $f(x)$  y  $g(x)$  para que no se propaguen disturbios hacia la izquierda?. Estudiar en detalle el plano  $(x, t)$ .

## 2.2. Propagación de ondas en agua

Consideremos ahora otro problema que da origen a un sistema de ecuaciones muy parecido al estudiado en (2.5). Este sistema aparece al analizar la propagación de ondas en agua. En primer lugar plantearemos las ecuaciones y después las resolveremos de una manera muy similar a las de líneas de transmisión.

Las ecuaciones de movimiento son un caso particular de las ecuaciones de *Navier – Stokes*, pero nosotros las deduciremos directamente. Para esto consideremos un fluido que se mueve con velocidad horizontal  $u$ , vertical  $w$ , y cuya superficie libre está descrita por  $\eta(x, t)$  tal como se ve en la Fig. 2.3. Supondremos además que el fondo de la playa

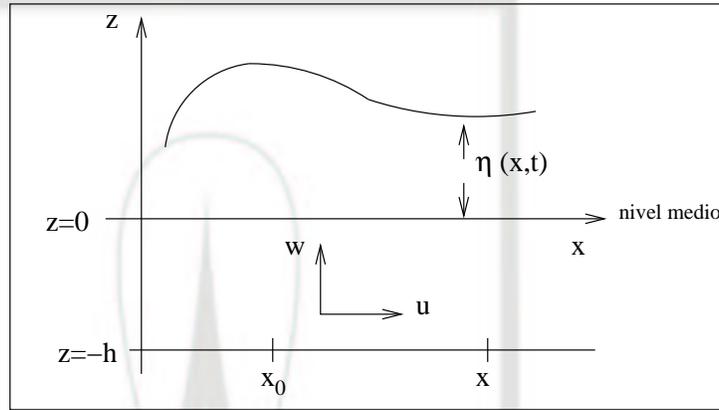


Fig. 2.3

tiene una profundidad constante.

Usando en la Fig. 2.3 la ley de la conservación de la masa entre  $x_0$  y  $x$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x (h + \eta(\xi, t)) d\xi &= \text{rapidez de cambio de la cantidad de agua entre } x_0 \text{ y } x \\ &= \text{Agua que entra en } x_0 - \text{Agua que sale en } x \\ &= \text{Flujo en } x_0 - \text{Flujo en } x. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Expresando en (2.13) el flujo en términos de  $u$  y  $\eta$  tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x (h + \eta(\xi, t)) d\xi = u(x_0, t) \{h + \eta(x_0, t)\} - u(x, t) \{h + \eta(x, t)\} \quad (2.14)$$

e ignorando en (2.14) los productos  $u\eta$  (ya que suponemos olas no muy altas excluyendo fenómenos de rompimiento) tenemos de (2.14) que

$$\eta_t + hu_x = 0. \quad (2.15)$$

Nuevamente (2.15) es una ecuación para dos incógnitas. La otra ecuación se encuentra de la dinámica usando la ley de Newton. Encontramos entonces que

$$u_t = \text{aceleración horizontal} = -\text{cambio de presión en } x = -p_x, \quad (2.16)$$

$$w_t = \text{aceleración vertical} = -\text{cambio de presión en } z - g = -p_z - g.$$

Las ecuaciones que controlan al movimiento del líquido son

$$\eta_t + hu_x = 0, \quad u_t + p_x = 0, \quad w_t + p_z + g = 0, \quad (2.17)$$

este es un sistema de tres ecuaciones para cuatro incógnitas. Debemos cerrar el sistema y para esto haremos una aproximación muy drástica en la última ecuación (2.17). Supondremos que la aceleración vertical  $w_t \ll 1$  y que  $p_z$  balancea a la fuerza de gravedad, es decir

$$p_z = -g. \quad (2.18)$$

En otras palabras decimos que el movimiento en la dirección vertical es tan pequeño que la presión está dada por la ley hidrostática (2.18). El valor de  $p$  lo tenemos integrando (2.18) entre la superficie libre y un punto del fluido, obteniendo así

$$p(x, \eta, t) - p(x, z, t) = \int_z^{\eta(x, t)} p_\xi(x, z, t) d\xi = - \int_z^{\eta(x, t)} g d\xi = -g(\eta(x, t) - z). \quad (2.19)$$

Como el valor de  $p(x, \eta, t)$  = presión atmosférica, entonces la podemos tomar como cero y tener

$$p(x, z, t) = g(\eta(x, t) - z) \quad (2.20)$$

que es la ley de la presión hidrostática. Sustituyendo (2.20) en (2.17) tenemos

$$\begin{aligned} \eta_t + hu_x &= 0, \\ u_t + g\eta_x &= 0, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones para la propagación de ondas. Desde luego deben ser suplementadas por condiciones iniciales y de frontera.

Un problema que resolveremos ahora es el de un pulso que se produce en un estanque de agua y viaja parte hacia la derecha del estanque y parte hacia la izquierda, donde encuentra paredes y se refleja. Nos interesa determinar la altura del agua en cada punto del estanque como función del tiempo. El problema por resolver es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=0} &= \begin{pmatrix} \eta(0, t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} \eta(l, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Notemos en (2.21) que en los extremos, el valor de  $\eta$  debe determinarse como parte del problema. Supondremos además que  $f(x)$  está concentrada en el centro del estanque. Para resolver (2.21) procedemos como en (2.8) e introducimos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & \sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}; \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{h}{g}} \\ -1 & \sqrt{\frac{h}{g}} \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema diagonal

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & -\sqrt{gh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= U^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, t = 0, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{x=0} &= U^{-1} \begin{pmatrix} \eta(0,t) \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{x=l} = U^{-1} \begin{pmatrix} \eta(l,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde las funciones  $\eta(0, t)$  y  $\eta(l, t)$  deben determinarse en la solución de (2.22). Al estudiar (2.22) usamos el plano  $(x, t)$  y observamos que  $w$  es constante a lo largo de las rectas  $x = \sqrt{gh} t + \xi$ , y  $z$  es constante a lo largo de las rectas  $x = -\sqrt{gh} t + \zeta$ . La situación se muestra en detalle en la Fig. 2.4.

Construiremos ahora la solución geoméricamente, tal como lo hicimos en el caso de

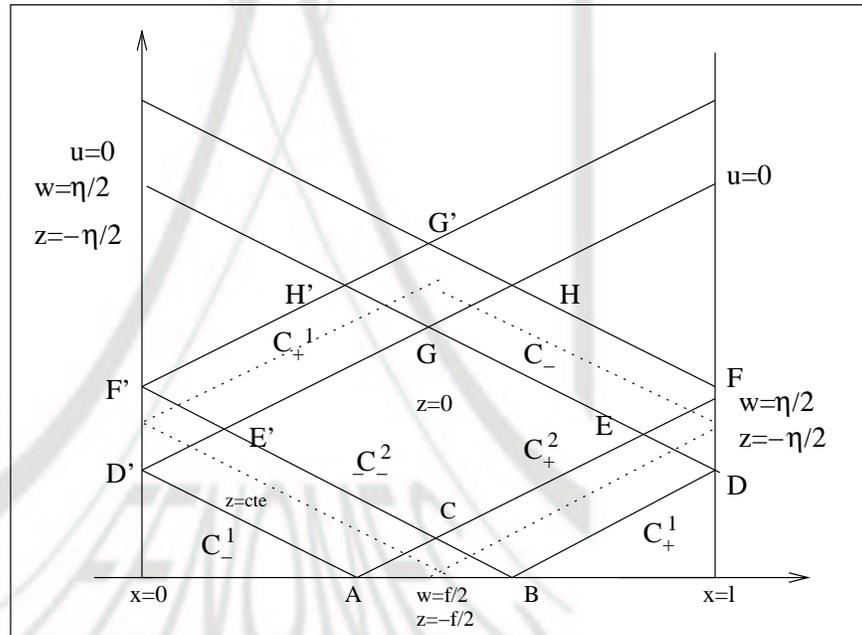


Fig. 2.4

la ecuación de onda. Empezaremos por la zona entre  $C_+^1$  y  $C_+^2$ ; como  $w$  es constante tenemos que en esa zona fuera de los triángulos ABC y DEF, la solución es

$$w = \frac{1}{2} f(x - \sqrt{gh} t), \quad z = 0.$$

Dentro del triángulo ABC tenemos que

$$w = \frac{1}{2}f(x - \sqrt{gh} t), \quad z = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t).$$

Ahora examinemos lo que sucede cuando el pulso llega a la pared ( $x = l$ ). Vemos que el disturbio que llega por la característica  $C_+$  determina el valor  $\eta(l, t)$  ya que

$$\eta(l, t) = 2w(l, t) = f(l - \sqrt{gh} t).$$

Este valor se transporta a lo largo de  $C_-$  y nos da que en la región  $EFHG$ , la solución es

$$z(x, t) = -\frac{1}{2}\eta\left(l, \frac{x-l}{\sqrt{gh}} + t\right) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad w(x, t) = 0.$$

En el triángulo DEF tenemos que

$$z(x, t) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad w(x, t) = \frac{1}{2}f(x - \sqrt{gh} t).$$

En la región a la izquierda de A se repite el mismo proceso y tenemos que en la región ACD'E'

$$z(x, t) = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t), \quad w(x, t) = 0.$$

También la característica  $C_-^1$  choca contra la pared en  $x = 0$  y determina el valor

$$\eta(0, t) = -\frac{1}{2}z(0, t) = f(\sqrt{gh} t)$$

y de esta ecuación se sigue que el valor de  $w$  en  $C_+^1$  es

$$w(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

En el triángulo D'E'F' la solución es

$$z(x, t) = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t), \quad w(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

Finalmente en la región GHG'H' la solución es

$$z(x, t) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad w(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

La solución en las variables originales puede obtenerse multiplicando  $(w, z)^T$  por  $U^{-1}$ . Queda como un ejercicio verificar que la solución que hemos obtenido es efectivamente

una solución de (2.21). De igual manera se deja como ejercicio encontrar la solución de este problema para tiempos posteriores.

Otro ejercicio es encontrar la solución del problema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} o & h \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=0} &= \begin{pmatrix} f(t) \\ u(0, t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} \eta(l, t) \\ 0 \end{pmatrix}, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la función  $f$  es conocida y las funciones  $u(0, t)$  y  $\eta(l, t)$  están por determinarse. ¿Cuál es la interpretación de la solución?

En general, los sistemas de ecuaciones de la forma

$$u_t + Au_x = 0, \quad u(x, 0) = g(x),$$

donde  $u$  es un vector y  $A$  una matriz (que mediante una transformación lineal se pueden pasar a un forma diagonal), se llaman sistemas simétricos hiperbólicos. Las rectas  $x = \lambda_1 t + \xi$ ,  $x = \lambda_2 t + \eta$ , donde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  son los valores propios de  $A$  se llaman las características del sistema. El método que empleamos para construir las soluciones prueba su existencia y unicidad. Se deja como un ejercicio el poner las hipótesis apropiadas sobre  $f$  y dar el detalle de los argumentos. Para mayores detalles y un tratamiento más avanzado y completo referimos al lector a las notas de *J.Ize* [8]

### 2.3. Las ecuaciones de Maxwell

Discutiremos ahora el sistema de ecuaciones parciales que describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos producidos por cargas y corrientes. Las ecuaciones de Maxwell son el resumen y formulación cuantitativos de la experiencia que se tiene con cargas, corrientes y sus interacciones. Estas ecuaciones no se deducen. En electricidad, son el equivalente a la ley de Newton en mecánica. A continuación describimos esquemáticamente algunos experimentos que dieron origen a las leyes que hoy formulamos en términos de las ecuaciones de Maxwell.

En primer lugar recordemos que el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  es un vector que depende de la posición y del tiempo. Es un hecho experimental que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra una carga  $Q$ , es proporcional a dicha carga. Esta es la ley de Gauss. En cantidades, si  $S$  es la superficie que acota a la carga  $Q$  y  $\mathbf{n}$  el vector normal a  $S$ , tenemos que

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{flujo de } \mathbf{E} \text{ a través de } S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.23)$$

y al escribir en (2.23)

$$Q = \int_V \rho(x, t) dx$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga, tenemos usando el Teorema de la Divergencia, que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

que es la expresión cuantitativa de la ley de Gauss.

También es un hecho experimental que las líneas de fuerza de un campo magnético son siempre cerradas. Si  $\mathbf{B}$  es el vector de campo magnético, el hecho anterior se expresa matemáticamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Ahora pasamos a estudiar las leyes que controlan la interacción de campos eléctricos y magnéticos. Estas leyes antes de Maxwell eran la ley de Faraday y la ley de Ampere. Empezaremos por recordar la ley de Faraday. Esta ley resume el hecho experimental de que si el flujo de un campo magnético a través de una espira de cable cambia con el tiempo, en el cable se induce un voltaje que es proporcional y de signo contrario al cambio del flujo. La expresión cuantitativa de esta ley (en el lenguaje moderno de los vectores, desconocido para Faraday) es

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.25)$$

donde  $V$  es el voltaje en la espira y  $\Phi$  el flujo de  $\mathbf{B}$  a través de  $S$ . Escribiendo la (2.25) en términos de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  tenemos

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.26)$$

donde  $C$  es la curva que forma la espira. Usando el Teorema de Stokes en (2.26) tenemos que

$$\mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

que es la expresión matemática de la ley de Faraday.

Por último discutiremos la ley de Ampere que es la expresión cuantitativa del hecho experimental de que al pasar una corriente eléctrica por un cable, se forma un campo magnético alrededor de dicho cable cuya circulación es proporcional a la intensidad de la corriente. Esta situación se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.5.

Cuantitativamente la ley de Ampere se expresa así

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \text{circulación de } \mathbf{B} \text{ alrededor de } C \\ &= \mu_0 \text{ intensidad de corriente} = \mu_0 I = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{aligned}$$

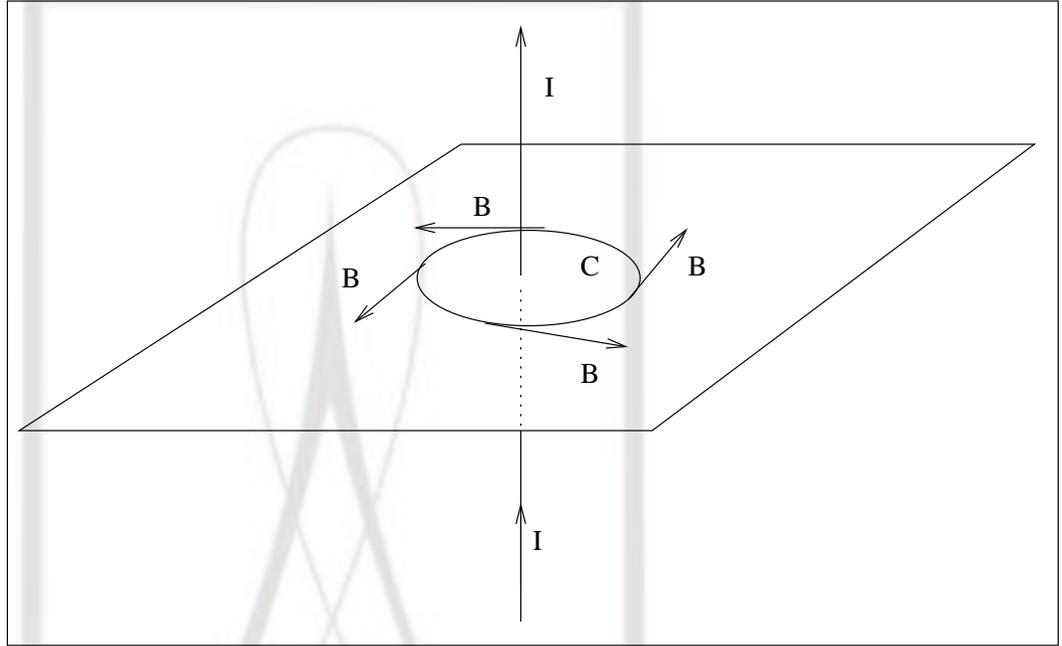


Fig. 2.5

donde  $\mathbf{J}$  es la intensidad de corriente que pasa por el alambre. Usando nuevamente el Teorema de Stokes obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.28)$$

Las leyes del electromagnetismo conocidas antes de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & (i) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (ii) \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, & (iii) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}. & (iv) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se pensaba que estas ecuaciones podían describir los fenómenos del electromagnetismo. En realidad la ley de Ampere fue encontrada sólo para corrientes estacionarias ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ) e independientes del tiempo, por lo tanto no hay ninguna razón para suponerlas válidas cuando  $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$  y  $\mathbf{J}$  cambia con el tiempo. Sin embargo, durante muchos años se usaron estas ecuaciones y los resultados obtenidos concordaban con el experimento. La idea del proceso que representan las ecuaciones (2.29) (que de hecho es la manera natural de resolverlas) es que  $\mathbf{J}$  determina a  $\mathbf{B}$  a través de (iv) de manera

instantánea. Los cambios de  $\mathbf{J}$  producen a su vez cambios en  $\mathbf{B}$  que mediante (iii) producen cambios en  $\mathbf{E}$ .

Un examen más cuidadoso muestra que (i) y (iv) son inconsistentes con la ley de conservación de carga  $\rho_t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , que sabemos vale para situaciones dependientes del tiempo. Esta inconsistencia se debe a que (iv) nos da  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo cual es consecuencia de que la ley de Ampere sólo vale para corrientes estacionarias. La razón del éxito de (2.29) es que cuando se usaba la conservación de carga no se usaba (iv) y viceversa. Fue Maxwell el que modificó la ley de Ampere (iv) para ser consistente con los experimentos. A (iv) le añadió un nuevo término, que según él pensaba, se debía al movimiento del “éter” (que hoy sabemos no existe). Por analogía a lo que pasa en otras situaciones, tomó esa corriente como proporcional a  $E_t$ ; modificando la ley de Ampere para tener en cuenta a esa corriente en la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \mathbf{E}_t). \quad (2.30)$$

Remitimos al lector al trabajo original de Maxwell [11] (editado por Dover) para una lectura sobre estos argumentos. Con (2.30) las ecuaciones del electromagnetismo que hoy conocemos como Ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, (i)' \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, (ii)' \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, (iii)' \\ \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_t - \nabla \times \mathbf{B} &= -\mu_0 \mathbf{J}, (iv)' \end{aligned} \quad (2.31)$$

que deben estar suplementadas por condiciones iniciales y de frontera. Queda ahora como un ejercicio mostrar que si  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  satisfacen (iii)' y (iv)' y además  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$  satisfacen la ecuación de continuidad, entonces  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  satisfacen automáticamente (i)' y (ii)'. Esto nos muestra que dadas  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  que cumplen la ecuación de continuidad, debemos resolver (iii)' y (iv)' para determinar los campos.

Notemos que (i)' hasta (iv)' implican un proceso diferente en la generación de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  que el dado por (i) hasta (iv). Examinando (iv) vemos que en general  $\nabla \times \mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{J}$  y que este desbalance produce un cambio  $\mathbf{E}_t$  el que a su vez, por medio de (iii)', produce un cambio en  $\mathbf{B}$ .

Queda el problema de examinar por qué las ecuaciones (i)-(iv) dan buenos resultados cuando las ecuaciones reales son (i)'-(iv)'. Para discutir esto estudiaremos en detalle un caso particular que también nos servirá para ilustrar el manejo de (i)'-(iv)'.

Consideremos pues el problema de determinar el campo eléctrico y magnético producidos por una corriente que circula en un plano delgado como el de la Fig. 2.6.

Supondremos que  $J_3(t)\hat{k}$  es diferente de cero en la franja  $-\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}$  y sólo para  $t \geq 0$ . Supondremos también que  $\rho = 0$ , es decir que no hay densidad de carga, y que los campos  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  si  $t = 0$ . Debido a que no hay dependencia en  $y, z$  podemos buscar una solución de (iii)' y (iv)' que dependa solamente de  $x$  y  $t$ . En este caso

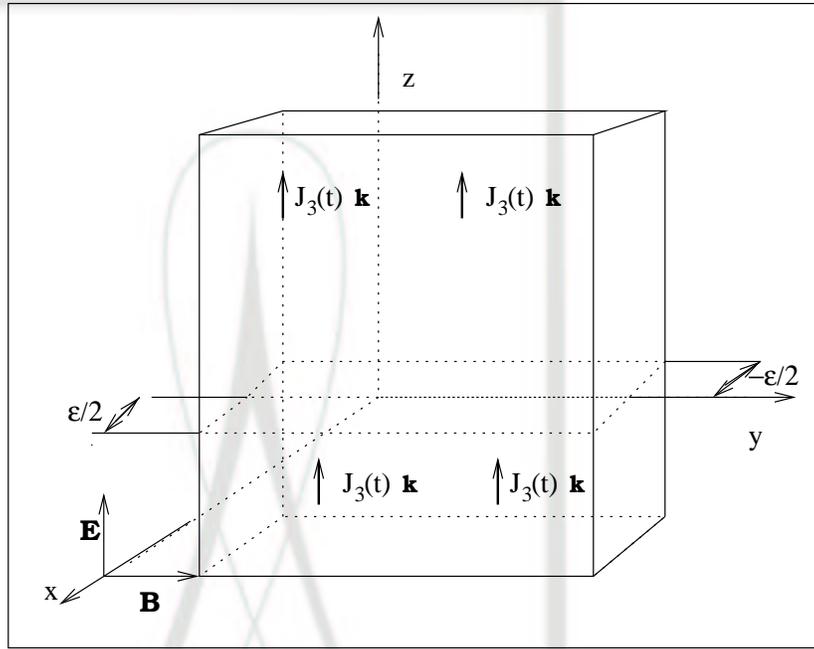


Fig. 2.6

tenemos tomando

$$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3), \quad \mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3),$$

tenemos que las ecuaciones (2.31) en componentes son

- 1)  $E_x^1 = 0,$
  - 2)  $B_x^1 = 0,$
  - 3)  $B_t^1 = 0,$
  - 4)  $B_t^2 - E_x^3 = 0,$
  - 5)  $B_t^3 + E_x^2 = 0,$
  - 6)  $\epsilon_0 \mu_0 E_t^1 = 0,$
  - 7)  $\epsilon_0 \mu_0 E_t^2 - B_x^3 = 0,$
  - 8)  $\epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 = -\mu_0 J_3(t).$
- (2.32)

Debido a que las derivadas con respecto a  $z$  y  $y$  son cero. Además sabemos que  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  en  $t = 0$ . De 1), 2), 3), 6) concluimos que  $E^1 = B^1 = 0$  para  $t \geq 0$  (se

deja como ejercicio el hacer los detalles). De 5) y 7) vemos que

$$B_{tt}^3 = \epsilon_0 \mu_0 B_{xx}^3, \quad B^3(x, 0) = B_t^3(x, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} E^2(x, 0) = 0,$$

debido a las condiciones iniciales. Por el teorema de unicidad para la ecuación de onda vemos que  $B^3 = 0$  si  $t \geq 0$ . De la misma forma vemos que  $E^2 = 0$ ; quedando como ejercicio comprobar esto. Las ecuaciones (2.32) se reducen a

$$\begin{aligned} B_t^2 - E_x^3 &= 0, \\ \epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 &= -\mu_0 J_3(x, t), \\ B^2(x, 0) &= E^3(x, 0) = 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

que es un sistema hiperbólico no homogéneo parecido a los ya estudiados.

