Capítulo 5

Series de Tiempo Fractal y las Caminatas Aleatorias Sesgadas.

Como ya vimos anteriormente la TME asegura que los precios actuales reflejan toda la información disponible al público inversionista, futuros cambios en los precios sólo pueden ser determinados por nueva información. Con toda la información ya reflejada en los precios, Los mercados seguirán una caminata aleatoria. El movimiento de precios de un día no se encuentra relacionado con el del día previo. La TME asegura que la gente reacciona de inmediato a la información, por lo que el futuro no está relacionado con el presente o con el pasado. Este supuesto fue fundamental para que funcionara el *Teorema del Límite Central*[1] en los mercados de capitales. A su vez, el Teorema del límite central fue fundamental para aplicar el cálculo probabilistico, y los modelos lineales.

Pero la gente en realidad no se comporta de esa manera. Típicamente, algunas personas reaccionan de inmediato a la información, pero, la mayoría espera a que esta información se confirme, y se establesca una tendencia. La cantidad de información necesaría varía, y es precisamente esta asimilación no uniforme de la información lo que provoca una caminata aleatoria sesgada.

Las caminatas aleatorias sesgadas fueron estudiadas de forma extensiva por Hurst [6] en los 1940s y de nuevo por Mandelbrot [10] en los 1960s y

[1]Este importante resultado de la teoría estadística afirma que si de una población con media μ y desviación estándar σ se extraen muestras de tamaño n enotonces la media muestral se comporta como una variable aleatoria normal con media igual a la media poblacional dividida por el tamaño de la muestra, siempre que n sea lo suficientemente grande, independientemente de la distribución de la población.

1970s. Mandelbrot las llamó *Movimientos Brownianos Fraccionarios*. Podemos llamarlas *Series de Tiempo Fractales* [16].

5.1. El Exponente de Hurst.

Hurst [6] fue un hidrólogo que empezó a trabajar en la presa del río Nilo alrededor de de 1907 y permaneció en la región del Nilo por los siguientes 40 años. Mientras estuvo allí, estudió el problema de controlar las reservas. Una reserva ideal es aquella que nunca se derrama, por lo que se debe de practicar una política de descargas de agua anuales. Sin embargo, si el flujo del río es demasiado bajo, entonces el nivel de reservas se volvería peligrosamente bajo. El problema era, lógicamente, qué política de descargas seguir, de tal manera que las reservas nunca se desbordaran ni se vaciaran.

Contruyendo un modelo, era común aceptar una parte del sistema que era incontrolable (en este caso la caida de agua por lluvia) y seguía una caminata aleatoria. Este es un supuesto común cuando se trabaja con varios grados de libertad. Y dado que el sistema comprendía el ecosistema del Nilo , si que tenía muchísimos grados de libertad.

Cuando Hurst decidió hacer pruebas a este supuesto, nos dió una nueva herramienta: el exponente de Hurst, o H. H tiene una gran cantidad de aplicaciones a toda serie de tiempo pues es altamente robusto. Tiene unos cuantos supuestos sobre el sistema que es estudiado, y puede clasificar las series de tiempo. Puede distinguir una serie aleatoria de una que no lo es, inclusive, si la serie no tiene la distribución Gaussiana. Hurst encontró que la mayoría de los sistemas naturales no siguen una caminata aleatoria, gaussiana o de otra índole.

Hurst [6] midió como los niveles de la reserva fluctuaban alrededor de su nivel promedio a través del tiempo. Como podía esperarse, el rango de la fluctuación cambiaba, dependiendo de la longitud del lapso de tiempo usado para medirlo. Si las series fueran aleatorias, el rango se incrementaría con la raíz cuadrada del tiempo. Esto se conoce como la regla $T^{\frac{1}{2}}$. Para estandarizar la medida a través del tiempo, Hurst decidió crear un cociente sin dimensiones, dividiendo el rango por la desviación estándar de las observaciones. Esto se conoce como *Rescaled Range Analisis* o análisis R/S. Hurst halló que la mayoría de los fenómenos naturales, incluyendo descargas de rios, temperaturas, lluvia y hasta manchas solares siguen una *caminata aleatoria sesgada* o tendencia con ruido estadístico. La fuerza de la tendencia y el nivel de ruido pueden ser medido mediante el análisis R/S a una escala de tiempo, esto es, por cuanto H está por arriba de .50. Para explicar el trabajo de Hurst para una serie de tiempo en general, debemos definir un rango comparable con con el de las fluctuaciones de los niveles de altura de la reserva. empezamos con una serie de tiempo t, con u observaciones:

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^{t}(e_u - M_N) \tag{5.1}$$

donde

$X_{t,N}$ = desviación acumulada sobre N períodos.
e_u = flujo entrante en el año u
M_N = promedio e_u sobre N períodos.

El rango se convierte entonces en la diferencia entre el máximo y el mínimo alcanzados en (5.1):

$$R = Max(X_{t,N}) - Min(X_{t,N}) \tag{5.2}$$

donde

$Max(X)$ = máximo valor de X.
$Min(X)$ = mínimo valor de X.

Para comparar los diferentes tipos de series de tiempo, Hurst dividió este rango por la desviación estándar de las observaciones originales. Esta *nueva escala del rango* debe incrementarse con el tiempo. Hurst formuló las siguiente relación:

$$R/S = (aN)^H \tag{5.3}$$

donde

R/S = rango con la nueva escala.
N = número de observaciones.
a = una constante
H = exponente de Hurst

De acuerdo con la mecánica estadística, H debe ser igual a 0.50 si la serie es una caminata aleatoria. En otras palabras, el rango de desviaciones acumuladas debe de incrementarse con la raiz cuadrada del tiempo, N. Cuando Hurst aplicó su estadístico al registro de descargas del río Nilo, ¡encontró $H = .90$! Lo intentó con otros ríos, pero H siempre estuvo por arriba de .50, intentó con otros fenómenos naturales y se encontró con el mismo caso. ¿Qué significaba esto?

Cuando H era diferente de .50, las observaciones no eran independientes, cada observación poseía *memoria* de todos los eventos que la precedían. Esta no era una memoria de corto plazo, la cual suele llamarse *Markoviana*. Esta memoria era diferente: es de largo plazo; en teoría debe durar por siempre. Los eventos más recientes tienen mayor impacto que los más distantes pero, aún así, estos últimos siguen teniendo algún efecto residual. En una escala mayor, un evento que exhibe las estadísticas de Hurst es el resultado de un gran flujo de sucesos interconectados. Lo que pasa hoy influencia el futuro. Donde estamos ahora es un resultado de donde estuvimos en el pasado. El tiempo es importante. Como una pequeña piedra que arrojamos al agua, los eventos de hoy se van hundiendo en el tiempo. Las ondas que se produjeron al traspasar el agua, se van desvaneciendo hasta que, por cualquier motivo o propósito, las ondas se desvanecen [16].

5.2. La Naturaleza Fractal de H.

las series de tiempo *persistentes*, definidas como las que tienen $0{,}5 < H \leq 1{,}0$, son fractales ya que pueden ser descritas como movimiento browniano fraccionario. En el movimiento browniano[2] fraccionario, hay correlación de eventos en distintas escalas de tiempo. Por esta relación, la probabilidad de que sucedan dos eventos, uno tras otro, no es 50/50. El exponente de Hurst H describe la posibilidad de que dos eventos consecutivos sucedan. Si $H = 0.6$, hay, en esencia, una probabilidad más alta, de que si el último número fue positivo, el que le sigue sea positivo también. Esto no es en realidad una probabilidad; sino simplemente una medida de *sesgo*.

[2]Cabe mencionar que en 1827 el botánico Robert Brown, descubrió otro ejemplo de un fractal al observar que las pequeñas partículas en suspensión, dentro de un fluido estaban sometidas a rápidos movimientos irregulares, producidos por la agitación térmica de las moléculas del fluido. Dichas moléculas se tropiezan con las partículas, y les dan un empujón. Ver [23] y [3].