Antes de resolver (2.33) haremos una aproximación muy común en matemáticas aplicadas. Se considerará una lámina de ancho cero, y la corriente total que circula por ella se mantendrá finita. Lo anterior se logra tomando

$$J_3(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} j(t) & -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & |x| \geq \frac{\epsilon}{2}, \end{cases}$$

ya que en este caso la cantidad de corriente que circula es  $j(t)$ . Entonces podemos reemplazar la segunda ecuación (2.33) por

$$\epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 = 0.$$

Sin embargo la función  $B^2$  no será continua en  $x = 0$ , ya que integrando tenemos

$$\epsilon_0 \mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} E_t^3 dx - \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} B_x^2 dx = -\mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{j(t)}{\epsilon} dx,$$

de donde se sigue que

$$\epsilon_0 \mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} E_t^3 dx - B^2\left(\frac{\epsilon}{2}, t\right) + B^2\left(-\frac{\epsilon}{2}, t\right) = -\mu_0 j(t)$$

y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , suponiendo  $E_t^3$  acotado, obtendremos que

$$B^2(0^+, t) + B^2(0^-, t) = \mu_0 j(t).$$

De la misma forma la primera ecuación (2.33) nos da

$$E^3(0^+, t) + E^3(0^-, t) = 0.$$

Finalmente las ecuaciones para el campo  $E^3$  y  $B^2$  son:

$$\begin{aligned}
 B_t^2 - E_x^3 &= 0, & |x| > 0, \\
 c^{-2}E_t^3 - B_x^2 &= 0, & |x| > 0, & c^2 = \mu_0\epsilon_0, \\
 E^3 = B^2 &= 0, & t = 0, \\
 E^3(0^+, t) - E^3(0^-, t) &= 0, & t \geq 0, \\
 B^2(0^+, t) - B^2(0^-, t) &= \mu_0 j(t), & t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Podemos resolver (2.34) diagonalizando la matriz y procediendo como en (2.8). Sin embargo es conveniente identificar las direcciones características directamente de la ecuación (2.34). Para esto sumamos y restamos las ecuaciones (que es equivalente a multiplicar por  $U$ ) y llamando  $E^3 = E$  y  $B^2 = B$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
 (c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(E - cB) &= 0 \\
 (c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})(E + cB) &= 0 \\
 (E \pm cB) &= 0, & t = 0, \\
 (E \pm cB)(0^+, t) - (E \pm cB)(0^-, t) &= \pm c\mu_0 j(t), & t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

De acuerdo con (2.35) vemos en el plano  $(x, t)$  de la Fig. 2.4 que

$$\begin{aligned}
 E - cB &= cte. & \text{a lo largo de } x = ct + \xi, \\
 E + cB &= cte. & \text{a lo largo de } x = -ct + \eta.
 \end{aligned}$$

En la Fig. 2.4 vemos que en la región a la derecha de  $x = ct$  y a la izquierda de  $x = -ct$ ,  $E = B = 0$  ya que las características a través de esos puntos llevan el valor inicial cero. Concluimos pues que los campos eléctricos y magnéticos se propagan con velocidad  $c = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Calculemos ahora el valor de la solución en  $P$ . A través de  $P$  pasa la característica  $C_-$ , con lo cual

$$E + cB = 0 \quad \text{en } (x, t) = P. \tag{2.36}$$

También pasa la característica  $C^+$  y a lo largo de ella se tiene que  $E - cB$  es constante. De aquí que

$$(E - cB)(x, t) = (E - cB)(0, t - \frac{x}{c}). \tag{2.37}$$

Nos falta calcular  $E - cB$  a lo largo de la recta  $x = 0$ . Para esto usamos la relación que nos da la discontinuidad de  $E - cB$  en  $x = 0$ . De la Fig. 2.7 vemos que cuando  $x < 0$ ,  $E - cB = 0$ , de donde obtenemos que

$$(E - cB)(0, \tau) = -c\mu_0 j(\tau).$$

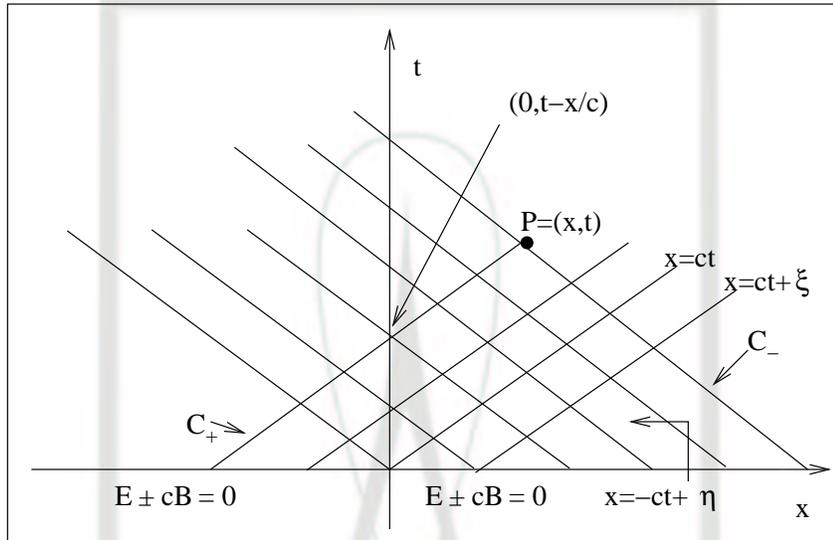


Fig. 2.7

Usando esta ecuación así como las ecuaciones (2.36) y (2.37), obtenemos

$$(E + cB)(x, t) = 0, \quad (E - cB)(x, t) = -c\mu_0 j \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

de donde se encuentra que

$$E(x, t) = -\frac{c\mu_0}{2} j \left(t - \frac{x}{c}\right), \quad B(x, t) = \frac{\mu_0}{2} j \left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (2.38)$$

En forma similar (queda como ejercicio el verificarlo) tenemos que para  $x > 0$

$$E(x, t) = -\frac{c\mu_0}{2} j \left(t + \frac{x}{c}\right), \quad B(x, t) = -\frac{\mu_0}{2} j \left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (2.39)$$

Las ecuaciones (2.38) y (2.39) representan ondas que se propagan con velocidad  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Estas son las ondas electromagnéticas que son la predicción de las ecuaciones de Maxwell y uno de los descubrimientos más grandes del siglo pasado. Nótese que en un punto fijo  $x_0$ ,  $E = B = 0$  hasta que  $t = x_0/c$ , tiempo que tarda en llegar la primera señal. Esto nos muestra que los campos no se producen instantáneamente, sino que viajan con una velocidad finita.

Se deja como un ejercicio el resolver las ecuaciones de Maxwell cuando se tiene una pared en  $x = l$ . Si suponemos a la pared conductora, tenemos que  $E = 0$  en  $x = l$ .

Las ecuaciones por resolver son:

$$\begin{aligned} B_t - E_x &= 0, & -\infty < x < 0, & 0 < x \leq l, & t > 0, \\ E_t - c^2 B_x &= 0, & -\infty < x < 0, & 0 < x \leq l, & t > 0, \\ E = B &= 0, & t = 0, \\ E(0^+, t) - E(0^-, t) &= 0, & t \geq 0, \\ B(0^+, t) - B(0^-, t) &= \mu_0 j(t), & t \geq 0. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $j(t)$  tiene la forma

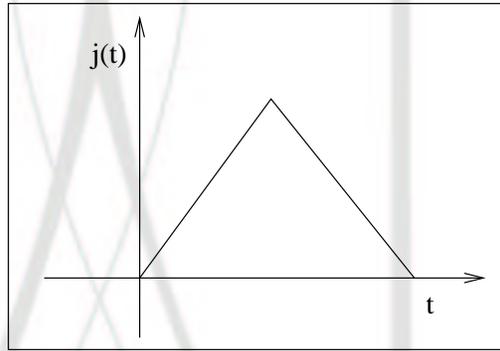


Fig. 2.8

Discuta en detalle los campos para  $0 \leq x \leq l$ . Para terminar esta sección veamos cómo las ecuaciones (i)-(iv) son una aproximación a (i)'-(iv)' en el sentido que las soluciones de (i)'-(iv)' se parecen a las soluciones de (i)-(iv) para ciertos valores de  $(x, t)$ .

Vemos de (2.38) que cuando  $\frac{x}{c} \ll t$  (es decir  $x$  está cerca del objeto emisor) podemos aproximar (2.38) por su serie de Taylor en la forma

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2} j(t) + \theta \left( \frac{1}{c} \right), \\ E &= -\frac{c\mu_0}{2} j(t) + \frac{x\mu_0}{2} j'(t) + \theta \left( \frac{1}{c} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Observemos que (2.40) son soluciones de (i)-(iv) apropiadas a esta situación. Es decir, soluciones de

$$\begin{aligned} B_t - E_x &= 0, & B_x &= 0, \\ E(0^+, t) - E(0^-, t) &= 0, & B(0^+, t) - B(0^-, t) &= \mu_0 j(t). \end{aligned}$$

En el caso  $x \ll ct$  (que es frecuente ya que  $c$  es grande por ser la velocidad de la luz) las ecuaciones (i)-(iv) proveen una buena descripción del fenómeno. En particular, de

(2.40) vemos que  $B$  y luego  $E$  son producidos instantáneamente. Sin embargo, las ecuaciones (i)-(iv) no pueden describir el fenómeno de propagación para  $x$  cercanas a  $ct$ . Resultará de interés para el lector comparar esta discusión con la del Vol. II del libro “Lectures on Physics” de Feynmann [5] donde se discute este problema con argumentos físicos.





<http://www.fenomec.unam.mx>

## Capítulo 3

# Ecuaciones elípticas

### 3.1. Introducción y algunos problemas típicos

Las ecuaciones elípticas describen situaciones que no cambian en el tiempo, o bien situaciones que son en cierta forma periódicas y cuya dependencia temporal puede eliminarse reduciéndose a un problema estático. Aparecen en varios campos de aplicación, y nosotros discutiremos algunos problemas típicos en elasticidad, mecánica de fluidos y electrostática. En esta sección discutimos algunos problemas tipo.

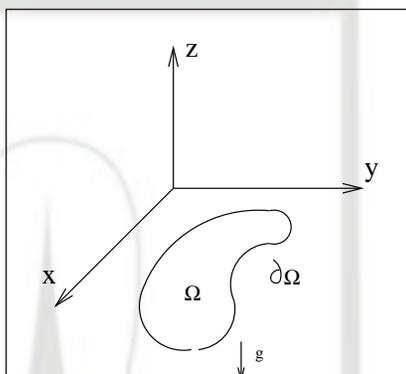
#### 3.1.1. Ecuación de una membrana elástica en equilibrio

Tomamos una membrana elástica con una fuerza de restitución  $T$  por unidad de longitud. Nos interesa saber qué forma adopta la membrana bajo su propio peso cuando se encuentra, rígidamente sujeta en su borde, a la posición de equilibrio. Fijamos el sistema de coordenadas tal como se muestra en la figura, y denotamos por  $\Omega$  la región que ocupa la membrana cuando sobre ella no actúa ninguna fuerza debido al peso. Por otro lado, sea  $\partial\Omega$  el borde de la membrana, y denotemos también por  $z = u(x, y)$  la forma que la membrana toma cuando se deforma bajo la acción de su propio peso. Ver la Fig. 3.1.

La idea es obtener una ecuación que nos diga la forma de la membrana que determina a la función  $u(x, y)$  cuando las fuerzas de tensión (que se oponen a la deformación de la membrana) y el peso (que deforma), están en equilibrio. Queda como ejercicio el utilizar la segunda ley de Newton para obtener la ecuación para  $u(x, y)$ .

Nosotros obtendremos la ecuación para  $u$  utilizando el principio de mínima energía, el cual nos dice que “un sistema mecánico se encuentra en su posición de equilibrio, cuando su energía de configuración (o potencial) es mínima”. Debemos pues encontrar una expresión para la energía de la membrana en términos de su forma  $u(x, y)$ .

En nuestros casos la energía de configuración tiene dos partes. Una es la elástica



debido al trabajo realizado por la fuerza  $T$ . Es una hipótesis que se debe verificar experimentalmente, que la energía elástica está dada por

$$\text{Energía elástica} / \text{Área de la membrana sin deformar} = T(\text{Área de la membrana deformada} - \text{Área sin deformar}) / \text{Área sin deformar}.$$

En términos de la función  $u$  tenemos que

$$\text{Energía elástica} / \text{Área sin deformar} = T\{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} - 1\}. \quad (3.1)$$

La energía potencial gravitacional por unidad de área debido a la gravedad, es decir al peso de la membrana, es  $\rho gu$  donde  $\rho$  es la masa de la membrana por unidad de área. La energía total se obtiene sumando (3.1) y (??) e integrando. Con lo anterior obtenemos que

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ T\{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} - 1\} + \rho gu \right\} dx dy. \quad (3.2)$$

Aplicamos pues el principio de mínima energía a (3.2). Para obtener la  $u$  que minimiza a dicha ecuación, encontraremos primero una condición necesaria para que lo haga, y posteriormente probaremos en algunos casos límites de (3.2) que efectivamente la minimiza.

Para obtener la condición necesaria deseada observamos que si  $u_0$  minimiza a  $E$ , entonces la función

$$E_h(t) = E(u_0 + th)$$

donde  $h$  es una función fija tal que  $h = 0$  en  $\partial\Omega$  y  $t$  un parámetro, alcanza un mínimo como función de  $t$  en  $t = 0$ . Esto es cierto para toda  $h$ , tal que  $h = 0$  en  $\partial\Omega$ . De esta observación tenemos, al igual que en cálculo, que una condición necesaria para que  $u_0$  minimice a (3.2) es que

$$E'_h(0) = 0 \quad \forall h, \quad \text{tal que } h = 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (3.3)$$

El cálculo de (3.3) se deja como un ejercicio, de manera que obtenemos:

$$E'_h(0) = \int_{\Omega} \left\{ T(1 + u_0^2 + u_0^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla u_0 \cdot \nabla h + \rho g h \right\} dx dy. \quad (3.4)$$

Es conveniente transformar (3.4) integrando por partes el primer término obteniendo así

$$E'_h(0) = \int_{\Omega} \left\{ -\nabla \cdot (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-\frac{1}{2}} T \nabla u_0 + \rho g \right\} h dx dy = 0. \quad (3.5)$$

Como (3.5) es cero para  $h \neq 0$ , el otro factor tiene que ser también cero. De aquí que la ecuación para  $u_0$  es:

$$\begin{aligned} T \left\{ (1 + u_{0x}^2 + u_{0y}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{0x} \right\}_x + \left\{ (1 + u_{0x}^2 + u_{0y}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{0y} \right\}_y &= \rho g; \quad (x, y) \in \Omega, \\ u_0 &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es una ecuación no lineal complicada y por el momento debemos conformarnos con algo menos ambicioso. Un caso de interés es cuando las pendientes de la membrana  $u_x$  y  $u_y$  son pequeñas, esto dependerá del balance entre las fuerzas elásticas, el peso de la membrana, así como su dimensión característica. De aquí que una versión simplificada de (3.6) es (despreciando los términos  $u_x^2$  y  $u_y^2$ ) la ecuación lineal

$$\begin{aligned} u_{0xx} + u_{0yy} &= \frac{\rho g}{T}, \quad \text{en } \Omega, \\ u_0 &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta expresión (3.7) se llama la ecuación de Poisson. Observamos que (3.7) nos dice que la concavidad de  $u$  es hacia arriba, lo cual está de acuerdo con nuestra intuición y experiencia.

Resolvemos ahora un caso especial de (3.7), el caso cuando  $\Omega$  es un círculo de radio  $a$ . En esta situación es conveniente usar coordenadas polares y escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (r u_{0r})_r + \frac{1}{r^2} u_{0\theta\theta} &= \frac{\rho g}{T}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u_0(a, \theta) &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Debido a la simetría del problema podemos buscar soluciones que no dependen de  $\theta$  y obtener así

$$u_0(r, \theta) = \frac{\rho g}{4T} (r^2 - a^2) \quad (3.8)$$

que es la ecuación de un paraboloides. Es de interés examinar cuándo la solución (3.8) es consistente con la hipótesis de linealización. Dicha consistencia depende de la estimación

$$\max |u_{0r}| = \frac{\rho g a}{2T} \leq \epsilon.$$

Cuando  $\epsilon \ll 1$  efectivamente la solución es consistente con la hipótesis de una teoría lineal. El significado de  $\epsilon$  es el esperado. Nos dice que para membranas de un radio fijo, la pendiente es pequeña cuando las fuerzas elásticas son grandes comparadas con el peso de la membrana, i.e. es difícil deformar una membrana pequeña.

La ecuación (3.8) nos prueba la existencia de soluciones para (3.7) en un caso particular. La prueba de existencia en casos más generales es objeto de otras partes del curso. Lo que sí podemos hacer es probar la unicidad de soluciones de (3.7) cuando  $u_0 \in C^2(\Omega')$  donde  $\Omega'$  es una región que contiene a  $\Omega \cup \partial\Omega$ . Para esto basta ver que la única solución  $u_0 \in C^2(\Omega')$  del problema

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_0 &= 0 \text{ en } \Omega, \\ u_0 &= 0 \text{ en } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.9}$$

es  $u_0 = 0$ .

Este hecho es consecuencia inmediata del teorema de Green ya que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx dy + \int_{\Omega} u_0 (\nabla^2 u_0) dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u_0 \nabla u_0) dx dy = \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} dl = 0$$

y como  $u_0$  satisface (3.9) tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx dy = 0, \quad u_0 = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

de donde  $u_0 = 0$ . Veremos ahora que la solución de (3.7), si es que la hay en  $C^2(\Omega')$ , efectivamente minimiza a la energía potencial correspondiente que en este caso es un desarrollo a primer orden de (3.2)

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} (u_x^2 + u_y^2) + \rho g u \right\} dx dy.\tag{3.10}$$

Para mostrar que  $E(u_0)$  es mínimo de  $E(u)$  en la clase  $C^2(\Omega')$  de funciones que son cero en  $\partial\Omega$ , basta calcular

$$\begin{aligned}E(u_0 + h) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} (u_0^2_x + u_0^2_y) + \rho g u_0 \right\} dx dy + \\ &\int_{\Omega} \left\{ T u_0_x h_x + T u_0_y h_y + \rho g h \right\} dx dy + \int_{\Omega} \frac{T}{2} |\nabla h|^2 dx dy > E(u_0)\end{aligned}\tag{3.11}$$

para toda  $h \in C^2(\Omega')$ , con  $h = 0$  en  $\partial\Omega$  ya que el segundo término de (3.11) es cero, porque es precisamente  $E'_h(0)$  y satisface la ecuación de Poisson así como la condición de frontera. Este resultado ha sido probado bajo condiciones muy restrictivas y poco realistas. Sin embargo, solamente se pretendió ilustrar la situación de una manera simple. Condiciones más precisas y realistas se discutirán en otras partes del curso.

### 3.1.2. Ecuaciones elípticas en mecánica de fluidos

Supongamos un fluido que está moviéndose en tres dimensiones y cuyo movimiento es estacionario. Es decir, en cada punto  $\mathbf{x}$  del espacio, la velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  es la misma durante todo el tiempo. En este caso una partícula del fluido satisface las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$$

y su trayectoria se llama línea de flujo. Deseamos encontrar ecuaciones que nos permitan encontrar al vector  $\mathbf{v}$  en situaciones de interés. Una de estas situaciones es cuando el fluido no tiene remolino, condición que se expresa por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Además de (3.12) necesitamos la ecuación de conservación de la masa. Ésta la obtenemos considerando una superficie tubular  $S_1$  formada por líneas de flujo y acotada en sus extremos por  $S_2$  y  $S_3$ . Supongamos además que en el interior del tubo hay una superficie  $S_4$  por la que entra o sale fluido con una velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  que es una función dada. En una situación estacionaria, la cantidad de fluido que entra al tubo a través de  $S_2$  y  $S_4$  es la misma que sale por  $S_3$ , ya que por  $S_1$  no entra ni sale fluido debido a que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $S_1$ , donde  $\mathbf{n}$  es la normal a  $S_1$ . Haciendo el balance obtenemos, si  $\rho$  es la densidad del fluido, que

$$\begin{aligned} - \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_2 \text{ en 1 segundo,} \\ \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_3 \text{ en 1 segundo,} \\ \int_{S_4} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_4 \text{ en 1 segundo,} \end{aligned}$$

de donde

$$- \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_4} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Usando el teorema de la divergencia obtenemos que

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{w})$$

y como  $\mathbf{w}$  es conocida, ya que tiene que ver con la intensidad de la fuente, tendremos que como  $\nabla \times \mathbf{v}$ ; si  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , entonces  $\phi$  satisface

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = f \quad (3.13)$$

donde la función  $f$  es la intensidad de la fuente (o sumidero) que es una función conocida. La ecuación (3.13) debe suplementarse con condiciones de frontera. Supongamos

que  $\phi$  es el potencial de  $\mathbf{v}$  en un fluido no viscoso. En este caso se sabe que sobre una superficie rígida las líneas de flujo son paralelas a ella, de aquí que sobre paredes rígidas la condición apropiada es:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \phi_n = 0$ .

En las extremidades de un tubo debe especificarse el flujo, es decir especificar  $\phi_n$ . Por ejemplo, el flujo estacionario en un tubo  $\Omega$  queda completamente especificado por la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}(\rho\phi_x)_x + (\rho\phi_y)_y + (\rho\phi_z)_z &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \phi_n &= 0, \text{ pared rígida,} \\ \phi_n &= f_1, \text{ extremo inicial del tubo,} \\ \phi_n &= f_2, \text{ extremo final del tubo.}\end{aligned}\tag{3.14}$$

En el caso de una densidad constante, la (3.1.2) es la ecuación de la membrana con  $\rho = 0$ , excepto que aquí las condiciones de frontera son distintas.

Otra situación de mucho interés donde aparecen las ecuaciones elípticas, es en la aproximación a las ecuaciones de Maxwell. En electrostática cuando  $\mathbf{E}_t = \mathbf{B}_t = \mathbf{0}$ , es decir, los campos no dependen del tiempo; tenemos que las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J},\end{aligned}$$

suplementadas por las condiciones de frontera apropiadas. Obsérvese que en el caso estático las ecuaciones para  $\mathbf{E}$  y para  $\mathbf{B}$  son independientes.

Supongamos que queremos determinar el campo eléctrico en una región como la que se ve en la Fig. 3.2. donde la superficie  $S$  es conductora. En ese caso  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Las ecuaciones que determinan a  $\mathbf{E}$  son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ en } S.\end{aligned}$$

Como  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , tenemos que  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ , y  $\phi$  satisface el problema de Neumann

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ dentro de } S, \\ \phi_n &= 0, \text{ en } S,\end{aligned}$$

que es una ecuación elíptica igual a la de la membrana que discutimos al principio de esta sección.

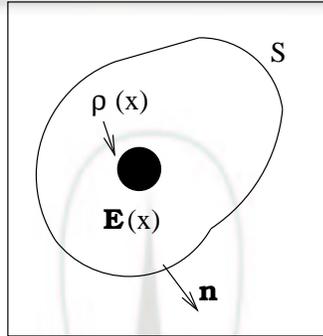


Fig. 3.2

## 3.2. Soluciones a algunos problemas elípticos por separación de variables

### 3.2.1. Problemas de Dirichlet

Como primer ejemplo consideramos el problema de Dirichlet para un disco de radio  $a$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, & 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) &= f(\theta); \quad f(0) = f(2\pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La idea es reducir (3.15) a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para lograr esto observamos que  $u(r, \theta)$  es periódica como función de  $\theta$ , por este motivo puede desarrollarse en serie de Fourier de la forma

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(r) \operatorname{sen} n\theta + b_n(r) \operatorname{cos} n\theta\}, \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) d\xi, & a_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) \operatorname{sen} n\xi d\xi, \\ b_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) \operatorname{cos} n\xi d\xi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En (3.16) los coeficientes son funciones de una sola variable que esperamos determinar a partir de la ecuación parcial y la condición de frontera. Sustituyendo (3.16) en (3.15) obtenemos

$$\frac{1}{r}(ra_{0r})_r = 0, \quad \frac{1}{r}(ra_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, \quad \frac{1}{r}(rb_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0. \quad (3.18)$$

La condición de frontera y el hecho que

$$f(\theta) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n(r) \operatorname{sen} n\theta + g_n(r) \operatorname{cos} n\theta\}$$

nos da condiciones de frontera para (3.18) en la forma

$$a_0(a) = g_0, \quad a_n(a) = f_n, \quad b_n(a) = g_n. \quad (3.19)$$

Una condición adicional que imponemos sobre la función  $u$  es que sea acotada.

La ecuación para  $a_0$  tiene por soluciones  $a_0 = cte.$  y  $a_0 = \ln r$ . Para satisfacer las condiciones de frontera y de regularidad, tenemos que  $a_0 = g_0$ . Las ecuaciones para  $a_n$  y  $b_n$  son ecuaciones de Euler de la forma

$$r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0,$$

con soluciones  $r^n$ ,  $r^{-n}$ . Como deseamos soluciones regulares para  $a_n$  y  $b_n$  tenemos que

$$a_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n f_n; \quad b_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n g_n. \quad (3.20)$$

Utilizando (3.20) tenemos una solución formal

$$u(r, \theta) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{f_n \operatorname{sen} n\theta + g_n \operatorname{cos} n\theta\}. \quad (3.21)$$

Para verificar que (3.21) es efectivamente una solución de (3.15) hay que precisar lo que se entiende por una solución de (3.15).

Por una solución de (3.15) entenderemos una función  $u(r, \theta)$  dos veces diferenciable para  $r < a$ , continua para  $r \leq a$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & r < a, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) &= f(\theta), & & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Hay otros conceptos de solución; por ejemplo podemos decir que  $u$  es solución de la (3.15), si  $u$  es dos veces derivable para  $r < a$  y  $\lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = f(\theta)$  sin ser  $u$  necesariamente continua para  $r = a$ . Soluciones de este tipo se llaman soluciones clásicas. Claramente el tipo de solución buscada depende mucho del dato  $f(\theta)$ . Nosotros probaremos aquí que cuando el dato  $f(\theta)$  es dos veces continuamente derivable y periódico, él y sus derivadas, entonces  $u(r, \theta)$  provee una solución clásica de la (3.15) que es continua hasta la frontera. En (3.21) vemos que la diferenciabilidad de la serie depende de la rapidez con la cual los coeficientes  $f_n$  y  $g_n$  decaen a cero. Nosotros probaremos que cuando  $f \in C^2[0, 2\pi]$  y es periódica, la serie converge de tal forma que permite su derivación término a término para  $r < a$  y define una función continua para  $r \leq a$ .

Para probar la convergencia de (3.21) necesitamos estimar los coeficientes  $f_n$  y  $g_n$ . Tomamos por ejemplo

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos n\xi}{n} f(\xi) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\xi f'(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\xi f'(\xi) d\xi = -\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{2\pi} f''(\xi) \sin n\xi d\xi \end{aligned}$$

de donde

$$|f_n| \leq \frac{\text{máx}|f''|}{n^2\pi} = \frac{K}{n^2\pi}.$$

Análogamente

$$g_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos n\xi d\xi, \quad |g_n| \leq \frac{K}{n^2\pi}.$$

Para probar que (3.21) es dos veces derivable para  $r < a$  recordamos que una condición suficiente para que la derivada de una serie uniformemente convergente exista, es que la serie obtenida al derivar término a término sea una serie uniformemente convergente de funciones continuas.

Es claro que (3.21) es uniformemente convergente para  $r \leq a$ . Esto se debe a que está dominada por una serie convergente, y para ver que es derivable para  $r < a$  examinamos por ejemplo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \{f_n \sin n\theta + g_n \cos n\theta\} \quad (3.22)$$

obtenida al derivar (3.21) término a término con respecto a  $r$ . La serie (3.22) es uniformemente convergente para  $r < a$  ya que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \{f_n \sin n\theta + g_n \cos n\theta\} \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2K}{\pi a^2} \frac{n(n-1)}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \\ &< \frac{2K}{\pi a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} < \infty, \quad \text{si } r < a. \end{aligned}$$

Esta desigualdad prueba que  $u$  es dos veces derivable respecto a  $r$  para  $r < a$ . Queda como ejercicio el probar la derivabilidad respecto a  $\theta$ .

La misma construcción de la solución, muestra que  $u$  satisface la ecuación. Esto completa la prueba de que (3.21) provee una solución clásica de (3.15) cuando  $f \in C^2[0, 2\pi]$  y  $f$  es periódica.

La prueba de unicidad dada, utilizando el teorema de la divergencia, no es aplicable en este caso ya que no sabemos que  $u \in C^2(\Omega')$ . Una prueba de unicidad apropiada la daremos más adelante. Sin embargo se deja como ejercicio el probar que si  $f \in C^\infty[0, 2\pi]$  y todas sus derivadas son periódicas, entonces  $u \in C^\infty$  para  $r \leq a$  y la

solución es única en ese caso.

La solución (3.21) de la ecuación (3.15) fue obtenida utilizando el hecho muy particular de que el dato es una función periódica y por ese motivo desarrollable en serie de Fourier. Sin embargo un examen más detallado de (3.21) nos muestra ciertos hechos que nos permitirán resolver otros problemas. Primero que nada (3.21) es una suma de productos de la forma

$$\sum C_n R_n(r) \Theta_n(\theta) \quad (3.23)$$

donde cada producto satisface la ecuación y recibe el nombre de solución separable. Además la familia  $\{\Theta_n\}$  tiene la propiedad de que toda función de una clase apropiada puede escribirse en la forma

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(\xi) \Theta_n(\xi) d\xi \right) \Theta_n(\theta).$$

De estas observaciones deducimos que cuando el dato del problema puede expresarse con una fórmula análoga a la de las series de Fourier, en términos de funciones que son factores de una solución separable, el problema se puede resolver al menos formalmente de la misma manera que el problema anterior.

Una técnica para resolver ecuaciones parciales es la de buscar todas las posibles soluciones separables, y seleccionar entre ellas una subclase que pueda expresar el dato del problema. Una vez encontradas esas soluciones una suma análoga a la (3.23) nos dará una solución formal del problema. La técnica descrita se llama el **método de separación de variables**.

Como un ejemplo de aplicación consideremos el problema mostrado en la Fig. 3.3:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & \text{en } \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ u(0, y) &= u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

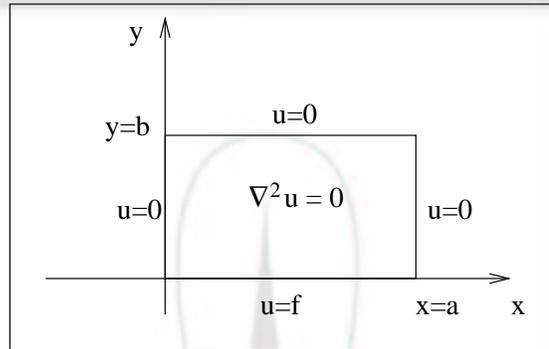
Buscamos soluciones separables del problema de la forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , y la esperanza es que resulte una familia de funciones  $\{X_n(x)\}$  que nos permitan desarrollar la función  $f(x)$ . Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$X''Y + Y''X = 0, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0,$$

de donde

$$\frac{X''}{X} = \mu, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu, \quad (3.24)$$

donde  $\mu$  es una constante real. Para que  $u$  resuelva el problema, la función  $X$  debe satisfacer  $X(0) = X(a) = Y(b) = 0$ . Deben pues resolverse (3.24) con las condiciones



de frontera apropiadas. Supongamos que  $\mu = \lambda^2 > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} X'' - \lambda^2 X &= 0, & X(0) &= X(a) = 0, \\ X(x) &= \text{sen } h\lambda x, & \text{pero } \text{sen } h\lambda a &\neq 0, \text{ pues } a \neq 0 \end{aligned}$$

por tanto  $\lambda^2 > 0$  no es valor propio. Y si suponemos que  $\mu = -\lambda^2 < 0$ , entonces

$$X_n(x) = \text{sen } \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}.$$

Las correspondientes funciones  $Y_n$  satisfacen

$$Y_n'' + \mu_n Y_n = 0, \quad Y_n(b) = 0,$$

de donde se sigue que

$$Y_n = \text{sen } h \left( \frac{n\pi}{a} (y - b) \right)$$

y por ende que las soluciones separables son:

$$u_n(x, y) = \text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \text{sen } h \left( \frac{n\pi}{a} (y - b) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

En (3.15) el teorema de Fourier garantizaba la posibilidad de desarrollar el dato del problema en términos de las funciones  $\Theta_n$ . En este caso para poder utilizar el método necesitamos un desarrollo de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \quad (3.25)$$

donde las  $C_n$  sean coeficientes por determinarse. La existencia de un desarrollo de la forma (3.25) no es obvia de ninguna manera. Hay cierta esperanza de que sea válida ya que las funciones  $\text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right)$  son osciladores. Supongamos que (3.25) es válida y

tratemos de determinar las  $C_n$ . Como en el caso de series de Fourier multiplicando por  $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$  e integrando obtenemos:

$$\int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi = C_n \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi = \frac{a}{2}C_n. \quad (3.26)$$

Utilizando (3.26) obtenemos que una solución formal del problema es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y-b)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (3.27)$$

donde

$$A_n = -\frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi$$

siempre que (3.25) sea válida.

El estudio de la validez de desarrollos como el dado en (3.25), asociados con soluciones separables de ecuaciones parciales, es objeto de la Teoría de Sturm-Liouville que empezó a desarrollarse a mediados del siglo pasado. Nosotros no intentaremos dar una exposición ya que su estudio comprende varios volúmenes. Una breve discusión puede encontrarse en el libro de Weinberger [15]. Nos limitaremos en estas notas a unos breves comentarios y a mostrar analogías con el álgebra lineal, las cuales facilitarán el aceptar sin demostración, la validez de desarrollos de la forma (3.25).

Para hacer la analogía con el álgebra lineal observamos que las funciones

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

satisfacen

$$\frac{d^2}{dx^2}X_n(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \quad X_n(0) = X_n(a) = 0. \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) indica que las funciones  $X_n$  son eigenvectores de la transformación lineal  $A : D \rightarrow C[0, a]$  donde  $D = \{f \in C^2[0, a] \mid f(0) = f(a) = 0\}$ , definida por

$$Af(x) = f''(x).$$

El conjunto  $D$  es un subespacio vectorial de  $C[0, a]$  y en él se puede definir un producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a fg \, dx. \quad (3.29)$$

De acuerdo al producto escalar dado en la (3.29), el operador  $A$  resulta ser simétrico ya que para  $f, g \in D$  se satisface

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^a f''g \, dx = \int_0^a fg'' \, dx = \langle f, Ag \rangle.$$

El mismo argumento del álgebra lineal muestra que los eigenvectores de  $A$  correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales, es decir

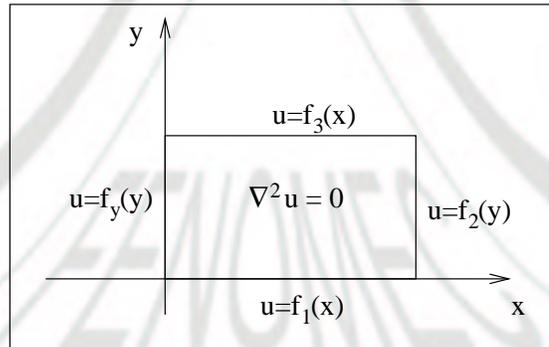
$$\int_0^a X_n(x)X_m(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Además recordamos el resultado de álgebra lineal en el que se dice que los eigenvectores de una transformación simétrica forman una base del espacio. En álgebra lineal, debido a que el espacio es de dimensión finita, sólo tenemos un número finito de eigenvectores; en nuestro caso tenemos un número infinito, ya que  $D$  es de dimensión infinita. Podemos imaginar una extensión no obvia pero si natural, del álgebra lineal al pensar que los eigenvectores  $X_n$  forman una base del espacio  $D$  en el sentido de que toda  $f \in D$  puede desarrollarse, como en álgebra lineal, en la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n \quad (3.30)$$

donde la convergencia de la serie debe entenderse en una forma apropiada. Vemos que (3.25) justifica por analogía el desarrollo mostrado en (3.30). El estudio de la convergencia de series de la forma (3.30) es objeto de la teoría de Sturm-Liouville. Una vez establecida la rapidez de crecimiento de los coeficientes  $C_n$  se procede, como en el caso de series de Fourier, a verificar la validez de las soluciones formales obtenidas por el método de separación de variables. Una exposición más detallada de estos resultados está en el libro de Weinberger [15].

Queda como ejercicio el resolver formalmente, y tratar de comprobar la validez de la solución del problema indicado en la Fig. 3.4.



### 3.2.2. La fórmula de Poisson

Si se recuerda que en la variable compleja las funciones armónicas son parte real de funciones analíticas, es de esperarse para ellas una representación tipo Cauchy en

términos de una integral que involucre sus valores en la frontera. Calcularemos ahora esta expresión usando (3.21), que al escribirla usando la definición de sus coeficientes es

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \xi)] f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \xi)] \right\} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \xi)] &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\theta - \xi)}\right)^n \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \xi) + r^2}. \end{aligned}$$

De donde

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\xi) d\xi}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \xi) + r^2}. \quad (3.31)$$

La (3.31) es la fórmula de Poisson. Es importante observar que el lado derecho de (3.31) está definido para  $r < a$  siempre que

$$\int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\xi < \infty.$$

Además la fórmula (3.31) define una función armónica ( $\nabla^2 u = 0$ ) para  $r < a$ , aún si  $f$  no tiene serie de Fourier. Es posible probar que cuando  $f$  es solamente continua, (3.31) provee una solución clásica al problema de Dirichlet en el sentido que  $\lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = f(\theta)$ .

### 3.2.3. Problema de Neumann

Consideremos ahora el caso donde en la frontera no se prescriben los valores de la función, sino los valores de su derivada normal. Empezamos considerando el problema para un círculo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} &= 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u_r(a, \theta) &= f(\theta), \quad f(0) = f(2\pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Procedemos como para el problema de Dirichlet desarrollando  $u$  como

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n(r) \sin n\theta + b_n(r) \cos n\theta \}$$

donde las  $a_n$ ,  $b_n$  son soluciones acotadas en  $r = 0$  del sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(ra'_n)_r - \frac{n^2}{r^2}a_n &= 0, & a'_n(a) &= f_n, \quad n \geq 1, \\ \frac{1}{r}(rb'_n)_r - \frac{n^2}{r^2}b_n &= 0, & b'_n(a) &= g_n, \quad n \geq 1, \\ \frac{1}{r}(ra'_0)_r &= 0, & a'_0(a) &= g_0. \end{aligned}$$

Para  $n \geq 1$  la solución del sistema es:

$$a_n(r) = f_n \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n, \quad b_n(r) = g_n \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n.$$

Sin embargo, para  $n = 0$  encontramos  $a_0(r) = cte.$ , de donde la ecuación

$$a'_0(a) = 0 = g_0$$

se satisface sólo si

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = 0. \quad (3.33)$$

Es decir el problema de Neumann no tiene solución formal para un dato arbitrario, sino que el dato debe satisfacer la condición de compatibilidad de la (3.33). Si el dato satisface dicha ecuación, entonces una solución formal está dada por

$$u(r, \theta) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_n}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) + \frac{g_n}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \right\} \quad (3.34)$$

donde la convergencia de la serie depende de qué tan rápido decaen los coeficientes  $f_n$ ,  $g_n$ . La solución dada en la (3.34) no es única ya que las constantes también son soluciones del problema. Queda como ejercicio el verificar que si  $f \in C^2[0, 2\pi]$  y es periódica, entonces  $u \in C^2$  para  $r < a$  y  $u \in C^1$  para  $r \leq a$ .

De la misma forma que en el problema de Dirichlet, podemos sumar la serie (3.34) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos[n(\theta - \xi)] d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}}\right)^n \right\} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \operatorname{Re} \left\{ \ln \left( 1 - \frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}} \right) \right\} d\xi \\
&= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \ln \left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}} \right| d\xi
\end{aligned} \tag{3.35}$$

que es la fórmula de Poisson para el problema de Neumann. Es interesante notar que (3.35) define una función continua hasta  $r = a$  para datos  $f(\theta)$  continuos.

### 3.2.4. El principio del máximo para la ecuación de Laplace

Supongamos una solución clásica de  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  del problema

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u &= F, & F &> 0, & F &\in C(\Omega), \\
u &= f \text{ en } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Físicamente es claro que la forma  $u$  de la membrana sujeta a la fuerza  $F$ , sólo puede ser cóncava hacia arriba y por lo tanto  $u$  alcanza su máximo en la frontera.

Nos proponemos probar formalmente este hecho. Como  $u$  es continua entonces alcanza su máximo en  $\bar{\Omega}$ . Supongamos que lo alcanza en  $x_0 \in \Omega$ . En el punto  $x_0$  tenemos por cálculo que  $F = \nabla^2 u \leq 0!!$  de donde  $u$  alcanza su máximo en la frontera.

Consideremos ahora el problema

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = f \text{ en } \partial\Omega,$$

probaremos que si  $u$  es una solución clásica entonces  $u$  satisface

$$u \leq \max_{x \in \partial\Omega} f, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Para probar esto tomamos

$$v = u + \epsilon(x^2 + y^2)$$

entonces

$$\nabla^2 v = 4\epsilon$$

y por el resultado anterior

$$v \leq \max_{x \in \partial\Omega} u + \epsilon R^2$$

donde  $R$  es el radio de un círculo que contiene a  $\bar{\Omega}$ . Además

$$u \leq v \leq \max_{x \in \partial\Omega} u + \epsilon R^2. \tag{3.36}$$

Como (3.36) es válida para toda  $\epsilon > 0$  tendremos el resultado deseado.

El principio del máximo puede utilizarse para probar la unicidad de una solución

clásica  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  de la ecuación de Laplace. En efecto, supongamos una solución clásica del problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo tenemos  $u \leq 0$  en  $\Omega$ . Por otra parte  $-u \leq 0$ , de donde  $u = 0$ . Esto prueba que la única solución clásica de la (3.15), cuando  $f \in C^2[0, 2\pi]$  y es periódica, está dada por la serie (3.21).

### 3.2.5. Problemas elípticos

Como primer ejemplo consideremos el problema de Dirichlet en el semiplano  $z \leq 0$ , con dato de frontera  $u(x, 0) = f(x)$  en  $-\infty < x < \infty$  como se muestra en la Fig. 3.5. La idea para resolver el problema es de nuevo desarrollar la  $u$  en términos de

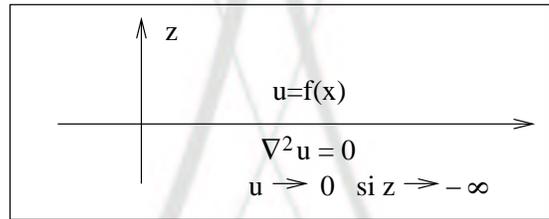


Fig. 3.5

funciones más sencillas. En este caso la herramienta natural es la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Procedemos ahora como en el caso de regiones finitas y escribimos  $u(x, z)$  en la forma

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, z) e^{ikx} dk$$

y encontramos para  $\hat{u}(k, z)$  la ecuación ordinaria

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, z)_{zz} - k^2 \hat{u}(k, z) &= 0, \quad z \leq 0, \\ \hat{u}(k, z) &\rightarrow \infty \text{ si } z \rightarrow -\infty, \\ u(x, 0) &= f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\hat{u}(k, z) &= e^{|k|z} \hat{f}(k), \\ u(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} \hat{f}(k) e^{ikx} dk.\end{aligned}\quad (3.38)$$

En (3.38) se ve que cuando  $f \in C^\infty(\mathbf{R})$  es de soporte compacto,  $u(x, z)$  es infinitamente derivable para  $z \leq 0$ . Además como la (3.37) efectivamente es válida en esa situación, tendremos la existencia de una solución clásica del problema para datos  $f \in C^\infty(\mathbf{R})$  con soporte compacto.

Resulta interesante reescribir (3.38) en forma análoga a la fórmula de Poisson obtenida para el círculo. Para esto basta recordar el teorema de la convolución para la transformada de Fourier y obtendremos entonces:

$$\begin{aligned}u(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, z) f(\xi) d\xi, \\ K(\eta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} e^{ik\eta} dk = \frac{1}{\pi} \frac{z}{\eta^2 + z^2},\end{aligned}$$

de donde

$$u(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(x - \xi)^2 + z^2} f(\xi) d\xi.$$

Queda como un ejercicio el plantear y resolver el problema de Neumann para el semiplano.

Consideremos ahora un problema de gran importancia en aplicaciones que da origen a un problema elíptico de una región infinita, a saber, el problema de difracción.

### 3.2.6. Problema de difracción

Una situación de gran interés en aplicaciones en las que aparecen ecuaciones elípticas es en problemas de difracción de ondas por obstáculos. En este caso las ecuaciones elípticas aparecen como una simplificación de la ecuación de movimiento original. En estas notas consideraremos sólo un ejemplo simple; algunos ejemplos más complicados y una discusión más detallada de la solución serán objeto de otros capítulos en este curso. Consideremos la difracción de una onda plana que incide sobre un cilindro infinito cuyo eje es paralelo al eje  $z$ . Para simplificar el problema supondremos que el vector  $\mathbf{k}$  de propagación de la onda plana está en el plano  $(x, y)$  y en este caso el problema es bidimensional.

La ecuación por resolver es la ecuación de onda

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \quad (3.39)$$

y en principio deben darse condiciones iniciales, y datos de frontera apropiados que representen tanto al obstáculo como a la fuente que genera la onda plana incidente. Las condiciones de frontera que representan el obstáculo son frecuentemente  $u = 0$  o bien  $u_n = 0$  en las paredes del obstáculo y no presentan mayor dificultad el decidir las en cada caso. Lo que resulta más difícil es resolver el problema con valores iniciales, por este motivo se busca una simplificación en la cuál se reduzca el número de variables. Por lo anterior, en lugar de considerar la fuente en detalle, se considera una onda plana  $Ae^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)}$  que viaja hacia el objeto, y uno se pregunta cuánto vale el campo de difracción al chocar dicha onda plana contra el objeto. Como la situación es periódica en el tiempo, se espera que la onda difractada tenga también una dependencia  $e^{iwt}$ . De lo anteriormente expuesto, es claro que debemos buscar una solución de la ecuación (3.39) en la forma

$$u = Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}e^{iwt} + ve^{iwt} \quad (3.40)$$

donde  $v$  es la onda difractada. Debemos encontrar ahora una ecuación y condiciones de frontera apropiadas para  $v$ . La ecuación para  $v$  se obtiene sustituyendo la (3.40) por la (3.39) y recordando que  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k^2 = \frac{w^2}{c^2}$ , ya que la onda plana es una solución de la ecuación. La expresión para  $v$  es

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0, \quad \text{fuera del obstáculo.} \quad (3.41)$$

La condición de frontera sobre el obstáculo es

$$v = -Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{para } x \text{ en la frontera del obstáculo.}$$

Lo que resulta un poco más complicado es la expresión del hecho que  $v$  se comporta como una onda efectivamente reflejada. Lo primero que se debe pedir es que lejos del obstáculo,  $v$  represente una onda que se aleje. Esto se puede expresar, si  $r$  es la coordenada radial, diciendo que  $e^{iwt}v \sim f(r-ct)$  para  $r$  grandes. Además por el hecho de estar en una situación estacionaria, la energía radiada a lo lejos del obstáculo por la onda reflejada  $v$  debe ser una constante. Como  $|v|^2$  es una medida de la densidad de energía, debemos tener que  $e^{iwt}v \sim \frac{f(r-ct)}{\sqrt{r}}$  para  $r \rightarrow \infty$ , ya que de esta manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Energía radiada } dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |v|^2 r d\theta = \text{constante, para } r \rightarrow \infty.$$

Con estas observaciones, la ecuación y condiciones de frontera para  $v$  son

$$\begin{aligned} \nabla^2 v + k^2 v &= 0, \quad \text{fuera del obstáculo,} \\ v &= -Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{en la frontera del obstáculo,} \\ e^{iwt} v &\sim \frac{f(r-ct)}{\sqrt{r}} \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.42)$$

El problema (3.42) es conocido como problema de radiación para la ecuación de Helmholtz. La condición sobre el comportamiento de  $v$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ , se llama

condición de radiación y fue utilizada por Sommerfeld a principios de este siglo. Para resolver (3.42) es conveniente cambiar a coordenadas polares, escogiendo como eje polar el vector  $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(rv_r)_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + k^2v &= 0; \quad r \geq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ v &= -Ae^{-ika \cos \theta}, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ e^{i\omega t}v &\sim \frac{f(r-ct)}{\sqrt{r}}, \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Buscamos una solución de (3.43) en la forma:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n(r) \cos(n\theta) + b_n(r) \sin(n\theta) \right\}. \quad (3.44)$$

Como la condición de frontera es par, sólo necesitamos los coeficientes  $a_n(r)$ , es decir,  $b_n(r) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Al sustituir (3.44) en (3.43), encontramos las siguientes ecuaciones ordinarias para los coeficientes:

$$\frac{1}{r}(ra'_n)' - \frac{n^2}{r^2}a_n + k^2a_n = 0. \quad (3.45)$$

La condición en el obstáculo nos da:

$$a_n(a) = \int_0^{2\pi} e^{-ika \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta = 2(i)^n J_n(ka). \quad (3.46)$$

La (3.45) es una ecuación muy estudiada; se llama la ecuación de Bessel. Tiene dos soluciones linealmente independientes las cuales se comportan como  $(kr)^n$  y  $(kr)^{-n}$  para  $r$  pequeño. Hay dos soluciones estandarizadas de una manera sistemática que se llaman las funciones de Bessel, las cuales se denotan por

$$\begin{aligned} J_n(kr) &\sim (kr)^n, \quad r \rightarrow 0, \\ Y_n(kr) &\sim (kr)^{-n}, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para determinar las constantes arbitrarias debemos usar la condición en  $r = a$  y  $r \rightarrow \infty$ . Para esto necesitamos tener información sobre el comportamiento de las funciones  $J_n$  y  $Y_n$ . Para obtener esta información tomamos  $a_n(r) = r^{-\frac{1}{2}}f_n(r)$  y obtenemos

$$f_n'' + k^2f_n + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{4} - n^2\right)f_n = 0 \quad (3.47)$$

de donde vemos que cuando  $r \rightarrow \infty$  podemos despreciar el tercer término de (3.47) y obtener

$$\begin{aligned} J_n(kr) &\sim A_n \frac{\cos(kr)}{\sqrt{r}} + B_n \frac{\sin(kr)}{\sqrt{r}}, \\ Y_n(kr) &\sim C_n \frac{\cos(kr)}{\sqrt{r}} + D_n \frac{\sin(kr)}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

De (3.48) vemos que es posible escoger una nueva combinación lineal

$$E_n J_n + F_n Y_n \sim G_n \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.49)$$

que satisfaga la condición

$$G_n \frac{e^{-i(kr-wt)}}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.50)$$

La solución de (3.45) con el comportamiento mostrado en (3.50) convenientemente normalizada se denota por  $H_n^{(2)}$  y se llama función de Hankel de segunda clase. En esta nueva notación la solución para  $a_n(r)$  es

$$a_n(r) = -A \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr).$$

La solución formal al problema es entonces

$$u(r, \theta) = -A \left\{ \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta) \right\}. \quad (3.51)$$

Cuando el producto  $ka \ll 1$ , es decir, la longitud de onda es comparada con el tamaño del objeto, entonces la (3.51) converge muy rápidamente y pocos términos son suficientes para obtener una buena idea de la solución. Cuando  $1 \ll ka$  la (3.51) da poca información y por lo tanto se debe recurrir a técnicas más específicas para obtener información útil.

La discusión de la validez de (3.51) es semejante a otras series de Fourier. La prueba de unicidad de la solución de (3.43) está detallada y discutida en el libro de Courant-Hilbert [3].



<http://www.fenomec.unam.mx>

## Capítulo 4

# Separación de variables para ecuaciones con características

En esta sección analizaremos algunos problemas ya resueltos en las secciones anteriores, usando la técnica de separación de variables que ya motivamos y discutimos para ecuaciones elípticas. La idea del método es reducir el problema a resolver un sistema infinito de ecuaciones ordinarias independientes. Discutiremos la técnica con varios ejemplos y compararemos la solución obtenida por características.

### 4.1. Separación de variables para la ecuación de segundo orden

Empecemos por resolver el problema

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0.\end{aligned}$$

La solución del problema anterior ya se dio en (1.44). Ahora resolveremos el problema separando variables.

Sabemos que cualquier función impar  $g(x)$  (suficientemente regular) se puede desarrollar en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ , en serie de Fourier de senos de la forma

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(nx) \left\{ \int_0^{\pi} \sin(n\xi) g(\xi) d\xi \right\}. \quad (4.1)$$

En particular, la solución buscada la suponemos impar y la podemos escribir como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx), \quad A_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad (4.2)$$

donde los  $A_n(t)$  son desde luego desconocidos y los vamos a determinar usando las condiciones del problema planteado en esta sección, de manera tal que (4.2) sea efectivamente una solución (cuando menos formal).

Para determinar los  $A_n(t)$  sustituimos (4.2) en el problema antes mencionado, para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n''(t) + n^2 A_n(t)) \sin(nx) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(0) \sin(nx) = u_t(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) = u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi.$$

De (4.3) se tiene el sistema infinito de ecuaciones independientes

$$\begin{aligned} A_n''(t) + n^2 A_n(t) &= 0, \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ A_n'(0) &= 0, \quad A_n(0) = f_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

La solución de (4.4) es de la forma  $A_n(t) = f_n \cos(nt)$ .

Nótese que precisamente las dos condiciones iniciales sobre  $u$  y  $u_t$  son las que nos dan una solución única para las ecuaciones ordinarias (4.4). La solución formal del problema que se planteó originalmente es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(nt) \sin(nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin[n(x+t)] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin[n(x-t)]. \quad (4.5)$$

Desde luego que si la convergencia de esta serie es lo suficientemente fuerte, la expresión (4.5) no es sólo una solución formal, sino que es la solución del problema.

Queda como ejercicio para el lector verificar que si  $f$  es infinitamente diferenciable y  $f = 0$  para  $0 < a \leq x \leq b < \pi$ , entonces (4.5) es efectivamente la solución del problema.

Ahora estudiaremos la solución que obtuvimos para hacer ver que (4.5) no es más que otra representación de la solución del problema 1.4.1. Notemos que dicha solución

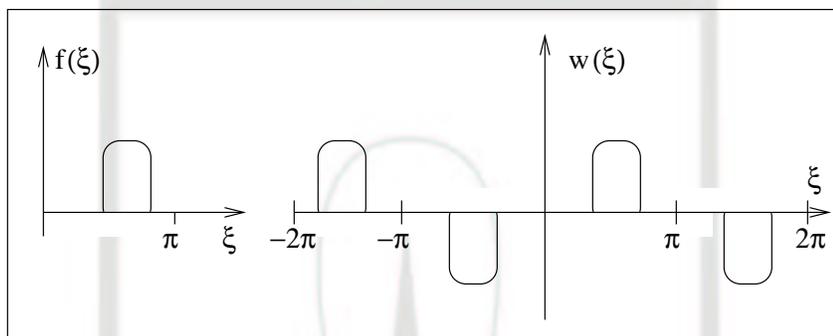


Fig. 4.1

tiene la forma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Sabemos además que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\xi = w(\xi)$  es la extensión impar periódica de período  $2\pi$  de  $f$ . Esto se ve en la Fig. 4.1 En términos de la función  $w$ , (4.5) se escribe como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{w(x+t) + w(x-t)\}. \quad (4.6)$$

En el plano  $(x, t)$  vemos que  $u(x, t)$  es el promedio de los valores de  $w$  que aparecen en la Fig. 4.3, es decir,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}w(A) + \frac{1}{2}w(B) = \frac{1}{2}w(\xi) = -\frac{1}{2}f(\eta)$$

donde  $\eta$  es el punto colocado simétricamente con respecto a  $\xi$  de  $\pi$ . Este es el mismo resultado que obtuvimos para el problema 1.4.1 con características. Vemos que el problema de reflexión con dos paredes es equivalente al problema con valores iniciales para una condición inicial que es periódica, de forma tal que las paredes siempre sean nodos de las ondas emitidas por esa condición inicial. Esto es lo que en física se conoce como el método de las imágenes, y la expresión cuantitativa de la posición e intensidad de las imágenes de  $f(x)$  está dada por la serie (4.5).

Queda ahora como ejercicio resolver por separación de variables los problemas:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & -\infty < x < \infty, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$



Estudiaremos ahora el problema para una cuerda infinita. La solución ya se obtuvo usando la fórmula de D'Alambert. Obtendremos ahora esta fórmula usando separación de variables. El problema por resolver es:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En el caso finito expresamos  $u$  en términos de su serie de Fourier. Para el problema (4.7) hacemos lo mismo pero por tratarse de un intervalo infinito usaremos la transformada de Fourier. Es decir, expresaremos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, k) e^{-ikx} dk, \quad A(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{ik\xi} d\xi.$$

Procederemos ahora como en (4.4) y veremos que  $A(t, k)$  satisface

$$\begin{aligned} A''(t, k) + k^2 A(t, k) &= 0, & -\infty < k < \infty, & t \geq 0, \\ A(0, k) &= 0, & A'(0, k) &= \hat{g}(k). \end{aligned} \quad (4.8)$$

La solución de (4.8) está dada por  $A(t, k) = \hat{g}(k) \frac{\sin kt}{k}$ , y finalmente la solución formal es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{-ikx} \frac{\sin kt}{k} dk. \quad (4.9)$$

Si  $g(x)$  es infinitamente diferenciable y diferente de cero sólo en un intervalo finito, entonces se puede verificar que (4.9) es efectivamente la solución de (4.7). Esto se hace probando que se pueden intercambiar derivadas e integrales en (4.9). La unicidad nos dice pues que (4.9) no es más que otra alternativa para expresar la fórmula de D'Alambert, sin embargo es conveniente evaluarla para obtener así la fórmula deseada. Para lo anterior, recordemos que la transformada inversa del producto es la convolución de las transformadas inversas (ver Apéndice). En la (4.9) tenemos que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) g(\xi) d\xi$$

donde la función  $G(\eta, t)$  se llama función de Green del problema, y está dada por

$$G(\eta, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(\eta-t)} - e^{-ik(\eta+t)}}{k} dk. \quad (4.10)$$

Para calcular la integral (4.10) vemos que el integrando es una función analítica, ya que  $k = 0$  es un punto regular. Debido a esto se puede reemplazar la integral a lo

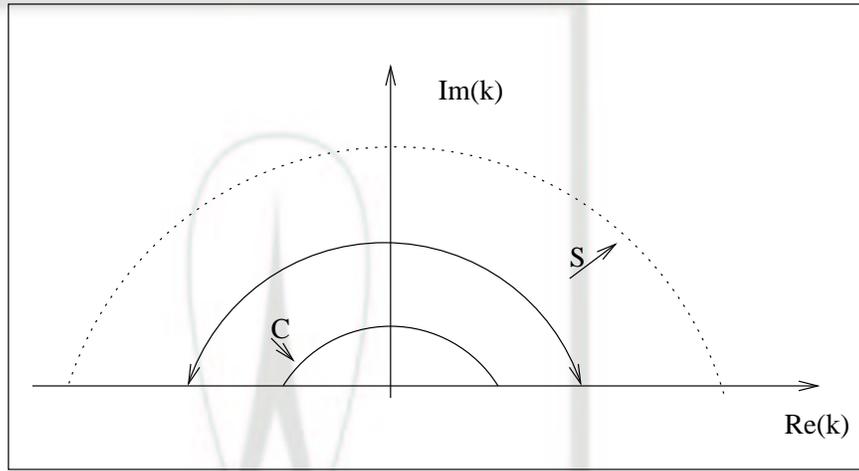


Fig. 4.3

largo del eje real por la suma de integrales a lo largo del contorno  $C$ , tal y como se indica en la Fig. 4.3.

Obtenemos entonces que

$$G(\eta, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{-ik(\eta+t)}}{k} dk - \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{-ik(\eta-t)}}{k} dk \quad (4.11)$$

Para calcular (4.11) observemos que para  $\eta + t < 0$ , entonces  $\eta - t < 0$  y en este caso los integrandos decaen exponencialmente a cero para  $Im\{k\} > 0$  y el uso del lema de Jordan sobre el contorno  $S$  nos da  $G(\eta, t) = 0$ ,  $\eta < -t$ . Supongamos ahora que  $\eta + t > 0$ . Es este caso hay dos posibilidades; la primera  $\eta - t < 0$  y la segunda  $\eta - t > 0$ . Cuando  $\eta + t > 0$  y  $\eta - t < 0$ , cerramos el contorno de la primer integral en  $Im\{k\} < 0$  y el de la segunda en  $Im\{k\} > 0$ . Obtenemos  $G(\eta, t) = \frac{1}{2}$ ,  $-t < \eta < t$ . Finalmente si  $\eta + t > 0$  y  $\eta - t > 0$  cerramos en  $Im\{k\} < 0$  y obtenemos que  $G(\eta, t) = 0$  para  $t < \eta$ . Resumiendo tenemos que

$$G(\eta, t) = \begin{cases} 0, & \eta < -t, \\ \frac{1}{2}, & -t < \eta < t, \\ 0, & t < \eta. \end{cases} \quad (4.12)$$

Usando (4.12) obtenemos que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta, t) g(x - \eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x - \eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

#### 4.2. SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES 77

que es precisamente la fórmula de D'Alambert.

Es de importancia notar que las integrales que definen a  $G(\eta, t)$  cambian en forma discontinua y las continuidades se dan sólo en las características. Esta situación se presenta siempre que se resuelven los problemas con características mediante transformadas.

Queda como ejercicio resolver, usando la transformada de Fourier, el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= 0, & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Muestre también, usando la transformada de Fourier, que en el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - u, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & f(x) = 0, |x| > a, \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

la primera señal que llega al punto  $x_0$  es aquélla que sale de  $\infty$  y tarda un tiempo  $t = x_0 - a$ . Encuentre el mismo resultado usando las características.

## 4.2. Separación de variables para un sistema de ecuaciones

En el caso de sistemas, la técnica es la misma que para una sola ecuación, y sólo hay que tener cuidado con los vectores. Resolveremos únicamente un ejemplo en detalle que ya se dejó como ejercicio para resolver mediante características. El problema es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Resolveremos (4.13) introduciendo las transformadas de Fourier  $\hat{i}$  y  $\hat{v}$ , para obtener con ello (quedando como ejercicio el verificar los detalles),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} 0 & ikc^{-1} \\ ikL^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}, & -\infty < k < \infty, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} \hat{f}(k) \\ \hat{g}(k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La (4.14) es un sistema de ecuaciones ordinarias (y no una sola ecuación como en el caso de la ecuación de onda). Esta es la diferencia con el caso de una sola ecuación. El sistema se resuelve de la manera habitual, diagonalizando la matriz del sistema que es lo mismo que se hace al proceder por características; así tenemos que la solución de (4.14) es

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e^{ikt/\sqrt{LC}} & 0 \\ 0 & e^{-ikt/\sqrt{LC}} \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde  $U$  es la matriz calculada en (2.10). Para encontrar  $v, i$  debemos invertir (4.15). Esto se hace de manera más sencilla introduciendo las variables

$$\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

y obteniendo

$$U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikt/\sqrt{LC}} & 0 \\ 0 & e^{-ikt/\sqrt{LC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w(x - t/\sqrt{LC}) \\ z(x + t/\sqrt{LC}) \end{pmatrix}$$

es la solución del problema. Si queremos que las ondas no se propagen hacia la izquierda, debemos escoger  $f$  y  $g$  de tal manera que  $z = 0$ . Esto se logra si  $g = -\sqrt{\frac{C}{L}} f$ . Esta última ecuación se obtiene de (4.16) y de (2.10).

### 4.3. La transformada de Laplace

Al separar variables, el problema de resolver una ecuación diferencial parcial se transforma en resolver un sistema infinito de ecuaciones ordinarias para funciones que dependen del tiempo. Se resuelven dichas ecuaciones y luego se suma la serie o se invierte la transformada obteniéndose así la solución buscada.

Al resolver problemas puede procederse de una manera alternativa transformando la variable tiempo (al igual que en ecuaciones ordinarias para transformarlas en ecuaciones algebraicas) y obtener una ecuación diferencial ordinaria para la función transformada. Posteriormente se resuelve esta ecuación, y se invierte la transformada para obtener la solución buscada. Una descripción detallada, así como ejemplos de esta técnica se encuentran en el libro de Weinberger [15]. Un tratamiento más avanzado se desarrolla en los libros de Courant-Hilbert [3] y de Van der Pol y Bremmer [14]. Nosotros nos limitaremos a usar la técnica en situaciones ya conocidas.

Empecemos por discutir el problema de los coches que entran por la carretera. Este

problema quedó resuelto en (1.8). Recordemos que la ecuación, las condiciones iniciales y de frontera son

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, & t \geq 0, \\ \rho(0, t) &= g(t), & x \geq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tomando la transformada de Laplace (ver Apéndice) de la (4.17), tendremos que ésta satisface

$$\begin{aligned} s\tilde{\rho}(x, s) + c\tilde{\rho}_x(x, s) &= 0, & x \geq 0, \\ \tilde{\rho}(0, s) &= \tilde{g}(s). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vemos que la transformada de Laplace ha convertido (4.17) en una familia de ecuaciones ordinarias que dependen del parámetro  $s$ . La solución de (4.18) es

$$\tilde{\rho}(x, s) = \tilde{g}(s)e^{-\frac{c}{s}x}, \quad x \geq 0, \quad (4.19)$$

que cuando  $Re\{s\} > 0$  decae a cero, y es efectivamente una transformada de Laplace. En el caso que la solución de (4.18) no decayera a cero cuando  $Re\{s\} \rightarrow \infty$ , entonces tendríamos una inconsistencia ya que estamos suponiendo que  $\rho$  tiene una transformada de Laplace. En dicho caso la conclusión es que  $\rho$  no tiene transformada de Laplace, y por lo tanto debe emplearse otra técnica para resolver (4.17). Sin embargo esto nunca ocurre en la práctica. La solución de (4.17), obtenida usando la fórmula de inversión para (4.19), es

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \tilde{g}(s)e^{s(t - \frac{x}{c})} ds. \quad (4.20)$$

Antes de calcular (4.20) notemos que para un punto fijo,  $\rho(x_0, t) = 0$  si  $t < \frac{x_0}{c}$  ya que en este caso el integrando decae exponencialmente para  $Re\{s\} > 0$ , y como  $\tilde{g}(s)$  es analítica, el lema de Jordan nos da como resultado que  $\rho = 0$ . Esto nuevamente es una manifestación de que el problema tiene características, y al igual que en el caso de las transformadas de Fourier, se refleja en cambios bruscos del valor de una integral, dependiendo del signo del exponente que aparece en ella. Notemos finalmente que por definición de transformada de Laplace, (4.20) se ve como  $\rho(x, t) = g(t - \frac{x}{c})$ , que es el resultado obtenido por el método de las características.

Queda como ejercicio el encontrar la fórmula de D'Alambert usando la transformada de Laplace.

Ilustraremos ahora el uso de la Transformada de Laplace en el caso del problema de líneas de transmisión. Es decir, consideraremos el problema

$$\begin{aligned} cv_t + i_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ Li_t + v_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = i(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ v(0, t) &= g(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Tomando la transformada de (4.21) obtenemos el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned} sc\tilde{v} + \tilde{i}_x &= 0, & x \geq 0, \\ sL\tilde{i} + \tilde{v}_x &= 0, & x \geq 0, \\ \tilde{v}(0, s) &= \tilde{g}(s), \end{aligned} \quad (4.22)$$

que desde luego depende del parámetro  $s$ . Además como suponemos a  $\tilde{i}$  y  $\tilde{v}$  transformadas de Laplace, debemos buscar soluciones de (4.22) que sean acotadas cuando  $s \rightarrow \infty$  y tales que  $Re\{s\} > 0$ . El sistema (4.22) lo resolvemos de la manera usual tomando

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

y determinando  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\lambda$  de la ecuación

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -sc \\ -sL & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Para tener soluciones no triviales en (4.23) necesitamos que  $\lambda = \pm\sqrt{Lc} s$ , y como queremos que  $\tilde{i}, \tilde{v} \rightarrow \infty$  si  $Re\{s\} > 0$  y  $s \rightarrow \infty$ , tomamos entonces  $\lambda = -\sqrt{Lc} s$ . La solución es

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(s) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{L}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{Lc} x} \quad (4.24)$$

donde  $\mathcal{A}(s)$  debe determinarse usando la condición de frontera en  $x = 0$ . De esta manera se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \tilde{g}(s) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{L}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{Lc} x}.$$

Invirtiendo (4.24) se encuentra que

$$i = \sqrt{\frac{c}{L}} g(t - \sqrt{Lc} x), \quad v = g(t - \sqrt{Lc} x)$$

que es el mismo resultado obtenido usando las características. Como una última aplicación de las transformadas de Laplace, examinaremos un problema donde la solución buscada tiene una discontinuidad fija en un punto como función del tiempo. (Un ejemplo de esto lo dimos ya en (2.34)). El problema por resolver ahora es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & |x|, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u(\epsilon, t) - u(-\epsilon, t)\} &= 0, & t \geq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u_x(\epsilon, t) - u_x(-\epsilon, t)\} &= g(t), & t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $g(t)$  es una función conocida. La interpretación es que (4.25) describe el movimiento de una cuerda provocado por una diferencia de tensión  $g(t)$  en  $x = 0$ . Un modelo muy similar es usado en sismología para estudiar dislocaciones en el terreno (que se representan por discontinuidades) y ver el tipo de ondas sísmicas que ellas producen. Tomando la transformada de Laplace en (4.25) tenemos

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{u} &= \tilde{u}_{xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\tilde{u}(\epsilon, s) - \tilde{u}(-\epsilon, s)\} &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\tilde{u}_x(\epsilon, s) - \tilde{u}_x(-\epsilon, s)\} &= \tilde{g}(s). \end{aligned} \quad (4.26)$$

La solución de (4.26) es

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= A(s)e^{-sx}, \quad x > 0, \\ \tilde{u} &= B(s)e^{sx}, \quad x < 0, \end{aligned}$$

donde las funciones  $A(s)$ ,  $B(s)$  se determinan del comportamiento de  $\tilde{u}$  en  $x = 0$ . De (4.26) tenemos que  $A(s) = B(s) = -\frac{\tilde{g}(s)}{2s}$ . Invirtiendo la transformada tenemos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_B -\frac{1}{2s} \tilde{g}(s) e^{s(t-x)} ds, \quad x > 0, \\ u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_B -\frac{1}{2s} \tilde{g}(s) e^{s(t+x)} ds, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando el teorema de convolución para transformadas de Laplace, (Apéndice) obtenemos la expresión final para  $u(x, t)$  en la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^{t-x} g(s) ds, \quad x > 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^{t+x} g(s) ds, \quad x < 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Claramente (4.28) es la solución del problema como puede verificarse por sustitución directa. Queda entonces como ejercicio el resolver este problema usando el método de las características y comparar la solución con (4.28). También se resuelve la (2.34) usando transformadas de Laplace.

Como último ejercicio queda el resolver por transformadas y por características el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u(\epsilon, t) - u(-\epsilon, t)\} &= g(t), \quad t \geq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u_x(\epsilon, t) - u_x(-\epsilon, t)\} &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$



<http://www.fenomec.unam.mx>

## Capítulo 5

# Ecuación de onda en tres dimensiones

En esta sección estudiaremos algunos problemas relacionados con la propagación de ondas en un espacio de tres dimensiones. Veremos que son muy variados los problemas que dan origen a la ecuación de onda, pero fijaremos nuestra atención en el problema de propagación de ondas de sonido que resulta familiar a todos nosotros. Las técnicas que emplearemos son una combinación de transformada de Laplace y Fourier. No discutiremos las técnicas de características las cuales cuando la dimensión del espacio es mayor que uno, tienen mayor utilidad en la construcción de soluciones aproximadas. Para un análisis de estos aspectos remitiremos al lector al Courant-Hilbert [3].

### 5.1. Propagación de ondas sonoras

Empezaremos por encontrar las ecuaciones que controlan la propagación de las ondas sonoras. Para esto recordemos que el aire es un gas, y que las ondas sonoras son cambios de densidad y presión, y por ello la manera de describir dichas ondas es mediante las ecuaciones de Navier-Stokes.

Estas ecuaciones son bastantes parecidas a las que ya discutimos en el caso de propagación de ondas en agua, sólo que en este caso hay que tomar en cuenta que el aire es compresible, y que su densidad en cada punto va a cambiar como consecuencia del movimiento.

Si denotamos por  $\rho$  a la densidad,  $p$  la presión, y  $u$  la velocidad del gas, tenemos que las ecuaciones son

<http://www.fenomec.unam.mx>

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, & \text{Conservación de masa,} \\ \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - u \nabla \cdot (\rho u) &= -\nabla p + F_{ext}, & \text{Ley de Newton.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

En (5.1) hay cuatro ecuaciones para cinco incógnitas. Necesitamos una relación más para poder cerrar la (5.1). Dicha relación experimental expresa nuestro modelo del gas, a saber, la ecuación de estado  $p = p(\rho)$ . Es de esperarse que para diferentes ecuaciones de estado se tendrán diferencias en la propagación de ondas. Las ecuaciones (5.1) deben ser suplementadas con condiciones iniciales y de frontera, constituyen un problema formidable y aún no está completamente resuelto. Por esto las aproximaremos en forma apropiada para describir las ondas de sonido.

En primer lugar las ondas de sonido sólo producen pequeñas variaciones en la densidad y presión de equilibrio  $\rho_0$  y  $p_0$ . Además, el gas originalmente en reposo adquiere únicamente una velocidad pequeña. Por lo anterior buscamos soluciones de la forma

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad p = p_0 + \tilde{p}, \quad u = \tilde{v}, \quad (5.2)$$

donde  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{v}$  son tales que podemos despreciar sus productos. De igual manera, usando (5.2), tenemos que la ecuación de estado es

$$p = p_0 + \tilde{p} = p(\rho_0 + \tilde{\rho}) = p(\rho_0) + p'(\rho_0)\tilde{\rho} + \theta(\tilde{\rho})^2; \quad \tilde{p} = p'(\rho_0)\tilde{\rho} \quad (5.3)$$

donde  $p'(\rho_0) > 0$ , ya que al aumentar la densidad también aumenta la presión. Sustituyendo (5.2) y (5.3) por la (5.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t + \rho_0 \nabla \cdot \tilde{v} &= 0 \\ \rho_0 \tilde{v}_t &= -p'(\rho_0) \nabla \tilde{\rho} + F_{ext} \end{aligned} \quad (5.4)$$

y esperamos que (5.4) sea una aproximación adecuada para ondas de sonido. Este sistema de ecuaciones es lineales para  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{v}$ . Resulta conveniente para nuestros propósitos expresar  $\tilde{v}$  en términos de  $\tilde{\rho}$ , que a su vez es proporcional a  $\tilde{p}$ . Esto se obtiene tomando la derivada respecto a  $t$  en la primera de las ecuaciones (5.4), así como la divergencia de la segunda. Obtenemos, omitiendo las tildes, que

$$\rho_{tt} = -\rho_0 \nabla \cdot v_t = p'_0(\rho_0) \nabla^2 \rho - \nabla \cdot F_{ext} \quad (5.5)$$

o bien,

$$\frac{1}{p'(\rho_0)} \rho_{tt} = \nabla^2 \rho + f(\mathbf{x}, t).$$

Desde luego hay que dar condiciones iniciales para (5.5), por ejemplo, el estado de reposo  $\rho = \rho_t = 0$ ;  $t = 0$ , y especificar  $f(\mathbf{x}, t)$  que es la fuente que produce el sonido. Notemos en (5.5) que  $p'(\rho_0)$  tiene dimensiones de velocidad, y en la versión unidimensional de este modelo, es el cuadrado de la velocidad de propagación de las

ondas. Esperamos también que en (5.5) se represente la velocidad de los disturbios. Tomando  $p'(\rho_0) = 1$ , el problema por resolver es

$$\begin{aligned} \rho_{tt} - \nabla^2 \rho &= f(\mathbf{x}, t), & t \geq 0, \\ \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_t(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ f(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ si } |\mathbf{x}| > R, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $\rho$ , que es proporcional a  $p$ , se interpreta como la intensidad del sonido producido por  $f$ .

Resolveremos (5.6) tomando transformada de Laplace en  $t$ , y de Fourier en  $\mathbf{x}$ , teniendo con ello que  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)\hat{\rho} = \hat{f}$ , de donde

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{f}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} \quad (5.7)$$

y la solución de (5.6) está dada invirtiendo la (5.7) en la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\hat{f}(\mathbf{k}, s)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right\} e^{st} ds. \quad (5.8)$$

Para calcular (5.8) es conveniente primero invertir la transformada de Fourier y tener

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{f} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} d\mathbf{k}. \quad (5.9)$$

Vemos que en (5.9) podemos usar el teorema de la convolución y tener

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, s) = \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) \tilde{f}(\mathbf{x}', s) d\mathbf{x}'$$

donde la función  $G(\eta, s)$ , que se llama la función de Green del problema, está dada por

$$G(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} d\mathbf{k}. \quad (5.10)$$

La (5.10) se calcula haciendo un cambio de variables a coordenadas polares escogiendo a  $\eta$  como eje y obteniendo, si  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = r^2$ , que

$$\begin{aligned} G(\eta, s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{-ir|\eta| \cos \theta}}{(r^2 + s^2)} r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-ir|\eta|}^{ir|\eta|} \frac{e^u r^2 du dr}{(r^2 + s^2) ir|\eta|} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2ir \sin(r|\eta|) dr}{i|\eta|(r^2 + s^2)} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2 |\eta|} \int_0^\infty \frac{r \sin(r|\eta|) dr}{r^2 + s^2} = \frac{1}{(2\pi)^2 |\eta|} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x dx}{x^2 + s^2 |\eta|^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |\eta|} \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{ix}}{x^2 + s^2 |\eta|^2} dx \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La (5.11) se calcula con residuos (lo cuál se deja como ejercicio) y se obtiene la expresión para  $G(\eta, s)$  en la forma

$$G(\eta, s) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-s|\eta|}}{|\eta|}, \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad (5.12)$$

Finalmente usando (5.12) en la ecuación (5.8) se encuentra que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\tilde{f}(\mathbf{x}', s)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} d\mathbf{x}' \right\} ds. \quad (5.13)$$

En la (5.13) podemos invertir la transformada de Laplace usando directamente la definición, y por lo tanto tendremos que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (5.14)$$

que es la solución buscada. Cabe mencionar que dicha fórmula se debe a Poisson.

## 5.2. La fórmula de Poisson y su interpretación

Interpretaremos ahora la (5.14) en términos de nuestras ideas sobre propagación de sonido. Para esto nos referimos a la Fig. 5.1 donde  $\Omega$  es la región ocupada por la fuente,  $\mathbf{x}$  el punto de observación, y  $\Delta x'_i$  es una partición de  $\Omega$ .

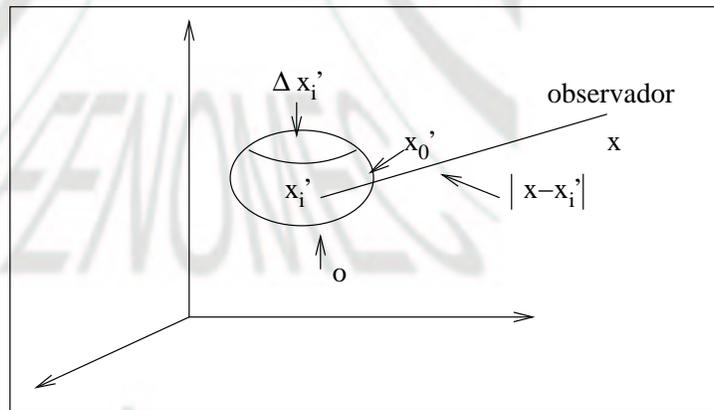


Fig. 5.1

Para interpretar la (5.14) es conveniente pensar en la fuente  $\Omega$  como discretizada y aproximar la integral por una suma.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{f(\mathbf{x}'_i, t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} \Delta \mathbf{x}'_i. \quad (5.15)$$

Ahora podemos analizar (5.15) de la siguiente manera: cada región  $\Delta \mathbf{x}'_i$  emite sonido de acuerdo con la fuente  $f(\mathbf{x}'_i, t)$ . En el punto  $\mathbf{x}$ , el sonido que se escucha al tiempo  $t$  es precisamente el emitido en  $\mathbf{x}'_i$  al tiempo  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|$ , ya que el sonido (cuya velocidad supusimos 1) tarda en viajar de  $\mathbf{x}'_i$  a  $\mathbf{x}$  un tiempo  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|$ . Por esto (5.15) nos dice que el sonido escuchado en  $\mathbf{x}$  es la suma de los sonidos emitidos en  $\mathbf{x}'_i$  en los tiempos apropiados para que llegue a  $\mathbf{x}$ . De acuerdo con esta interpretación, si al tiempo  $t = 0$  hay quietud, entonces la primer onda que llega es aquella emitida por  $\mathbf{x}'_0$ , donde  $\mathbf{x}'_0$  es el punto de la fuente más cercana a  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto, si  $t < |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|$  tendremos que  $\rho = 0$ .

Veremos ahora que nuestra interpretación es consistente con la ecuación (5.14). Lo anterior se sigue si escribimos (5.13) en la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}', s) e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} ds. \quad (5.16)$$

De (5.16) se sigue que  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < t - |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}|$  para  $\mathbf{x}'$  en  $\Omega$ . Por ello, si  $t - |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}| < 0$  entonces la exponencial en el integrando decae para  $Re\{s\} > 0$ . Entonces, para todas las  $\mathbf{x}'$  en  $\Omega$  se tiene que

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}', s) e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} ds = 0$$

de donde se sigue que  $\rho = 0$  tal como esperábamos. Queda ahora como ejercicio para el lector convencerse que la (5.14) lleva directamente al mismo resultado.

Se deja también como ejercicio resolver la (5.6) con este método para el caso unidimensional, y dar una interpretación de la solución en el plano  $(x, t)$ .

### 5.3. Aplicaciones de la fórmula de Poisson

Vemos que (5.16) está resuelta explícitamente en términos de (5.14). Sin embargo, el obtener información detallada para funciones  $f$  específicas resulta complicado, ya que se debe determinar la parte de  $\Omega$  que contribuye a la (5.14) para un tiempo  $t$ , a través de la relación no lineal  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Este problema se presenta cuando se trata de calcular la forma de las ondas sísmicas emitidas por una falla del terreno que se modela a través de la función  $f(\mathbf{x}, t)$ . Por este motivo debe recurrirse a aproximaciones o integración numérica de (5.14). Ahora discutiremos algunas aproximaciones que nos

darán un mejor entendimiento del uso y las limitaciones de la misma. En primer lugar consideremos el caso en el que  $f(\mathbf{x}, t)$  es de la forma

$$f(\mathbf{x}, t) = \delta_\epsilon(\mathbf{x})g(t) \quad (5.17)$$

donde la función  $\delta_\epsilon(\mathbf{x})$  sólo es apreciable dentro de una esfera de radio  $\epsilon$ . Por ejemplo

$$\delta_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} h_\epsilon(\mathbf{x}); \quad h_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & |\mathbf{x}| \leq \epsilon, \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Para una distribución de intensidad en la fuente dada como en (5.17) (fuente concentrada en el origen) tenemos que la fórmula (5.14) toma la forma

$$\rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{|\mathbf{x}'| \leq \epsilon} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'||\mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}'. \quad (5.18)$$

Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , usando el teorema del valor medio tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{\mathbf{R}^3} \delta_\epsilon(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \frac{g(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}. \quad (5.19)$$

La (5.19) nos da la intensidad de sonido en  $\mathbf{x}$  emitido por una fuente puntual (muy concentrada en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) que varía como  $g(t)$ . Notemos que  $\rho$  no depende del ángulo, ya que la situación es esféricamente simétrica. Observemos también que el sonido recibido en  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  es  $g(t - |\mathbf{x}|)$ , atenuado por  $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$  pero de la misma forma  $g$ . Es decir, no hay distorsión.

Otra situación de interés en la solución (5.14) es cuando  $f(\mathbf{x}, t)$  está concentrada cerca de una región del plano  $xy$ , por ejemplo

$$f(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} g(x, y, t), & |x| \leq 2, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & |x| > 2, \quad |y| > 1, \quad |z| > \frac{\epsilon}{2}, \quad t > 1. \end{cases} \quad (5.20)$$

Esta función representa una fuente de sonido concentrada cerca del plano  $z = 0$ , y es una versión simple de un modelo usado con frecuencia en sismología, donde  $f$  se interpreta como la fuerza de una falla del terreno, y la solución representa la onda sísmica. La región donde  $f \neq 0$  se ve en la Fig. 5.2.

Para una  $f$  como en (5.20), (5.14) queda de la siguiente manera

$$\rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{g(x', y', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy' dz'. \quad (5.21)$$

Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , los puntos  $\mathbf{x}'$  quedan atados sobre el plano  $z = 0$ , y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \frac{g(x', y', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy'. \quad (5.22)$$

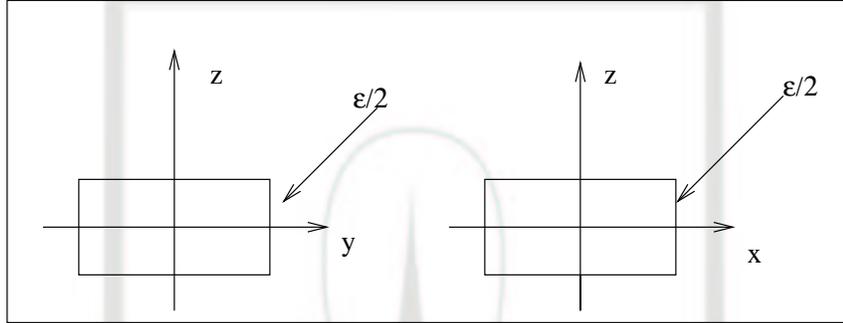


Fig. 5.2

Podemos simplificar (5.22) si suponemos que la distancia  $|\mathbf{x}|$  del punto a la fuente es mucho mayor que las dimensiones de la fuente. Es decir,  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$ . En este caso aproximamos  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  como

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2} = |\mathbf{x}| - \hat{x} \cdot \mathbf{x}'$$

con  $\hat{x} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . Usando la última aproximación, (5.22) se escribe como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 g(x', y', t - |\mathbf{x}| + \hat{x} \cdot \mathbf{x}') dx' dy' \quad (5.23)$$

Para calcular (5.23) es conveniente tomar  $t - |\mathbf{x}| = \tau$ , es decir, llamar  $\tau = 0$  el tiempo al que llega la señal de  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  al punto  $\mathbf{x}$ .

Vemos que la forma de la onda  $\rho(\mathbf{x}, t)$  depende a través de  $\hat{x}$  del ángulo de observación. Calcularemos con detalle la (5.23) cuando  $\hat{x} = (1, 0, 0)$ ,  $g = 1$ . En dicho caso, una vista superior de la situación se ilustra en la Fig. 5.3.

De (5.23) vemos que  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es precisamente el área, al tiempo  $t$ , de la región del rectángulo  $|x| \leq 2$ ;  $|y| \leq 1$  en la que  $g \neq 0$ . Debemos pues encontrar estas regiones como función del tiempo a partir de la ecuación (5.20). De ella vemos que  $g \neq 0$  si

$$\begin{aligned} -2 \leq x' \leq 2, & \quad -1 \leq y' \leq 1, \\ 0 \leq \tau + x' \leq 1, & \quad -\tau \leq x' \leq 1 - \tau. \end{aligned} \quad (5.24)$$

La (5.24) nos dicen que  $g \neq 0$  para los puntos dentro del rectángulo cuya  $x'$  está entre las rectas  $L_1 : x' = \tau$  y  $L_2 : x' = 1 - \tau$ . Identifiquemos ahora las regiones. Si  $\tau < -2$  tenemos que la recta  $L_1$  queda a la derecha de  $x = 2$ . Por esto  $g = 0$  y  $\rho = 0$  si  $\tau < -2$ . Para  $\tau > -2$ , la región donde  $g \neq 0$  es la sombreada en la Fig. 5.4.

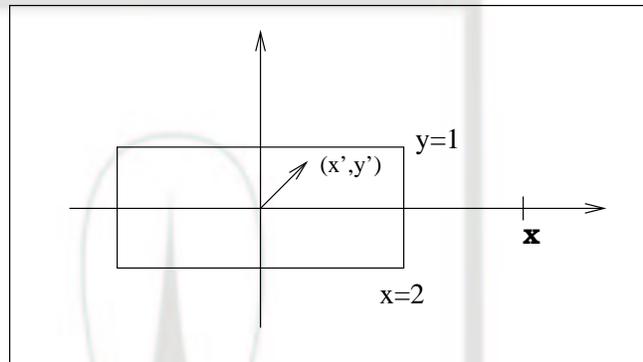


Fig. 5.3

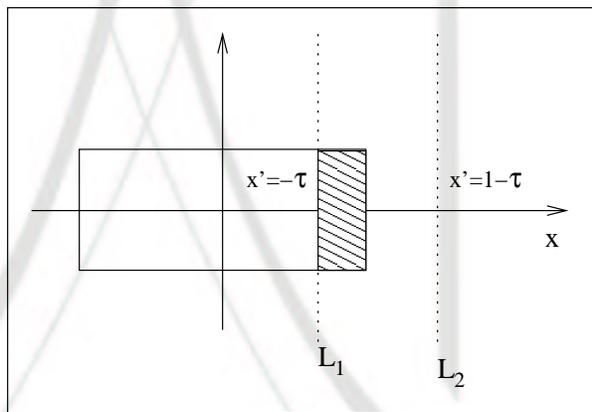


Fig. 5.4

de donde  $\rho = 2(2 + \tau)$ . Esta situación prevalece hasta que  $L_2$  llega a  $x = 2$ , es decir, cuando  $\tau = -1$ . Para tiempos  $\tau$  mayores que  $-1$ , se tiene que la región que contribuye es aquella sombreada en Fig. 5.5.

De la figura anterior tenemos que para  $\tau > -1$ ,  $\rho = 2$ . Esto sucede hasta que  $L_1$  llega a  $x = -2$  que es cuando  $\tau = 2$ . Para tiempos  $\tau > 2$ , el área que contribuye está sombreada en la Fig. 5.6.

En este caso tenemos que  $\rho = 2(\tau - 3)$  para  $\tau \geq 2$ . Cuando  $\tau > 3$ ,  $\rho = 0$  ya que  $L_2$

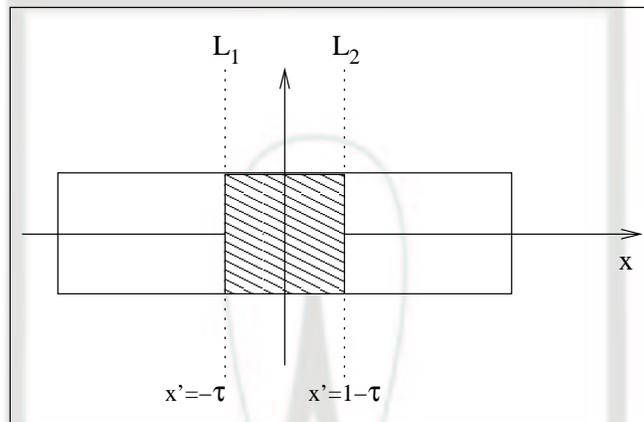


Fig. 5.5

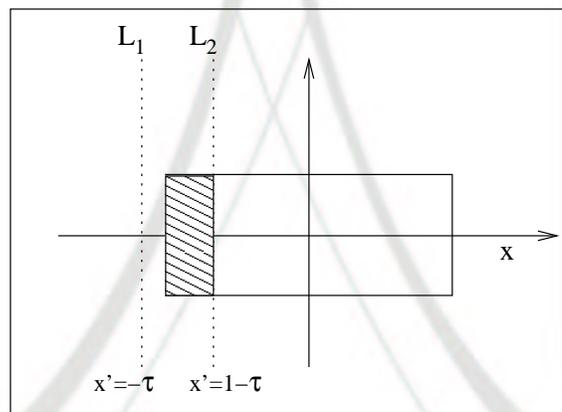


Fig. 5.6

abandona el rectángulo. Resumiendo vemos que

$$4\pi|x|\rho(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -2, \\ 2(2 + \tau), & -2 \leq \tau \leq -1, \\ 2, & -1 \leq \tau \leq 2, \\ 2(\tau - 3), & 2 \leq \tau \leq 3, \\ 0, & 3 \leq \tau. \end{cases}$$

La gráfica de la amplitud de la onda de sonido se muestra en la Fig. 5.7.

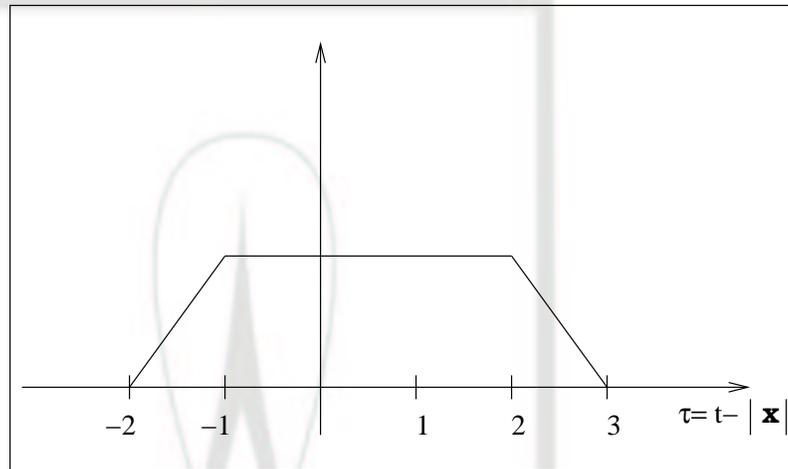


Fig. 5.7

En la Fig. 5.7 vemos que la primera señal  $\mathbf{x}$  es aquella que viene de la región derecha del rectángulo que es la más cercana al punto de observación. Estas señales llegan para  $\tau < 0$ , ya que llegan antes de las que fueron emitidas en  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  cuyo tiempo de llegada a  $\mathbf{x}$  hemos escogido como  $\tau = 0$ . A tiempos posteriores contribuyen las regiones más alejadas hasta que la última señal llega de la franja situada en  $\mathbf{x}' = -2$  que es la parte más alejada de la fuente.

Queda como un ejercicio calcular  $\rho(\mathbf{x}, t)$  cuando  $\hat{\mathbf{x}} = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{x}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . Además calcular la onda que llega a un punto lejano cuando la fuente es circular. Es decir tomando en (5.21)  $g(x', y', t) = 1$  si  $x'^2 + y'^2 \leq 1$ ,  $t \leq 1$ ,  $t \geq 0$  y  $g = 0$  fuera de esas regiones. Compare los resultados en ambos casos.

#### 5.4. El problema con valores iniciales para la ecuación de onda en tres dimensiones

Para terminar nuestra breve discusión sobre la ecuación de onda en tres dimensiones consideramos el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= \nabla^2 u, \\
 u(x, 0) &= 0, \\
 u_t(x, 0) &= g(x).
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

donde  $g(x)$  es una función dada. Consideramos (5.25), ya que el problema

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \nabla^2 v, \\ v(x, 0) &= g(x), \\ v_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

tiene por solución  $v = u_t$  donde  $u$  es la solución de (5.25). Esto se puede verificar substituyendo  $u_t$  en (5.26) obteniendo

$$\begin{aligned} v_{tt} - \nabla^2 v &= u_{ttt} - \nabla^2 u_t = (u_{tt} - \nabla^2 u)_t = 0, \\ v(x, 0) &= u_t(x, 0) = g(x), \\ v_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) &= \nabla^2 u(x, 0) = \nabla^2 0 = 0. \end{aligned}$$

Resulta también interesante comprobar este hecho en la ecuación de onda unidimensional para la cual se conocen soluciones explícitas en la (5.25) y la (5.26). Por esta razón sólo resolveremos (5.25).

Tomamos la transformada de Fourier en (5.25),  $\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbf{R}^3} u(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$  y se obtiene para  $\hat{u}$  la ecuación ordinaria:

$$\hat{u}_{tt} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\mathbf{k}, 0) = 0, \quad \hat{u}_t(\mathbf{k}, 0) = \hat{g}(\mathbf{k}),$$

que tiene por solución

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{g}(\mathbf{k}) \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.27)$$

De (5.27) tenemos la solución formal de (5.25) en la forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{g}(\mathbf{k}) \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (5.28)$$

Es importante obtener una representación más útil de (5.28). Para esto expresemos  $\hat{g}(\mathbf{k})$  en términos de  $g$  y obtenemos después de invertir el orden de integración (que es legítimo si  $g(\mathbf{x}) = 0$  para  $|\mathbf{x}| > R$ ):

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} g(\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\xi} \left\{ \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \right\} d\xi. \quad (5.29)$$

Para calcular (5.29) cambiamos de variable haciendo  $\xi = \mathbf{x} + \eta$ , de manera que

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} g(\mathbf{x} + \eta) \left\{ \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\eta} d\mathbf{k} \right\} d\eta. \quad (5.30)$$

En (5.30) calculamos la integral respecto a  $\mathbf{k}$  introduciendo coordenadas polares con eje  $\eta$  para obtener así

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\mathbf{k} &= 2\pi \int_0^K \int_0^\pi |\mathbf{k}| e^{i|\mathbf{k}||\eta| \cos \theta} \sin(|\mathbf{k}|t) \sin \theta d\theta d|\mathbf{k}| \\ &= \frac{4\pi}{|\eta|} \int_0^K \sin(|\mathbf{k}||\eta|) \sin(|\mathbf{k}|t) d|\mathbf{k}| = \frac{4\pi}{|\eta|} D(|\eta|, t, K). \end{aligned} \quad (5.31)$$

La integral en (5.31) es la conocida integral de Dirichlet, y sabemos que para cualquier función  $h(|\eta|)$  se tiene que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^\infty D(|\eta|, t, K) h(|\eta|) d|\eta| = 2\pi^2 h(t). \quad (5.32)$$

Utilizando esta última identidad calcularemos (5.30). Es conveniente introducir coordenadas polares

$$\eta = |\eta| \hat{\theta} = |\eta| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta); \quad ds = d\hat{\theta}$$

y transformar (5.30) con ayuda de (5.31) en

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty |\eta| \left\{ \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + |\eta| \hat{\theta}) d\hat{\theta} \right\} 4\pi D(|\eta|, t, K) d|\eta|. \quad (5.33)$$

Usando (5.32) llamando  $h(|\eta|) = |\eta| \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + |\eta| \hat{\theta}) d\hat{\theta}$  que es a función para la cual es válida (5.32). Tenemos que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + t\hat{\theta}) d\hat{\theta} \quad (5.34)$$

que es la expresión buscada para  $u$  en términos de los datos iniciales. Esta fórmula también se debe a Poisson.

La (5.34) tiene una interpretación muy iluminante. Para darla es conveniente referirnos a la Fig. 5.8.

Al tiempo  $t = 0$  sabemos que  $g \neq 0$  sólo en cierta región que se muestra en la Fig. 5.8. La fórmula (5.34) nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar una esfera  $S_t$  de radio  $t$  alrededor de  $\mathbf{x}$ , ver qué valores toma  $g$  sobre dicha esfera, e integrar esos valores de  $g$ . En la Fig. 5.8 vemos que en general sólo una parte de  $S_t$  intersecta la región perturbada por  $g$ . Por ello  $u = 0$  para  $t < t_1$ . De la misma forma la última señal llega cuando  $S_t$  intersecta a la región donde  $g \neq 0$ .

Vemos en la (5.34) que el problema para resolver la ecuación de onda se ha transformado en un problema geométrico que consiste en encontrar como función del tiempo

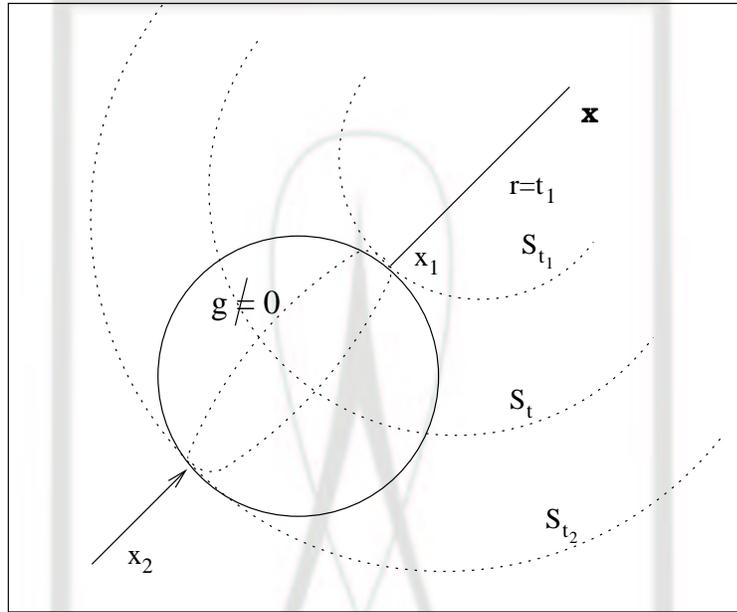


Fig. 5.8

la intersección de  $S_t$  con la región donde  $g \neq 0$ . Esto es en general un problema geométrico bastante complejo que debe resolverse en cada caso. En la mayoría de las ocasiones es imposible evaluar la (5.34) en forma cerrada. Sin embargo, cuando  $|\mathbf{x}|$  es mucho mayor que las dimensiones de la región donde  $g \neq 0$  se puede recurrir a una aproximación. En este caso podemos aproximar  $S_t$  por un plano que tiene por normal un vector a lo largo de la línea que une  $\mathbf{x}$  con el centro de la fuente. Estos planos se desplazan hacia la fuente con velocidad uno.

Para ilustrar esta aproximación tomemos  $u_t(x, 0) = g(x) = 1$  para  $|\mathbf{x}| \leq a$ , y busquemos  $u(\vec{x}_0, t)$  donde  $a \ll |\vec{x}_0|$ . La situación se muestra en la Fig. 5.9.

El plano  $x = x_0 - t$  se mueve hacia la izquierda y la integral de la (5.34) se aproxima por el área sombreada en la Fig. 5.9. Vemos también que para  $0 \leq t \leq x_0 - a$ ,  $u = 0$  ya que  $P_t$  no interseca a la esfera donde la condición inicial no es cero. Para tiempos  $x_0 - a \leq t \leq x_0 + a$  el área sombreada multiplicada por  $4\pi t$  es el valor de  $u$ . Como vemos en la Fig. 5.9 el área sombreada está dada por  $\pi\{a^2 - (x_0 - t)^2\}$ . Finalmente tenemos que

$$u(x_0, t) = \begin{cases} \frac{t}{4}\{a^2 - (x_0 - t)^2\}, & x_0 - a \leq t \leq x_0 + a, \\ 0, & |t - x_0| \geq a. \end{cases} \quad (5.35)$$

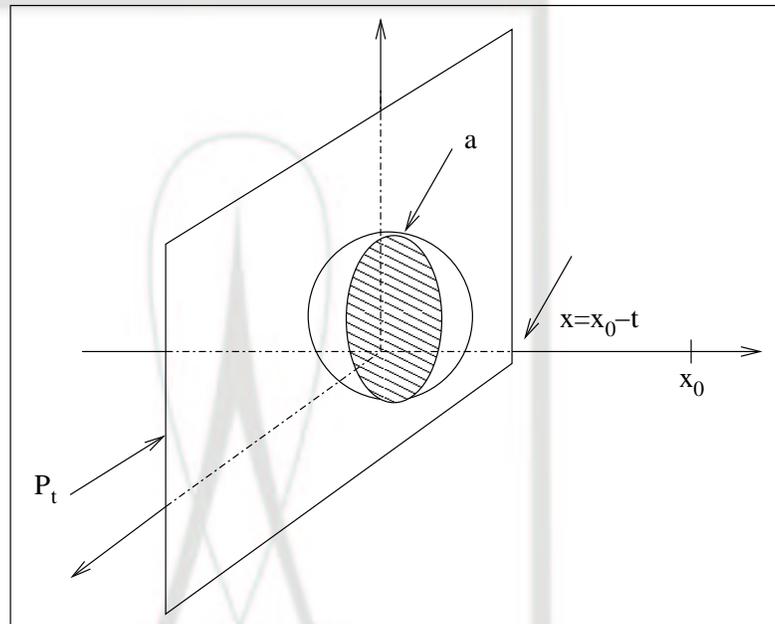


Fig. 5.9

Notamos en la (5.35) que a medida que  $x_0$  se aleja de la fuente, la gráfica de  $u$  se vuelve cada vez más angosta y más alta. Esta situación es desde luego independiente de la orientación de  $x_0$  ya que la simetría es esférica. Queda como un ejercicio el convencerse de este detalle.

Un último ejercicio es encontrar utilizando (5.34) la solución del problema

$$u_{tt} = \nabla^2 u,$$

$$u(x, 0) = g(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \mathbf{x} \text{ está en el elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{array} \right\} \quad (5.36)$$

cuando el punto de observación está alejado del elipsoide, y está sobre los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

En esta discusión se construyeron varias soluciones para la ecuación de onda en tres dimensiones. No se probó la unicidad, pero la idea es la misma que la usada para una sola ecuación. Una prueba elemental de estos hechos se encuentra en el libro de Weinberger [15]. Un tratamiento más avanzado podrá consultarse en las notas de J. Ize [8] así como en el libro de Courant-Hilbert [3]. Hay pruebas especiales para las ecuaciones de Maxwell en las notas de K. O. Friedrichs [7].

Para concluir esta sección comentamos que hay métodos alternativos para resolver la ecuación de onda como lo son las funciones de Riemann, los promedios esféricos, y los

potenciales de Ritz. Esto no lo discutiremos aquí, y remitimos al lector a los libros de Courant-Hilbert [3], John [10], y Copson [2].



<http://www.fenomec.unam.mx>



<http://www.fenomec.unam.mx>

## Capítulo 6

# Ecuación de difusión

En este capítulo se encuentran algunos ejemplos de propagación de calor y de otros procesos de difusión. Los procesos de difusión son muy diferentes a los hiperbólicos que se consideraron al principio de estas notas. En la difusión las soluciones se deforman y los procesos se relajan a un equilibrio. Por otra parte las ecuaciones de difusión también controlan la propagación de inestabilidades de diferentes tipos. En este capítulo se examinan algunos ejemplos prototípicos.

### 6.1. Propagación de calor

Si tenemos un cuerpo unidimensional en el intervalo  $0 \leq x \leq l$  y denotamos por  $T(x, t)$  la temperatura en el punto  $x$  al tiempo  $t$ , podemos calcular el balance de calor en él. La cantidad de calor en el tramo  $x_0, x_0 + h$ , está dada por

Cantidad de calor = Calor específico  $\times$  masa  $\times$  temperatura.

Sabemos que

$$\text{masa} = \int_{x_0}^{x_0+h} \rho(x) dx$$

donde  $\rho(x)$  es la densidad. Tenemos así que la cantidad de calor entre  $x_0$  y  $x_0 + h$  es

$$\int_{x_0}^{x_0+h} C_e(x) \rho(x) T(x, t) dx, \quad C_e = \text{calor específico.}$$

Por otra parte el balance de calor (conservación de energía) nos dice que el cambio de la cantidad de calor entre  $x_0$  y  $x_0 + h$  = calor que entra - calor que sale + calor

que suministran agentes externos.

Así tenemos denotando por  $Q(x)$  el flujo que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} C_e(x) \rho(x) T(x, t) dx = Q(x_0 + h) - Q(x_0) + \text{calor suministrado}.$$

Falta relacionar el flujo de calor con la temperatura y esto se obtiene de modo experimental. Experimentalmente se determinó que

$$Q(x) = -K(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

donde  $K(x)$  es la conductividad térmica. Por otra parte el calor suministrado por una fuente externa se puede escribir como

$$\int_{x_0}^{x_0+h} q(x, t) dx, \quad \text{para alguna función } q \text{ dada.}$$

Cambiando la variable  $x_0 + h$  por  $x$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x C_e(\xi) \rho(\xi) T(\xi, t) d\xi = -K(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \int_{x_0}^x q(\xi, t) d\xi.$$

Derivando respecto al límite superior tenemos que la temperatura satisface la ecuación

$$C_e(x) \rho(x) T_t(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t). \quad (6.1)$$

Esta es una ecuación de conservación. La ecuación (6.1) debe resolverse con condición inicial  $T(x, 0) = h(x)$  y condiciones de frontera en  $x = 0$  y  $x = l$ . Si la temperatura o el flujo están dados en la frontera se conoce  $T(0, t)$ ,  $T(l, t)$  o bien  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$  y  $\frac{\partial T}{\partial x}(l, t)$ . Por otra parte en un extremo se puede dar la temperatura y en otro el flujo. Si se considera la ley de enfriamiento de Newton la condición de frontera queda como una combinación de  $T$  y  $T_x$ . La función  $q(x, t)$  de la ecuación (6.1) es un dato del problema.

## 6.2. Dispersión de contaminantes

Un problema interesante al que en una primera aproximación puede aplicarse la ecuación de calor es el de difusión de contaminantes. Para esto suponemos que la concentración de contaminantes en el punto  $x$  al tiempo  $t$  es  $c(x, t)$ . Entonces se cumple:

Variación de la cantidad de contaminantes = flujo de contaminantes  
+ la producción del agente,

es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x c(\xi, t) d\xi = Q(x, t) - Q(x_0, t) + \text{producción del agente.}$$

El flujo  $Q(x, t)$  se determina experimentalmente. El caso de interés es cuando hay un viento con velocidad  $U$ , en cuyo caso el flujo puede aproximarse por

$$Q(x, t) = K \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) + U c(x, t).$$

donde el primer término es difusivo y el segundo el efecto del transporte por el viento. Entonces la ecuación para difusión y transporte de contaminantes está dada, cuando  $K$  es constante, por

$$c_t = K c_{xx} + U c_x. \quad (6.2)$$

Una versión más general, cuando el coeficiente de difusión  $K$  es variable, se plantea, en una región finita, de la siguiente forma:

$$c_e(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

$$T(x, 0) = T_0(x) = \text{temperatura inicial que es conocida}$$

y las condiciones de frontera en  $T(a, t)$  y  $T(b, t)$ . Estas pueden ser de varios tipos. Pueden darse  $T(a, t)$  y  $T(b, t)$ , si el calentamiento está prescrito. Pueden darse los flujos  $K \frac{\partial T}{\partial x}$  en  $x = a$ , y  $x = b$ . También se puede dar en un extremo un flujo y en el otro una temperatura.

Para describir la ley de enfriamiento de Newton en la frontera se da la combinación  $K \frac{\partial T}{\partial x} + \beta(T - T_A) = 0$  donde  $T_A$  es la temperatura del ambiente. El detalle de las soluciones a este tipo de problemas está en el libro de Weinberger. En este capítulo se describen problemas cuya solución si bien es elemental, se dejan para textos más avanzados.

Para estudiar el problema de dispersión de contaminantes por una chimenea colocada en  $x = 0$  se tiene  $c(a, t) = g(t)$  donde  $g(t)$  es la producción de contaminantes. Inicialmente se puede suponer el cielo limpio, es decir  $c(x, 0) = 0$ . La ecuación que debe resolverse es

$$c_t = K c_{xx} + U c_x, \quad x \leq 0, \quad t \leq 0,$$

$$c(x, 0) = 0, \quad c(0, t) = g(t).$$

Otro problema es la dispersión de un contaminante que se suelta inicialmente en  $x = 0$ . La solución se busca ahora en toda la recta y la condición inicial es

$$c(x, 0) = \begin{cases} Q/2, & |x| \leq \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon, \end{cases}$$

que corresponde a soltar una cantidad total  $Q$  de contaminante en el origen.

### 6.3. El efecto de las fuentes

Una clase muy importante de problemas es cuando se tiene una fuente de calor. Con una fuente  $Q$ , la ecuación tiene la forma:

$$T_t = KT_{xx} + Q,$$

con condiciones iniciales y de frontera apropiadas. En muchas situaciones  $Q$  depende de la temperatura  $Q = Q(T)$ . Esta dependencia en general es **no** lineal y da origen a muchísimos fenómenos, nuevos e interesantes que a la fecha no están completamente entendidos. Un ejemplo es el de las reacciones exotérmicas. En este caso  $Q(T) = e^{\alpha T}$ . Permaneciendo en el régimen lineal podemos tomar  $Q(T) = \beta T$ . El caso  $\beta > 0$  es de una fuente mientras que  $\beta < 0$  corresponde a un sumidero. En el primer caso la ecuación ordinaria que resulta al tomar  $K = 0$  dice que  $T = 0$  es inestable mientras que para  $\beta < 0$  es estable. Así, la ecuación con  $\beta > 0$  y  $K \neq 0$  describe la interacción de la difusión con la inestabilidad. En propagación espacio-temporal de poblaciones o epidemias,  $\beta > 0$  es el término de nacimiento y la ecuación describe la evolución espacio-temporal de una infección o una epidemia.

El caso  $\beta > 0$ , al interpretarse  $T$  como un voltaje en un cable pasivo, representa el decaimiento del voltaje a lo largo del cable debido a las pérdidas resistivas.

A continuación resolveremos algunos de estos problemas.

Comenzaremos por el problema de difusión de calor o de contaminantes (sin viento) que describe la ecuación del calor con condiciones iniciales apropiadas.

Las condiciones de frontera e iniciales dependen de la aplicación específica.

Cuando se tiene una distribución inicial de temperatura  $T(x, 0) = h(x)$ , y las propiedades del medio son constantes, el problema por resolver es

$$T_t = \frac{K}{C_e \rho} T_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$T(x, 0) = h(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

La solución se encuentra usando la transformada de Fourier  $\hat{T}$  de  $T$  dado que

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{T}(k, t) dk,$$

$$\hat{T}_t(k, t) = -Dk^2 \hat{T}, \quad \hat{T}(k, 0) = \hat{h}(k), \quad D = K/C_e \rho.$$

Resolviendo la ecuación para  $\hat{T}$  y sustituyendo en la integral tenemos

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk.$$

Es interesante observar que variaciones rápidas ( $k$  grande) se amortiguan rápidamente. Por otra parte las variaciones lentas lo hacen más despacio.

Utilizando el resultado de la transformada de Fourier de la gaussiana dado en el Apéndice A, vemos que  $e^{-Dk^2 t} = \hat{f}(k, t)$  para  $f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$  de aquí que

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k, t) \hat{h}(k) dk.$$

Ahora aplicamos el teorema de convolución para escribir

$$T(x, \tilde{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tilde{t}}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4\tilde{t}} d\xi, \quad (6.3)$$

donde  $\tilde{t} = Dt$ .

Si la función  $h(x)$  representa una excitación localizada al tiempo inicial,  $h(x) = \frac{1}{2\epsilon}$  si  $|x| \leq \epsilon$ ,  $h(x) = 0$  para  $|x| > \epsilon$ , tenemos que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (6.4)$$

Vemos que  $T(x, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El máximo se encuentra siempre en  $x = 0$ . La dispersión de la gaussiana es  $4Dt$  y se hace cada vez más grande conforme el tiempo pasa. Es interesante contrastar esta solución con la solución de la ecuación de onda. Las ondas se mueven al infinito con velocidad finita. El calor se difunde con una dispersión  $x^2 = 4Dt$ . El máximo inicial no se mueve. Podría pensarse a primera vista que las señales de calor se propagan con velocidad infinita ya que  $T(x, t) \neq 0$  para todos los valores de  $x$  en cuanto  $t > 0$ . Esto no es ninguna contradicción y se debe a nuestra hipótesis de “respuesta instantánea”: Flujo =  $-K \frac{\partial T}{\partial x}$ . Por otra parte la señal es exponencialmente pequeña si  $x^2 > 4Dt$ . En la aproximación de difusión sólo se toman en cuenta las escalas de relajación del material y no las de la inercia

que darán una velocidad finita de propagación. El lector interesado podrá resolver el problema

$$\begin{aligned}\mu^2 u_{tt} + u_t &= Du_{xx}, \\ u(x, 0) &= h(x),\end{aligned}$$

tomar el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  y convencerse en detalle de que cuando la inercia  $\mu$  es pequeña el calor se difunde “sin sentir” la velocidad finita de propagación.

Hemos obtenido una solución pero no sabemos si ésta es única. Para estudiar la unicidad hay diferentes ideas. Aquí exploraremos el método de la entropía. Si tenemos dos soluciones de la ecuación del calor que decaen a cero en  $\pm\infty$  entonces su diferencia  $T(x, t) = T_2(x, t) - T_1(x, t)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  al igual que  $T_x$ .

Entonces  $T$  satisface la ecuación

$$T_t = KT_{xx}, \quad T(x, 0) = 0.$$

La entropía del sistema está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx$$

si es que  $T \geq 0$ . Supongamos que  $T > 0$ . (Físicamente la temperatura que es inicialmente cero absoluto no puede decrecer). El caso  $T < 0$  será tratado después.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_t}{1 + T} dx = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{xx}}{1 + T} dx \\ &= K \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_x^2}{(1 + T)^2} dx \right) \leq 0.\end{aligned}$$

De aquí que la entropía es una función no negativa, no creciente y comienza en cero, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx = 0 \quad \text{si } t > 0.$$

De donde  $T = 0$  si  $t > 0$  ya que si  $T > 0$  la integral sería distinta a cero.

Esta entropía es singular para  $T < 0$ . La misma idea puede usarse de otra forma. Considerando la ecuación

$$T_t = KT_{xx}$$

y multiplicando por  $T$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} T^2 = K T T_{xx}.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T^2 dx = K \int_{-\infty}^{\infty} T T_{xx} dx = -K \int_{-\infty}^{\infty} T_x^2 dx < 0$$

de donde se sigue que  $T = 0$ . Esto prueba la unicidad de la solución.

El problema de difusión de contaminantes

$$C_t = DC_{xx} + UC_x, \quad C(x, 0) = h_\epsilon(x),$$

tiene como solución

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x-Ut)^2/4Dt}.$$

El lector podrá verificar esto modificando la fórmula (6.3) o usando el cambio de variables  $x' = x - Ut$  para transformar la ecuación (6.2) en la ecuación (6.1). Esta solución explica la formación de la pluma que los contaminantes producen al dispersarse en el aire. La zona contaminada es la zona donde la exponencial tiene un exponente menor que uno. De aquí que

$$(x - Ut)^2 = 4Dt$$

es la frontera de esta zona.

Las fronteras de la pluma son  $x = Ut \pm 2\sqrt{Dt}$ . En el plano  $(x, t)$  esta zona se muestra en la Fig.6.1.

La Fig. 6.1 muestra cómo el viento transforma el contaminante con una velocidad media  $U$ . Además la difusión lo expande con una rapidez menor, lo cual da origen a la pluma.

Queda como un ejercicio para el lector el problema de hallar la pluma producida por una chimenea.

Consideramos ahora el problema en presencia de una fuente que depende de la temperatura. Consideramos pues la ecuación

$$T_t = DT_{xx} + \beta T, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

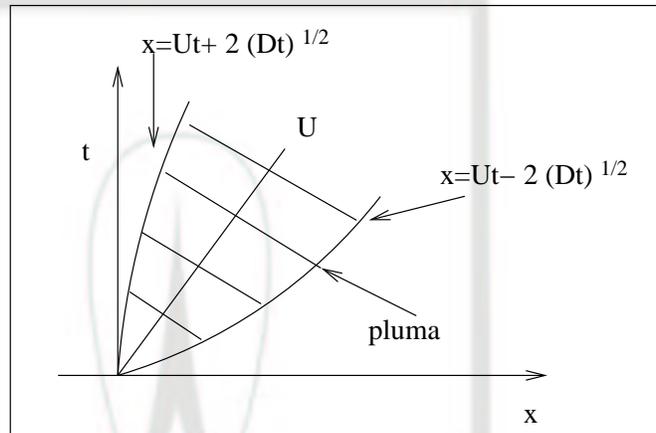


Fig. 6.1

El caso  $\beta > 0$  es el problema de invasión a la zona  $x > 0$  de una inestabilidad  $T = 1$  localizada en la zona  $x < 0$ . En este caso la difusión alisa la discontinuidad provocando una perturbación en  $x > 0$  que es amplificada por  $\beta$  en la zona  $x > 0$ . Este proceso se repite y la inestabilidad avanza. Para encontrar la velocidad de avance cambiamos de variable  $T = e^{\beta t}v$  y obtenemos:

$$v_t = Dv_{xx}, \quad v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

La solución está dada por la fórmula (6.3). En este caso tenemos:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^0 e^{-(x-\xi)^2/4Dt} d\xi,$$

Cambiando variables  $\xi = x + u$ , tenemos:

$$T(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-u^2/4Dt} du.$$

Para estudiar el comportamiento de esta función calculamos

$$T_x(x, t) = -\frac{e^{\beta t - x^2/4Dt}}{2\sqrt{\pi Dt}}.$$

De la fórmula anterior podemos concluir que  $T_x$  es exponencialmente pequeña si  $x^2/4Dt \geq \beta t$ .

Integrando tenemos que

$$T(x, t) = - \int_x^\infty T_x dx$$

y concluimos que  $T(x, t)$  es exponencialmente chica para

$$x^2/4Dt \geq \beta t.$$

Por otra parte si  $x^2/4Dt \leq \beta t$  la solución crece. El punto  $x = 2\sqrt{D\beta t}$  separa estas dos regiones y representa un frente de inestabilidad que invade a la región de quietud.

En la Fig. 6.2 tenemos que

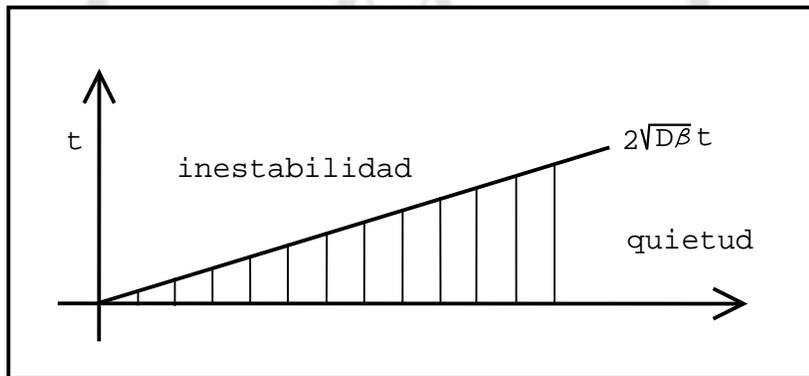


Fig. 6.2

Si a esta ecuación le añadimos un término de saturación  $-\beta T^2$ , obtenemos la ecuación de Fisher:

$$T_t = DT_{xx} + \beta T(1 - T)$$

La inestabilidad se satura en  $T = 1$  y obtenemos un frente que se propaga como una onda viajera tal como se muestra en la Fig. 6.3

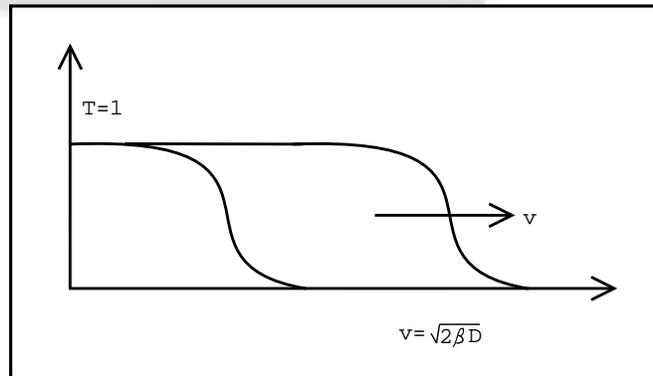


Fig. 6.3

Estos frentes se propagan con mayor velocidad cuando la razón  $\beta$  es grande y cuando la difusión es grande. Esto es de esperarse por la física del problema.

Como último ejemplo estudiaremos la propagación de una inyección de corriente en un cable pasivo. En este caso el estado  $v = 0$  es estable por tratarse de un circuito RC pasivo. La ecuación por resolver es:

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} - \beta v, \quad x \geq 0, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) &= h(t) = \text{pulso de corriente inyectado en } x = 0, \\ v(x, 0) &= 0, \quad v(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Resolveremos este problema tomando la transformada de Laplace (Apéndice B)  $\tilde{v}$  de  $v$  en  $t$  dado que  $t > 0$ . Así

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \tilde{v}(s, x) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \tilde{v}(s, x) ds. \end{aligned}$$

El contorno  $C$  se encuentra a la derecha de las singularidades de  $\tilde{v}$  como función de  $s$ . Sustituyendo encontramos la ecuación para  $\tilde{v}(x, s)$

$$\tilde{v}_{xx}(x, s) - \frac{(s + \beta)}{D} \tilde{v}(x, s) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad s > 0,$$

$$\tilde{v}_x(0, s) = \tilde{h}(s), \quad s > 0,$$

$$\tilde{v}(x, s) \rightarrow 0, \quad \text{si } x \rightarrow \infty.$$

La solución es

$$\hat{v}(x, s) = A(s)e^{\sqrt{\frac{s+\beta}{D}}x} + B(s)e^{-\sqrt{\frac{s+\beta}{D}}x}.$$

El decaimiento para  $x \rightarrow \infty$  implica que  $A(s) = 0$ , y la condición en  $x = 0$  implica  $\tilde{h}(s) = -\sqrt{(s+\beta)/D}B(s)$ , por lo tanto

$$\tilde{v}(x, s) = -\sqrt{\frac{D}{s+\beta}}\tilde{h}(s)e^{-\sqrt{\frac{s+\beta}{D}}x}.$$

Ahora se tiene que invertir la transformada de Laplace. La transformada  $\tilde{h}(s)$  de un pulso unitario

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 < x < \epsilon, \\ 0, & x \geq \epsilon, \end{cases}$$

es  $\tilde{h}(s) = 1$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Con todo lo anterior, la solución de (6.5) está dada por:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{-\sqrt{D}}{2\pi i} \int_c \frac{e^{-\sqrt{\frac{s+\beta}{D}}x} e^{st}}{\sqrt{s+\beta}} ds \\ &= \frac{\sqrt{D}e^{-\beta t}}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \frac{x}{\sqrt{D}}} e^{\sigma t} d\sigma \end{aligned}$$

pero se sabe que  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{\sqrt{\sigma}|x-y|} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}$  lo cual implica

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -\sqrt{D}e^{-\beta t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x/\sqrt{D})^2/4t} \\ &= e^{-\beta t} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} e^{-x^2/4Dt} \end{aligned}$$

La corriente a lo largo del cable es  $v_x$  y está dada por

$$v_x(x, t) = \frac{e^{-\beta t} x}{2\sqrt{D\pi t^3}} e^{-x^2/4Dt}$$

Vemos pues que la corriente decae con una amplitud  $e^{-\beta t}$  debido a las pérdidas resistivas. El máximo valor de la corriente está dada en el punto donde  $x(t)$  satisface

$$v_{xx}(x(t), t) = 0.$$

Obtenemos:  $x(t) = \sqrt{2Dt}$ .

El pulso de corriente viaja con velocidad  $\sqrt{2Dt}$ . Sin embargo la amplitud decrece y la señal se deteriora. Por esta razón las líneas de transmisión pasivas deben complementarse con elementos activos (amplificadores) que compensen el deterioro del pulso. La naturaleza resuelve este problema en los axones (que conducen la corriente en el

sistema nervioso) haciendo que  $\beta$  no sea constante sino que  $\beta$  dependa del voltaje de una manera apropiada. De hecho Hodgking y Huxley postularon un mecanismo de conducción activa haciendo precisamente depender  $\beta$  del voltaje. Se obtuvieron soluciones de esta ecuación no lineal con forma de ondas que viajan sin perder amplitud. Una vez obtenidas estas soluciones pudieron entender el mecanismo de membrana responsable de la conducción activa. Este descubrimiento fue fundamental y Hodgking y Huxley obtuvieron el premio Nobel ya que cambiaron nuestra comprensión de los procesos de comunicación entre los componentes del sistema nervioso [8].

# Apéndice A

## Transformada de Fourier

En esta sección explicaremos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier que se han usado en el texto. Una exposición de estos resultados se puede encontrar en cualquier libro de análisis. Nuestra presentación sigue muy de cerca la del libro de Weinberger.

Empezaremos por recordar que la transformada de Fourier de una función  $f(x)$  (que supondremos lo suficientemente regular e integrable) se define como

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

Conociendo  $\hat{f}(k)$  se puede recuperar  $f(x)$  con la fórmula de inversión

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (\text{A.2})$$

Resulta de utilidad calcular la transformada de  $f'(x)$  en términos de la transformada de  $f(x)$ . Esto lo calculamos derivando (A.2) y obteniendo

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} ik \hat{f}(k) dk. \quad (\text{A.3})$$

Observamos que (A.3) nos muestra que  $f'(x)$  es la transformada inversa de  $ik\hat{f}(k)$ . Por esto, de (A.1) tenemos que la transformada de  $f'(x)$  es precisamente  $ik\hat{f}(k)$ . Se deja como un ejercicio el encontrar la transformada de la  $n$ -ésima derivada de  $f$  en términos de  $\hat{f}(k)$ . La fórmula (A.2) nos dice que cualquier función  $f(x)$  puede escribirse como una suma de ondas planas  $e^{ikx}\hat{f}(k)$ , cuya amplitud es  $\hat{f}(k)$  y el número de onda es  $k$ . Análogamente se puede definir la transformada de Fourier para funciones de tres variables. Esto se hace aplicando (A.1) a cada variable separadamente. La transformada

de Fourier es una función de tres variables (del vector  $\mathbf{k}$ ) y se define de la siguiente manera:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.4})$$

Si aplicamos a (A.4) la transformada inversa variable por variable tenemos:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.5})$$

Queda como un ejercicio para el lector obtener en detalle (A.5).

Probaremos ahora las identidades que usamos para calcular la transformada de Fourier de  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ .

En primer lugar observemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= \nabla \cdot \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \nabla \cdot i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para calcular la transformada de  $\nabla^2 f$  procedemos por analogía con (A.3) y usando (A.5) tenemos que

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \nabla \cdot \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

y debido a (A.6)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.7})$$

De (A.7) vemos que la transformada de  $\nabla^2 f$  es  $-|\mathbf{k}|^2 \hat{f}(\mathbf{k})$ . (Compárese esta fórmula con la correspondiente para la segunda derivada de funciones de una sola variable).

Finalmente discutiremos el teorema de la convolución para transformadas de Fourier. Recordemos que la convolución de dos funciones denotada por  $f * g$ , se define como

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} f(\mathbf{x} - \xi) g(\xi) d\xi. \quad (\text{A.8})$$

Queremos ahora expresar la transformada de  $f * g$  en términos de  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$ . Para esto, de (A.8) calculamos la transformada de  $f * g$  de manera que

$$(\hat{f} * \hat{g})(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ \int_{\mathbf{R}^3} f(\mathbf{x} - \xi) g(\xi) d\xi \right\} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

Cambiando de variable  $\mathbf{x} = \xi + \eta$  tenemos de (A.9)

$$\begin{aligned} (\hat{f} * \hat{g})(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi - i\mathbf{k}\cdot\eta} \int_{\mathbf{R}^3} f(\eta) g(\xi) d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi} g(\xi) d\xi \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\eta} f(\eta) d\eta \\ &= \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Vemos que (A.10) nos dice que la transformada de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de dichas funciones. Este resultado, útil al calcular transformadas inversas, fue utilizado en varias ocasiones en este texto.

Calculamos ahora una transformación útil que es la de la función gaussiana:

$$f(x) = Ae^{-x^2/G^2}, \quad G > 0.$$

Podemos normalizar (por conveniencia posterior) esta función escogiendo  $A$  para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx = 1 \quad \text{o sea} \quad A^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2/G^2} dx \right)^{-1}.$$

Ahora tomando  $x = \eta \frac{G}{\sqrt{2}}$  tenemos que:

$$A^2 = \left[ \frac{G}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right]^{-1} = \left[ \frac{G}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G}.$$

La función buscada es  $f(x) = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4}G^{1/2}} e^{-x^2/G^2}$ . El ancho de  $f$  es aproximadamente  $G$  y su máximo es  $A = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4}G^{1/2}}$ . Si  $G \rightarrow 0$  se torna cada vez más angosto y más alto en  $x = 0$ . El área total de  $f^2$  se mantiene igual a uno.

La transformada de Fourier de  $f(x)$  se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/G^2} e^{-ikx} dx.$$

Completamos el cuadrado en el exponente y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{G^2} + i k x &= (x/G + ikG/2)^2 + k^2 G^2/4 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{G} + i\frac{kG}{2})^2} e^{-k^2 G^2/4} dx \\ &= Ae^{-k^2 G^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/G + i\frac{k}{2}G)^2} dx \\ &= AGe^{-k^2 G^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + i\frac{kG}{2})^2} dx \end{aligned}$$

Esta última integral se calcula deformando el contorno (sea por Stokes o por Cauchy) al eje real. Usando cualquiera de las interpretaciones tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + i\frac{kG}{2})^2} dx = \int_{\mathcal{L}} e^{-z^2} dz$$

donde  $\mathcal{L}$  es la línea paralela al eje real que tiene parte imaginaria  $i\frac{kG}{2}$  y se muestra en la figura A.1

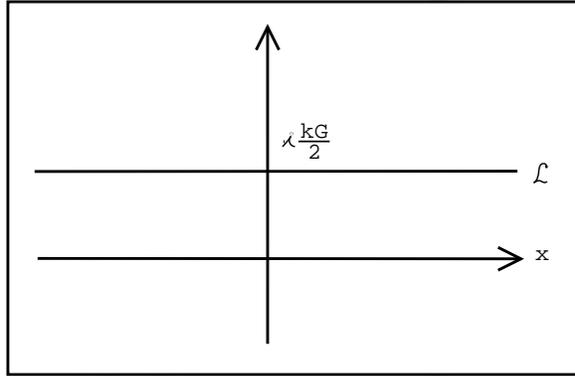


Fig. A.1

Truncando el contorno  $\mathcal{L}'$  a la región  $-L \leq x \leq L$ , tenemos que  $\int_Q e^{-z^2} dz = 0$  donde  $Q$  es la curva que une los segmentos  $\mathcal{L}'$ ,  $C$ ,  $(-L, L)$  y  $D$  en dirección contraria al reloj. De aquí que:

$$\int_{\mathcal{L}'} e^{-z^2} dz = \int_{-L}^{+L} e^{-x^2} dx + \int_D e^{-z^2} dz + \int_C e^{-z^2} dz.$$

Tomando el límite cuando  $L \rightarrow \infty$  observamos que las integrales sobre los contornos  $C$  y  $D$  van a cero. Tenemos así que la integral buscada es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Tenemos que la transformada de Fourier está dada por:

$$AG\sqrt{\pi}e^{-k^2G^2/4} = (2\pi)^{1/4}G^{1/2}e^{-k^2G^2/4}.$$

Es la misma gaussiana con  $G$  colocada multiplicando a la variable  $k$ . Esto indica que una función muy concentrada ( $G \rightarrow 0$ ) tiene una transformada de Fourier muy extendida. También si tomamos  $1/G^2 = \frac{G^2}{4}$  tenemos que  $G^4 = 4$ ,  $G = \sqrt{2}$ . En este caso vemos que

$$f(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2} \quad \text{y} \quad \hat{f}(k) = \pi^{1/4}\sqrt{2}e^{-k^2/2}$$

es decir,  $\pi^{1/4}f(x)$  es función propia de la transformada de Fourier con valor propio  $\sqrt{2\pi}$ . Si normalizamos la transformada de Fourier para que preserve el producto escalar hay que dividir  $\hat{f}(k)$  por  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Así queda que la gaussiana es función propia de la

transformada de Fourier con valor propio 1. Queda como un ejercicio interesante para el lector verificar que solo hay 4 valores propios que son  $1, -1, i, -i$ . Cada valor propio tiene infinitas funciones propias y ellas son las funciones de Hermite. Este resultado se obtiene derivando con respecto a  $G$  y manteniendo la calma en el cálculo. También usando la función generatriz de los polinomios de Hermite.



<http://www.fenomec.unam.mx>

# Apéndice B

## Transformada de Laplace

En la sección anterior vimos que para calcular la transformada de Fourier de una función necesitábamos que ésta fuera integrable. Sin embargo, en muchas ocasiones es conveniente representar una función no necesariamente acotada, en términos de exponenciales. Esto se es posible usando la transformada de Laplace.

Un tratamiento muy bueno del tema y gran cantidad de aplicaciones se pueden encontrar en el libro de Van der Pol y Bremmer [14]. Nosotros nos limitaremos a discutir las propiedades más simples, siguiendo muy de cerca el libro de Weinberger [15].

Empezamos recordando que la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  (suficientemente regular) definida para  $t \geq 0$  y acotada en la forma

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}, \quad t \geq 0, \quad K > 0, \quad M > 0 \quad (\text{B.1})$$

se define como

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

En (B.1) y (B.2) vemos que la integral que define a  $\tilde{f}(s)$  existe para  $Re\{s\} > K$  y como en esa región, dicha integral converge uniformemente, define también una función analítica de  $s$  para  $Re\{s\} > K$ . La región de definición de  $\tilde{f}(s)$  se muestra en la Fig. B.1.

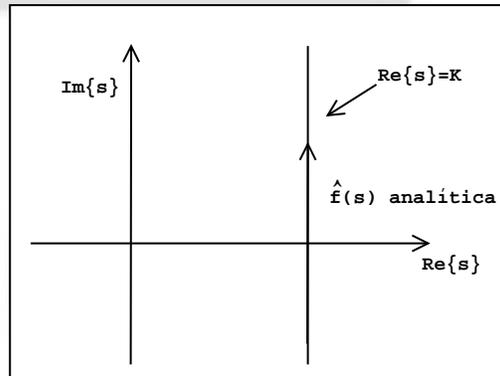


Fig. B.1

Además cuando  $Re\{s\} \rightarrow \infty$ ,  $Re\{s\} > K$  tenemos de (B.1) y (B.2) que  $|\tilde{f}(s)| \leq \frac{D}{|s|}$ . Así mismo, para  $Re\{s\} < K$  la integral (B.2) deja de existir, pero en general  $\tilde{f}(s)$  tiene una continuación analítica para  $Re\{s\} < K$  con polos y puntos rama. Dichas continuaciones analíticas deben determinarse en cada caso particular. Queda como ejercicio el calcular las transformadas de  $t$ ,  $e^t$ ,  $\cos t$ , y localizar sus singularidades en el plano  $s$ .

El siguiente paso es expresar a  $f(t)$  en términos de  $\tilde{f}(s)$ . Para esto observamos que si  $s = c + ik$  con  $c > K$  y  $k$  real, entonces (B.2) se puede escribir como

$$\hat{g}(k) = \tilde{f}(s) = \tilde{f}(c + ik) = \int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (\text{B.3})$$

La ecuación (B.3) nos muestra que  $\hat{g}(k) = \tilde{f}(c + ik)$  es la transformada de Fourier de la función

$$g(t) = \begin{cases} e^{-ct} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Usando (B.3) y la fórmula de inversión (A.2), podemos expresar a  $g(t)$  en términos de  $\hat{g}(k)$  en la forma

$$g(t) = e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \hat{g}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \tilde{f}(c + ik) dk. \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando la (B.4) por  $e^{ct}$  obtenemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+ik)t} \tilde{f}(c + ik) i dk. \quad (\text{B.5})$$

(B.5) es la representación paramétrica de

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} e^{st} \tilde{f}(s) ds \quad (\text{B.6})$$

donde  $\mathcal{L}$  es la línea (paralela al eje imaginario  $Re\{s\} = c$ ). Se puede verificar que (B.6) es independiente de la curva  $\mathcal{L}$  siempre que ésta se tome dentro de la región de analiticidad de  $\tilde{f}(s)$ . Por esto podemos escribir (B.6) en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} \tilde{f}(s) ds$$

donde  $\mathcal{C}$  es cualquier curva paralela al eje imaginario que está a la izquierda de todas las singularidades de  $\tilde{f}(s)$ . Queda como ejercicio comprobar (B.6) para las funciones  $t$ ,  $\cos t$ ,  $e^t$ .

Resulta también conveniente expresar la transformada de Laplace de  $f'(t)$  en términos de la transformada de  $f(t)$ . Tenemos en este caso que

$$\tilde{f}'(s) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

de donde se sigue que  $\tilde{f}'(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$ .

Se deja al lector calcular  $f''$  en términos de  $\tilde{f}$ .

Como última propiedad de la transformada de Laplace, debemos mencionar el teorema de convolución análogo al de las transformadas de Fourier. Para las funciones definidas en el intervalo  $0 \leq t < \infty$ , la convolución apropiada está definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \eta) g(\eta) d\eta, \quad t \geq 0. \quad (\text{B.7})$$

Calculando la transformada de Laplace de (B.7) tenemos que

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(t - \eta) g(\eta) d\eta dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\eta}^{\infty} e^{-st} f(t - \eta) dt \right\} g(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\eta} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt g(\eta) d\eta = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La ecuación (B.8) nos da la expresión de la transformada de

$$\int_0^t g(\eta) d\eta \quad (\text{B.9})$$

en términos de  $\tilde{g}(s)$ , ya que basta observar que

$$\int_0^t g(\eta) d\eta = (1 * g)(t)$$

de donde se sigue que  $(1 * g)^{\sim}(s) = \tilde{1}\tilde{g}(s) = \frac{\tilde{g}(s)}{s}$ .

Esta identidad se usó en el texto al discutir las soluciones a la ecuación de onda.



<http://www.fenomec.unam.mx>

# Apéndice C

## Funciones de Green

En muchos problemas en Física o Biología, nos interesa conocer la forma en que un sistema dado responde ante un cierto estímulo, o en forma más general, ante la suma de una serie de estímulos o excitaciones al sistema. Una forma de entender este tipo de problemas es el considerar la solución del problema como la suma de las soluciones debidas a una sola excitación. De esta forma simplificamos un problema como la suma de varios problemas sencillos. Esta suma se puede extender a una suma infinita o bien a integrar un conjunto de soluciones de manera continua.

Esta manera de pensar tiene aplicación en la solución de los problemas que son representados por la ecuación de Laplace o de Helmholtz o de Poisson. A continuación mostraremos cómo podemos resolver este tipo de ecuaciones, tanto con condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann, utilizando la solución de una ecuación del tipo impulso-respuesta, a la cual nombraremos función de Green.

### El problema de la ecuación de Laplace en una dimensión

Para comenzar el estudio de las funciones de Green vamos a proponer un problema donde pretendemos obtener la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq l ,$$

con valores en la frontera  $u(0) = u_1$  y  $u(l) = u_2$ .

En general no es fácil resolver los problemas de ecuaciones ordinarias cuando damos condiciones a la frontera. En este caso es simple adivinar la solución puesto que es una línea recta, la cual se escribe de esta forma:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1 .$$

Ahora vamos a proponer una forma alternativa de resolver este problema. La idea es encontrar una función que sea solución de la ecuación diferencial  $d^2u/dx^2 = 0$  perturbada por un escalón de potencial y con condiciones de frontera nulas:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, \xi_0, \xi_1) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \xi_0 \quad , \\ 2\alpha & \xi_0 \leq x \leq \xi_1 \quad , \\ 0 & \xi_1 < x \leq l \end{cases}$$

y donde pedimos que  $G(0, \xi_0, \xi_1) = G(l, \xi_0, \xi_1) = 0$ . Es claro que las soluciones en los intervalos  $0 \leq x < \xi_0$  y  $\xi_1 < x \leq l$  son líneas rectas y en el intervalo  $\xi_0 \leq x \leq \xi_1$  corresponde a una parábola. De esta forma proponemos la siguiente solución:

$$G(x, \xi_0, \xi_1) = \begin{cases} ax & 0 \leq x < \xi_0 \quad , \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \xi_0 \leq x \leq \xi_1 \quad , \\ c(x-l) & \xi_1 < x \leq l \quad . \end{cases}$$

Debemos pedir continuidad a esta solución además de las condiciones de frontera. Una condición adicional que añadimos es que  $c - a = 1$  la cual significa que la diferencia de las derivadas de  $G$  en los puntos  $\xi_0$  y  $\xi_1$  dan el valor uno, esta es una aproximación del valor de la segunda derivada en estos puntos singulares.

Los coeficientes  $a$ ,  $c$  y  $\gamma$  pueden escribirse en función del parámetro  $\beta$  de la siguiente forma:

$$a = \frac{\alpha(\xi_0^2 - \xi_1^2) + \beta(\xi_0 - \xi_1) - l}{(\xi_0 - \xi_1 + l)} \quad ,$$

$$c = \frac{\alpha(\xi_0^2 - \xi_1^2) + \beta(\xi_0 - \xi_1) - \xi_0}{(\xi_0 - \xi_1 + l)} \quad ,$$

$$\gamma = \frac{\alpha(\xi_0^2 - \xi_1^2) + \beta(\xi_0 - \xi_1) - \xi_0}{(\xi_0 - \xi_1 + l)} (\xi_1 - l) - \alpha\xi_1^2 - \beta\xi_1 \quad .$$

Nos interesa considerar el límite cuando el ancho del escalón de potencial tiende a cero, es decir cuando  $\xi_0 = \xi_1 = \xi$ . Al considerar este límite, los coeficientes  $a$  y  $c$  quedan escritos como  $a = \frac{\xi-l}{l}$  y  $c = \frac{\xi}{l}$ . De esta forma la función  $G(x, \xi)$  la representamos así:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi-l}{l}x & 0 \leq x < \xi \quad , \\ \frac{\xi}{l}(x-l) & \xi < x \leq l \quad . \end{cases}$$

Nuestro propósito ahora es mostrar como podemos aprovechar esta solución singular para resolver el problema de valores a la frontera que mostramos al principio de la sección.

Definimos la solución de la ecuación  $d^2u/dx^2 = 0$ , con las condiciones de frontera tipo Dirichlet de la forma siguiente:

$$u(\xi) = u(0) \frac{\partial}{\partial x} G(0, \xi) + u(l) \frac{\partial}{\partial x} G(l, \xi) \quad ,$$

es decir, evaluamos la función  $u(x)\partial G(x, \xi)/\partial x$  en los valores a la frontera y los sumamos, en este caso solo tenemos dos valores en la frontera. El resultado es  $u(\xi) = (u_2 - u_1)\xi/l + u_1$ , la cual es exactamente la solución que se habíamos adivinado del problema inicial.

Es importante que el lector aprecie la forma sistemática de resolver el problema de la ecuación de Laplace en una dimensión con valores de frontera de tipo Dirichlet.

También es posible obtener este tipo de solución cuando tenemos problemas con condiciones de frontera tipo Neumann, en este caso la función  $u(\xi)$  se escribe de esta forma:

$$u(\xi) = - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(0)G(0, \xi) + \frac{\partial u}{\partial x}(l)G(l, \xi) \right)$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial x}$  es evaluado en 0 y en  $l$ , estas son las condiciones de frontera.

Dejamos al lector repetir este esquema de solución pero ahora para una ecuación de Poisson:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq l$$

y donde las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet,  $u(0) = u_1$  y  $u(l) = u_2$ . Utilice la misma función  $G(x, \xi)$  que encontramos para el problema de Laplace unidimensional y calcule la solución de la siguiente forma:

$$u(\xi) = u(0)\frac{\partial}{\partial x}G(0, \xi) + u(l)\frac{\partial}{\partial x}G(l, \xi) + \int_0^l f(r)G(r, \xi)dr \quad ,$$

utilice para hacer este ejercicio el siguiente potencial,  $f(x) = A\text{sen}(\pi x/l)$ .

## Función impulso-respuesta

Consideremos un problema descrito por la ecuación de Poisson definida sobre un círculo unitario y con condiciones de frontera de Dirichlet nulas en la circunferencia unitaria:

$$\nabla^2 u(r, \theta) = f(r, \theta) \quad , \quad r < 1 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \quad (C.1)$$

y

$$u(1, \theta) = 0 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad .$$

La parte derecha de la ecuación la consideramos constante, tal que  $f(r, \theta) = -q$  en el caso de un problema de electrostática (donde  $u$  representa el valor de voltaje) o bien  $f(r, \theta) = -\frac{lg}{T}$  en un problema de elasticidad, tal como lo hemos establecido en

la ecuación (3.7). Hemos visto que en el caso elástico, la membrana toma una forma cóncava hacia abajo de manera similar como se deformaría una membrana bajo la acción de un chorro de aire. La concavidad de la membrana es constante en todo punto.

En el caso que  $f(r, \theta)$  no sea una función constante, entonces la concavidad de la membrana cambia de punto a punto. Consideremos ahora que la función  $f(r, \theta)$  representa la acción de jalar la membrana en un sólo punto, lo cual llamaremos a esta acción un impulso o una fuente (o correspondientemente un sumidero). Por simplicidad pensemos que este impulso o fuente se da en el centro del círculo unitario. Por simetría, la función  $u$  y sus derivadas solo dependen de la coordenada radial. Definamos el flujo como el valor de la derivada normal de  $u$  sobre una superficie cerrada (o una curva cerrada para el caso que estamos examinando). El flujo total  $F(r)$  se obtiene integrando el flujo sobre toda la superficie o curva cerrada. En este caso consideremos una circunferencia de radio  $r < 1$ :

$$F(r) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(r)}{\partial r} r d\theta = -2\pi r \frac{\partial u}{\partial r}(r) \quad .$$

El flujo total debe de coincidir con la fuente en el origen,  $f(r = 0, \theta) = \frac{\rho g}{T}$ , la cual se puede interpretar mecánicamente como una fuerza promedio:

$$-2\pi r \frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{\rho g}{T} \quad .$$

Entonces,

$$u(r) = \frac{\rho g}{2\pi T} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad (C.2)$$

donde vemos que esta solución es singular en el origen. Tal solución la podemos entender como si jaláramos una membrana circular en su punto medio una distancia infinita, tal como se ve en la figura (C.1.a)

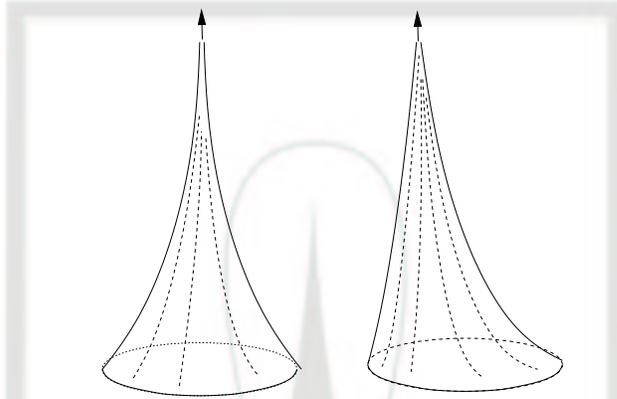


Fig. C.1.a y C.1.b

En el caso que estiremos de forma infinita la membrana en otro punto distinto al origen obtendríamos una solución cuya forma sería como se muestra en la figura (C.1.b). La altura de la membrana la podemos representar por la función  $G(r, \theta, p, \phi)$ , donde  $(r, \theta)$  representa la coordenada donde medimos la altura de la membrana o donde se está estirando la membrana. Esta función es la solución de la ecuación (C.1) cuando la función  $f(r, \theta)$  representa una fuente puntual. A esta función le llamamos *función de Green*. La utilidad que tiene esta función viene del hecho de descomponer la parte derecha de la ecuación (C.1) como un conjunto continuo de fuentes, que son “moduladas” por la función  $f(r, \theta)$ , así la solución corresponde a sumar todas las soluciones debidas a cada fuente puntual localizada en el punto  $(\rho_i, \phi_i)$ , con  $i = 0, \dots, N$ , las cuales son moduladas por la función  $f(r, \theta)$  :

$$u(r, \theta) = \sum_{i=0}^N G(r, \theta, \rho_i, \phi_i) f(\rho_i, \phi_i) \quad (C.3)$$

Esta expresión la justificaremos más adelante, sin embargo podemos observar que esta relación es similar al problema de Poisson que se propuso para el caso unidimensional en la sección anterior.

## Método de Imágenes

Consideremos un problema de una membrana donde aplicamos una fuente (o estirón infinito) en un punto y pedimos que la membrana no se deforme en una línea recta en el plano. Consideremos una membrana infinita y la línea recta que coincida con el eje  $y$ . Si aplicamos un estirón en algún punto en el  $(x, y)$  y al mismo tiempo estiramos en

dirección contraria pero con la misma intensidad en el punto reflejado sobre la recta,  $(-x, y)$ . Entonces podemos ver por simetría que la membrana no se deforma en la recta  $x = 0$ , tal como lo podemos observar en la figura (C.2).

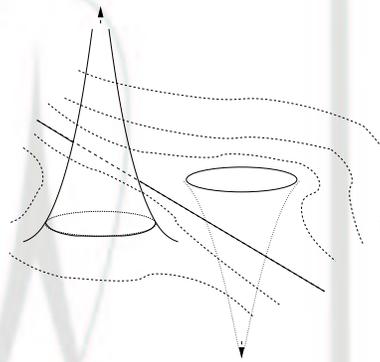


Fig. C.2

Tomemos la solución (C.2) calculada en los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(-x_0, y_0)$ , entonces la solución a este problema está descrito de la siguiente forma:

$$u(x, y) = \frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{K}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\bar{R}}\right) ,$$

donde  $R = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$  y  $\bar{R} = ((x + x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$ .

Esta solución se ha obtenido con ayuda de un estirón virtual en el punto  $(-x_0, y_0)$ , a este estirón también lo podemos llamar una fuente imagen. La solución  $u(x, y)$  corresponde a la función de Green en el semiespacio  $x > 0$ .

Otro ejemplo sencillo en el uso del método de imágenes es el resolver el problema de una fuente o estirón en un círculo de radio unitario. La ecuación que debemos resolver es la siguiente

$$\Delta^2 u(x, y) = f(x - x_0, y - y_0) , \quad x^2 + y^2 \leq 1 .$$

La función  $f(x, y)$  tiende a infinito en el origen y vale cero fuera del origen, esta función representa un estirón infinito en el origen. Consideremos el problema de un estirón en un punto dentro del círculo unitario, por ejemplo en el punto  $(x_0, 0)$  y  $0 < x_0 < 1$ . Ahora consideremos una fuente imagen, es decir, con estirón en el punto  $(\bar{x}_0, 0)$  con  $\bar{x}_0 > 1$  (este punto está fuera del dominio de la ecuación).

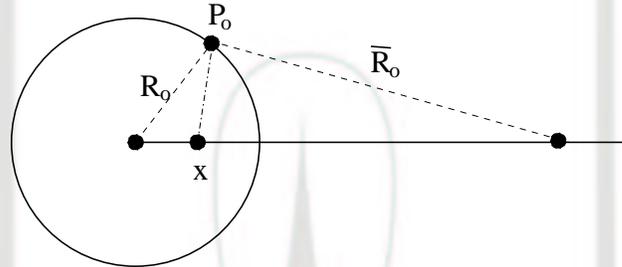


Fig. C.3

La figura C.3 muestra la colocación de las fuentes. Definimos un punto en la circunferencia de radio unitario  $P_0$  y las distancias  $R_0$  y  $\bar{R}_0$  del punto  $P_0$  a las fuentes. La solución que proponemos a este problema es

$$u(x, y) = \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \ln\left(\frac{1}{\bar{R}}\right)$$

donde  $R$  y  $\bar{R}$  es la distancia de las fuentes a cualquier punto en el dominio. En el caso que este punto se encuentre en la frontera del dominio, podemos mostrar que si  $\bar{x} = 1/x$ , entonces

$$\ln\left(\frac{1}{R_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{\bar{R}_0}\right) = \ln\left(\frac{\bar{R}_0}{R_0}\right) = \text{cte} \quad .$$

Esto se puede obtener escribiendo las distancias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{(\cos\theta - x)^2 + \text{sen}^2\theta} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos\theta} \quad , \\ \bar{R}_0 &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \cos\theta\right)^2 + \text{sen}^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x} \cos\theta} \quad , \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\frac{\bar{R}_0}{R_0} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x} \cos\theta}{x^2 + 1 - 2x \cos\theta}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} \quad .$$

Esta última expresión es independiente de la coordenada  $\theta$ , es decir, la expresión vale para cualquier punto  $P_0$  en la circunferencia. Este argumento es también válido cuando las fuentes se encuentran colocadas sobre cualquier recta que pase por el origen. Así sustituimos  $x$  por la distancia de la fuente al origen ( $P$ ).

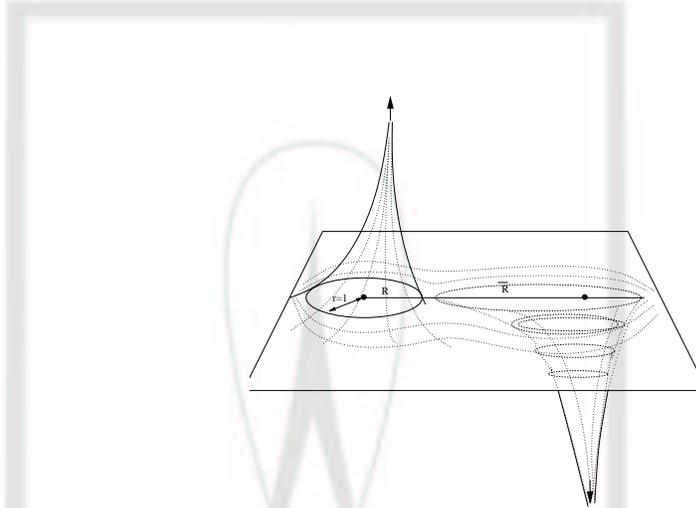


Fig. C.4

La solución de nuestro problema está dado por la función de Green (Fig. C.4)

$$G(r, \theta, \rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\rho \frac{\bar{R}}{R}\right)$$

y

$$R = \sqrt{r^2 - 2pr \cos(\theta - \phi) + \rho^2}, \quad \bar{R} = \sqrt{r^2 - 2\frac{r}{\rho} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{\rho^2}}.$$

Finalmente, si tenemos una distribución continua de fuerzas o estirones que actúan sobre la membrana y que están moduladas por la función  $f(\rho, \phi)$ , la solución a este problema lo podemos expresar en términos de la función de Green:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} G(r, \theta, \rho, \phi) f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi.$$

El lector puede repetir este ejercicio para el caso tridimensional, cuando el dominio es una esfera de radio unitario. En este caso las fuentes las podemos pensar como cargas eléctricas y  $u$  el potencial eléctrico.

## Función de Green

En esta sección justificaremos la relación (C.3) en dos y tres dimensiones. A partir del Teorema de Gauss, determinaremos un conjunto de relaciones útiles para finalmente

mostrar cómo podemos expresar la solución de ecuaciones del tipo Laplace, Poisson o Helmholtz utilizando la función de Green apropiada.

Consideremos un dominio acotado  $\Omega \subset^3$ , su frontera la denotamos como  $\partial\Omega$ . Tomemos una función vectorial  $F : \Omega \rightarrow^3$  de clase  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ . El teorema de Gauss nos asegura que

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot F d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} F \cdot d\bar{a} \quad , \quad (\text{C.4})$$

donde  $d\bar{x}$  es el elemento de volumen y  $d\bar{a}$  es el vector normal a la superficie multiplicado por el elemento de área. Vamos a proponer que la función  $F$  se escriba en término de las funciones escalares  $u$  y  $v$ , las cuales están definidas en  $\Omega$  y son de clase  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ .

$$F = \left( u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad .$$

Es claro entonces que bajo esta definición  $\nabla \cdot F = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v$ . Entonces sustituyendo  $F$  en (C.4) tendremos el siguiente resultado:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dx + u \frac{\partial v}{\partial y} dy + u \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad . \quad (\text{C.5})$$

Ahora definamos la función vectorial  $H$  de la siguiente forma:

$$H = \left( v \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad .$$

Aplicando el Teorema de Gauss a la función  $G$ , se obtiene un resultado similar a (C.5),

$$\int \int \int_{\Omega} (v \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla v) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dy + v \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (\text{C.6})$$

Restando (C.5) de (C.6) obtenemos la relación conocida como la segunda identidad de Green:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\bar{a} \quad ,$$

donde  $\frac{\partial v}{\partial n}$  y  $\frac{\partial u}{\partial n}$  son las derivadas parciales de  $v$  y  $u$  respecto al vector normal de la superficie  $\partial\Omega$ .

En el caso bidimensional, utilizamos el teorema de Green, de esta forma, dada dos funciones  $u$  y  $v$  definidas en un dominio cerrado  $s$  cuya frontera sea la curva  $C$ , se obtiene un resultado similar a la segunda identidad de Green.

El lector puede repetir los cálculos para el caso bidimensional y obtener el siguiente resultado

$$\int \int_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) ds = \int_C \left( u \frac{\partial u}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma ,$$

donde  $ds$  es el elemento de área y  $d\sigma$  es la longitud de arco sobre la curva. Ahora discutiremos sobre el tipo de funciones que son interesantes utilizar en la segunda identidad de Green. Tomemos como  $v(\bar{x})$  la siguiente función:

$$v = \frac{1}{R(\bar{x}, \bar{x}_0)} = \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}$$

Se puede mostrar que  $v(x)$  cumple con la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 v(\bar{x}) = 0$  si  $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ , esto lo puede comprobar el lector como un ejercicio.

Ahora mostraremos cómo podemos expresar la función  $u(\bar{x})$  en términos de la función  $\bar{v}(x)$ .

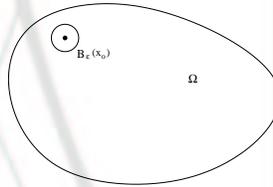


Fig. C.5

Consideremos el dominio  $\Omega \subset^3$  y un punto  $\bar{x}_0 \in \Omega$ . Sea  $B_\epsilon(\bar{x}_0)$  una bola de radio  $\epsilon$  con centro en  $\bar{x}_0$  tal como se ve en la figura (C.5). Apliquemos la segunda identidad de Green en el dominio  $\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)$ , cabe aclarar que en este caso tenemos dos fronteras de  $\Omega$ , la frontera exterior  $\partial\Omega$  y la interior que es  $\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)$  :

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)} \left( u \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla^2 u \right) d\bar{x} = \\ & \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) da - \int \int_{\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) da \end{aligned}$$

Suponiendo  $|\epsilon|$  pequeña, entonces  $\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right)$  evaluada en la frontera  $\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)$  toma el siguiente valor:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}$$

De esta manera, podemos evaluar la integral siguiente:

$$\int \int_{\partial B_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) da = \frac{1}{\epsilon^2} \int \int_{\partial B_\epsilon} u da = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} \langle u \rangle = 4\pi \langle u \rangle$$

donde  $\langle u \rangle$  representa el valor promedio de  $u$  en la bola  $B_\epsilon(x_0)$ . Así también, el término  $\frac{1}{R}$  es igual a  $\frac{1}{\epsilon}$  en la frontera de la bola, por lo tanto:

$$\int \int_{\partial B_\epsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} da = \frac{1}{\epsilon} \int \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} da = 4\pi\epsilon \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle$$

En el límite, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la expresión anterior se hace nula y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle u \rangle = u(\bar{x}_0)$ . Recordando que  $\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = 0$  en  $\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)$ , entonces la segunda identidad de Green queda escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4\pi u(\bar{x}_0) = & - \int \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R(x, x_0)} \right) - \frac{1}{R(x, x_0)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) da \\ & - \int \int \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 u}{R(\bar{x} - \bar{x}_0)} d\bar{x} \quad . \end{aligned} \quad (C.7)$$

Esta expresión nos da el valor de  $u(\bar{x})$  en el punto  $\bar{x}_0$  de manera explícita cuando tenemos una ecuación diferencial parcial de  $u$  donde esté involucrado el laplaciano de  $u$ . Esta situación la tenemos en la ecuación de Laplace (donde la segunda integral desaparece) o la ecuación de Poisson. En estos dos casos no aparece la función  $u(x)$  implícitamente en la segunda integral y podemos evaluarla en todo el dominio.

El lector puede verificar que si el punto  $\bar{x}_0$  pertenece a la frontera de  $\Omega$ , entonces la expresión de la segunda identidad de Green solo se ve alterada por el cambio del factor  $4\pi$  a  $2\pi$  en el primer término de la expresión.

El caso bidimensional es completamente similar al caso en tres dimensiones y se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} 2\pi u(\bar{x}_0) = & \int_C \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right] d\sigma \\ & - \int \int_S (\nabla^2 u) \ln \left( \frac{1}{R} \right) ds \quad . \end{aligned}$$

Para este caso, se reemplazó la función  $v$  por el  $\ln(1/R)$ , la cual es solución de la ecuación de Laplace en el plano cuando  $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ .

Consideremos en el caso tridimensional, que la función  $u(\bar{x})$  cumple con la ecuación de Laplace en  $\Omega$ , entonces

$$4\pi u(\bar{x}_0) = - \int \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R(x, x_0)} \right) - \frac{1}{R(x, x_0)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) da \quad .$$

De esta forma, tenemos la solución de  $u$  en cualquier punto de  $\Omega$  si conocemos el valor de  $u$  y de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en la frontera de  $\Omega$ . En la gran mayoría de los casos, solo disponemos del valor de  $u$  en la frontera (condiciones tipo Dirichlet) o el valor de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (condiciones tipo Neumann). ¿Cómo podemos aplicar entonces esta fórmula de Green? La respuesta está en utilizar una función algo más general que  $1/R(\bar{x}, \bar{x}_0)$  en nuestra expresión. Así podemos lograr que el valor de esta función, o bien el valor de la derivada normal sobre la frontera de  $\Omega$  se anule. De esta forma solo necesitaremos conocer  $u$  ó  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en la frontera de  $\Omega$ .

Para esto tomemos la expresión de la segunda identidad de Green aplicada a las funciones  $u(\bar{x})$  y  $w(\bar{x})$ . Un punto importante es que pedimos que la función  $w(\bar{x})$  cumpla con la ecuación de Laplace en el dominio  $\Omega$ . Así tenemos:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n}) da \quad (C.8)$$

En esta última ecuación tenemos que  $\nabla^2 w = 0$  en todo  $\Omega$ . Sumemos esta expresión (C.8) con la identidad de Green obtenida en (C.7). De esta manera, la identidad de Green queda transformada en la siguiente ecuación:

$$u(\bar{x}_0) = - \int \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{4\pi R(x, x_0)} - w \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} - w \right) \right] da \\ - \int \int \int_{\Omega} \nabla^2 u \left( \frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} + w \right) d\bar{x} .$$

Nombremos a  $\frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} + w$  como la función de Green, la cual la denotamos como  $G(\bar{x}, \bar{x}_0)$ . La razón de añadir la función  $w$  en  $G$  es para lograr eliminar uno de los términos en la integral de superficie, de esta forma solo necesitamos saber el valor de  $u$ , o bien el valor de su derivada  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en la frontera. Ahora debemos seleccionar a la función  $w$  que cumpla con las siguientes condiciones

1.  $\nabla^2 w = 0$  en  $\Omega$ . La función puede tener singularidades fuera de  $\Omega$ .
2.  $\frac{1}{4\pi R(x, x_0)} + w = 0$  en  $\partial\Omega$ . O bien
3.  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R(x, x_0)} + w \right) = 0$  en  $\partial\Omega$ .

Así tendremos las dos expresiones bien conocidas de la función de Green para determinar la solución de  $u$  en el dominio  $\Omega$  con condiciones de frontera tipo Neumann:

$$u(\bar{x}_0) \int \int_{\partial\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0), \frac{\partial u}{\partial n} da - \int \int \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u d\bar{x}$$

y para el caso de Dirichlet:

$$u(\bar{x}_0) = - \int \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) da - \int \int \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u d\bar{x} .$$

En el caso bidimensional podemos proceder de manera similar al caso en tres dimensiones, el resultado que se obtiene es el siguiente. Para condiciones de Neumann

$$\bar{u}(\bar{x}) = \int_C G(\bar{x}, \bar{x}_0) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int \int_S G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u dS$$

y con condiciones de Dirichlet:

$$\bar{u}(\bar{x}) = - \int_C u \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{x}, \bar{x}_0) d\sigma - \int \int_S G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u dS .$$

En ambos casos, la función de Green está definida de la siguiente forma:

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{R(\bar{x}, \bar{x}_0)} \right) + w$$

¿Cómo podemos entonces determinar la función  $w$  que se adecue a nuestro problema?

En el caso que tengamos condiciones de Dirichlet, la función  $w$  debe tener el mismo valor que  $\frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)}$  en la frontera. Para lograr este hecho, podemos aprovechar el método de imágenes que se vió en la sección anterior.

Tomemos un ejemplo en tres dimensiones. Sea  $\Omega$  la esfera de radio 1 y queremos resolver el problema siguiente

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & \text{en } \Omega , \\ u &= f(\bar{x}) & \text{en } \partial\Omega \text{ donde } \bar{x} \in \partial\Omega . \end{aligned}$$

Lo primero es determinar la función de Green que se adecue mejor a nuestro problema. Proponemos a la función  $w$  como la imagen de la fuente colocada en  $\bar{x}_0 \in \Omega$ . Es claro que el punto imagen debe estar fuera del dominio  $\Omega$  para que  $w$  cumpla con la ecuación de Laplace en dicha región. Usando la simetría radial del problema, el punto imagen debe estar sobre la línea recta que une al origen con la fuente en  $\bar{x}_0$  tal como se ve en la figura C.6. Si la fuente  $\bar{x}_0$  está a una distancia  $\rho$ , entonces el punto imagen debe estar a una distancia  $1/\rho$  respecto al origen. El lector puede comprobar que con esta configuración, la función de Green definida como:

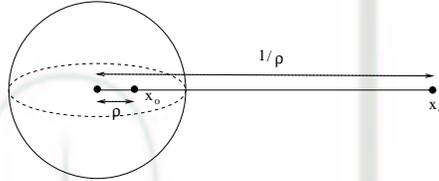


Fig. C.6

$$G(x, \bar{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}_0|} - \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}'_0|} ,$$

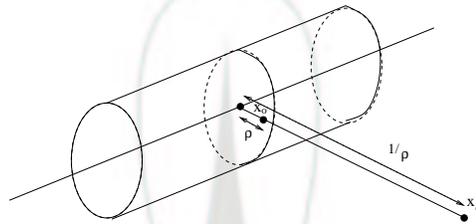
se anula en la frontera de la esfera. En este caso la función  $w$  corresponde a la acción de la carga imagen  $\frac{-1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}'_0|}$ .

Esta función cumple con la ecuación de Laplace en  $\Omega$  puesto que  $\bar{x}'_0$  está fuera de  $\Omega$ .

Otro ejemplo es cuando  $\Omega$  corresponde a un cilindro de radio 1. La simetría del problema nos permite reducirlo a un caso bidimensional. Usamos la función de Green definida al final de la sección dedicada al método de imágenes para el caso de un dominio circular de radio 1. La función es entonces

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|1\bar{x} - \bar{x}'_0|} \right)$$

siendo  $\bar{x}'_0$  el punto imagen tal como se ve en la figura C.7. En este caso, la función  $w$  corresponde al punto imagen colocado en el punto  $\bar{x}'_0$ .



*Fig. C.7*

De esta forma vemos que el método de imágenes es una forma práctica de encontrar la función de Green que se adecue al problema de la ecuación de Laplace o Poisson que se esté buscando. Una mayor explicación sobre el uso de la función de Green y su aplicación a otras ecuaciones como al de Helmholtz la podemos encontrar en las referencias (Tyn Myint-u) y (Tijonov y Samarsky).

Un último comentario sobre la función de Green aplicada a otro tipo de ecuaciones distintas a la de Laplace o Poisson. Veamos el caso de la ecuación de Helmholtz, el cual se escribe de esta forma:

$$\nabla^2 u + k^2 u = h \quad \text{en } \Omega .$$



<http://www.fenomec.unam.mx>

# Notas

Capítulo I. El ejemplo de flujo de coches y la correspondiente discusión están tomadas de *Linear and Nonlinear Waves* de G. B. Whitham (John Wiley). La exposición de características sigue de cerca los libros de *Partial Differential Equations* de Copson (Cambridge Univ. Press) y *Partial Differential Equations* de Weinberger (Ginn Blaisdell). Una referencia útil es el libro *Partial Differential Equations* de Petrovski. Las pruebas de unicidad están tomadas del Vol. II del libro *Methods of Mathematical Physics* de Courant -Hilbert (Interscience).

Capítulo II. La presentación sigue muy de cerca las notas *Mathematical Methods in Electromagnetism* de Friedrichs (New York University), aunque los desarrollos se dan en este texto con mayor detalle. La discusión del problema de olas en agua es muy cercano a la del libro *Water Waves* de Stoker (Interscience). También la exposición sobre las ecuaciones de Maxwell, sigue de cerca las notas de Friedrichs. Más referencias sobre sistemas hiperbólicos se encuentran en el Vol. II del libro de Courant-Hilbert. Para la teoría más moderna, las notas de J. Ize y las referencias que ahí se mencionan. Para muy variadas aplicaciones de sistemas hiperbólicos el libro *Shock Waves* de Courant-Friedrichs (Interscience) y *Linear and Nonlinear Waves* de Whitham.

Capítulo III. Es un capítulo muy corto. La presentación es esencialmente la de Weinberger. Para una discusión elemental pero detallada del problema de Sturm-Liouville y sus aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales puede consultarse el libro *Fourier Series and Boundary Value Problems* de R. V. Churchill (Mc. Graw Hill). En la parte de separación de variables, los libros de Tikhonov y Samarski traen una discusión más avanzada y resuelven problemas interesantes. Son recomendables para una segunda lectura. Para una introducción a los métodos de Teoría del Potencial en Ecuaciones Elípticas, que nosotros omitimos, puede consultarse el libro de Copson. Finalmente una introducción a la teoría más moderna de Ecuaciones Elípticas puede encontrarse en las notas de J. Ize. Para una discusión detallada y muy bien escrita del problema de radiación, referimos al libro *Water Waves* de Stoker.

Capítulo IV. La parte referente a la ecuación de segundo orden sigue el Weinberger y

la de sistemas las notas de Friedrichs. Sólo que los casos se hacen con mayor detalle. Para Transformadas de Laplace y sus aplicaciones referimos al tratado *The Laplace Transform* de Van der Pol y Bremmer. También al Vol. II de Courant-Hilbert en la sección: *Transient problems and operational calculus*. Una referencia elemental es el libro *Operational Mathematics* de R. V. Churchill (Mc. Graw Hill). Muchas aplicaciones a propagación de ondas de la transformada de Laplace están en *Mathematical Methods of Physics* de H. B. Jeffreys (Cambridge Univ. Press).

Capítulo V. En la obtención de la fórmula de Poisson para el problema no homogéneo se sigue de cerca el Courant-Hilbert Vol. II. Un tratamiento extensivo de este tema aunque muy avanzado está en *Sound Pulses* de Friedlander (Cambridge Univ. Press). La discusión del problema con valores iniciales sigue el Weinberger y Courant-Hilbert. Discusiones interesantes sobre la ecuación de onda con el método de potenciales de Rietz lo tiene Copson. Métodos alternativos como promedios esféricos y transformada de Radon están discutidos brevemente en Courant-Hilbert Vol. II. Ahí se dan muchas referencias sobre este tema.

Finalmente una referencia muy útil aunque más avanzada es el libro *Partial Differential Equations* de F. John (Springer Verlag), tiene gran parte del material tratado en estas notas y se recomienda como una segunda lectura.

Capítulo VI. En este capítulo se ilustraron algunos mecanismos de capa límite, convección e inestabilidad de frente de difusión. La lista de problemas es más bien representativa de la forma de atacar problemas de propagación de frentes difusivos que es un campo de interés muy actual.

# Bibliografía



<http://www.fenomec.unam.mx>



<http://www.fenomec.unam.mx>

# Bibliografía

- [1] Churchill, R.V. and Brown, J.W, Fourier Series and Boundary Value Problems. 3 ed. New York, McGraw Hill, 1978.
- [2] Copson, E.T, Partial Differential Equations. Cambridge, University, 1975.
- [3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics. New York, Interscience Publishers, 1962.
- [4] Courant, R. and Friedrichs K.O., Shock Waves. New York, 1962.
- [5] Feynman, R.P., Leighton, R. B and Sands, M. L. Feynman lectures on Physics. V.II: Mainly Electromagnetism and Matter. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1964.
- [6] Friedlander, F. G., Sound Pulses. Cambridge, University, 1971.
- [7] Friedrichs, K. O., Mathematical Methods in Electromagnetism. Class Notes, New York University.
- [8] Flores Gallegos, Gilberto, Modelos de Conducción de Impulsos Eléctricos en Nervios. Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Vol. 87, 1994, págs. 223-262.
- [9] Ize, J. Las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales. México. IIMAS, 1978 (Comunicaciones Técnicas, Serie Verde, No. 10).
- [10] Jefeys, H.B. Mathematical Methods of Physics. Cambridge, University, 1946.
- [11] John, F., Partial Differential Equations. New York, Springer Verlag, 1971.
- [12] Maxwell, J. C. Treatise on Electricity and Magnetism. New York, Dover, 1954.
- [13] Petrovski, I. G. Partial Differential Equations. Philadelphia, W.B. Saunders, 1967.

- [14] Tikhonov, A. N. and Samarski, A. A. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. San Francisco, Holden-Day, 1964.
- [15] Tyn Myint-U. Partial Differential Equation of Mathematical Physics. Second Edition. North Holland 1980.
- [16] Van der Pol, B. and Bremmer, H. Operational Calculus based on the two-sided Laplace Integral. 2 ed. Cambridge, University, 1955.
- [17] Weinberger, H. F. A first course in Partial Differential Equations. Waltham, Blaisdell, 1965.
- [18] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves. New York, J. Wiley, 1974.

# Índice alfabético

- Aplicaciones de la fórmula de Poisson, 87
- base del espacio, 61
- cable pasivo, 108
- campo eléctrico, 54
- característica, 6, 37, 44
- características, 5, 10, 12, 16, 17, 22, 33, 71, 77
- condición de radiación, 68
- conservación de la masa, 53
- Conservación de masa, 84
- convergencia de la serie, 61
- coordenadas polares, 94
- Courant-Hilbert, 69, 78
- cuando uno de los extremos está fijo, 17
- D’Alambert, 22
- de la ecuación de Laplace, 65
- de las soluciones de la ecuación de primer orden, 10
- densidad de carga, 39
- densidad de energía, 67
- densidad de la cuerda, 12
- densidad del fluido, 53
- difusión de calor, 102
- difusión de contaminantes, 100, 105
- dimensión característica, 51
- dispersión de contaminantes, 101
- dominio de dependencia, 6, 22
- ecuación de Bessel, 68
- ecuación de conservación, 2
- ecuación de continuidad, 41
- ecuación de estado, 84
- ecuación de Fisher, 107
- ecuación de Helmholtz, 67
- ecuación de onda, 66
- ecuación de onda amortiguada, 74
- Ecuación de onda en tres dimensiones, 83
- ecuación de Poisson, 51, 52
- Ecuación de una membrana elástica en equilibrio, 49
- ecuación lineal de primer orden, 1
- Ecuación lineal de segundo orden, 12
- ecuaciones de *Navier – Stokes*, 33
- Ecuaciones de Maxwell, 41
- ecuaciones de Maxwell, 45, 54
- ecuaciones de Navier-Stokes, 83
- Ecuaciones elípticas, 49
- Ecuaciones elípticas en mecánica de fluidos, 53
- Ecuaciones hiperbólicas, 1
- eigenvalores, 61
- eigenvectores, 60, 61
- El principio del máximo para la ecuación de Laplace, 64
- El problema con valores iniciales para la ecuación de onda en tres dimensiones, 92
- El problema de las líneas de transmisión, 29
- energía cinética, 24
- energía de la solución, 26

- energía elástica, 50  
energía potencial, 25, 52  
energía potencial gravitacional, 50  
entropía, 104  
existencia de una solución clásica, 66  
extensión impar periódica, 73
- fórmula, 22, 86  
fórmula de D'Alambert, 75, 77, 79  
fórmula de Poisson, 61, 62, 64, 66  
flujo de calor, 100  
flujo de coches, 2  
fuente, 105  
fuente de calor, 102  
función de Green, 75, 85  
función de Hankel, 69  
función propia, 114  
funciones de Bessel, 68  
funciones de Hermite, 115
- gaussiana, 114
- Hodking y Huxley, 110
- inercia, 103  
integral de Dirichlet, 94  
integral de la potencia, 25  
interpretación geométrica, 7
- línea de flujo, 53  
Las ecuaciones de Maxwell, 38  
lema de Jordan, 76, 79  
ley de Ampere, 39–41  
ley de conservación de carga, 41  
ley de conservación de la carga, 29  
ley de enfriamiento de Newton, 101  
ley de Faraday, 29, 30, 39  
ley de Gauss, 38  
ley de la conservación de la masa, 34  
Ley de Newton, 84  
ley de Newton, 12, 34  
ley hidrostática, 35  
leyes del electromagnetismo, 40
- mínima energía, 50  
método de las imágenes, 73  
método de separación de variables, 58
- onda incidente y la reflejada, 17  
onda sísmica, 88  
onda viajera, 107  
ondas electromagnéticas, 45  
ondas sísmicas, 81  
ortogonales, 61
- Poisson, 86  
principio de la conservación de energía, 23  
principio de mínima energía, 49  
Problema de difracción, 66  
problema de Dirichlet, 62, 65  
problema de líneas de transmisión, 79  
Problema de Neumann, 62  
problema de Neumann, 54, 64, 66  
problema de reflexión, 73  
problema de reflexión de ondas, 19  
problema para un círculo, 62  
Problemas de Dirichlet, 55  
proceso de reflexión, 17  
producto escalar, 60  
propagación de calor, 99  
propagación de ondas, 17  
Propagación de ondas en agua, 33  
Propagación de ondas sonoras, 83  
prueba de unicidad, 57  
pulso reflejado, 21
- reacciones exotérmicas, 102  
región de influencia, 6  
respuesta instantánea, 103
- separación de variables, 55, 71, 75  
Separación de variables para un sistema de ecuaciones, 77  
serie de Fourier, 55, 58, 62, 71, 75  
serie de Taylor, 11, 46  
serie uniformemente convergente, 57

- series de Fourier, 60, 61, 69  
 sistema hiperbólico no homogéneo, 43  
 Sistemas de ecuaciones con característi-  
 cas, 29  
 solución clásica, 62, 64  
 solución formal, 11, 72  
 solución separable, 58  
 soluciones clásicas, 56  
 soluciones para el problema de reflexión,  
 21  
 Sommerfeld, 68
- Taylor, 11  
 teorema de Cauchy-Kovalevski, 23  
 teorema de convolución, 103  
 teorema de existencia y unicidad de Cauchy  
 Kovalevski, 14  
 teorema de Fourier, 59  
 teorema de Green, 52  
 teorema de la convolución para trans-  
 formadas de Fourier, 112  
 Teorema de la Divergencia, 39  
 teorema de la divergencia, 53, 57  
 Teorema de Stokes, 39, 40  
 teorema de unicidad para la ecuación  
 de onda, 43  
 tráfico en la carretera, 1  
 transformación simétrica, 61  
 Transformada de Fourier, 111  
 transformada de Fourier, 65, 66, 75, 77,  
 85, 102, 113  
 transformada de Fourier de la gaussiana,  
 103  
 transformada de la convolución, 113  
 transformada de Laplace, 78, 79, 85,  
 86, 108  
 transformada inversa, 111  
 transformadas de Fourier, 77, 79  
 transformadas de Laplace, 80, 81
- Unicidad, 10  
 unicidad, 104
- Unicidad de las soluciones para la ecuación  
 de onda, 23  
 unicidad de una solución clásica, 64
- valores propios, 32, 115  
 Van der Pol y Bremmer, 78  
 velocidad finita, 22
- Weinberger, 78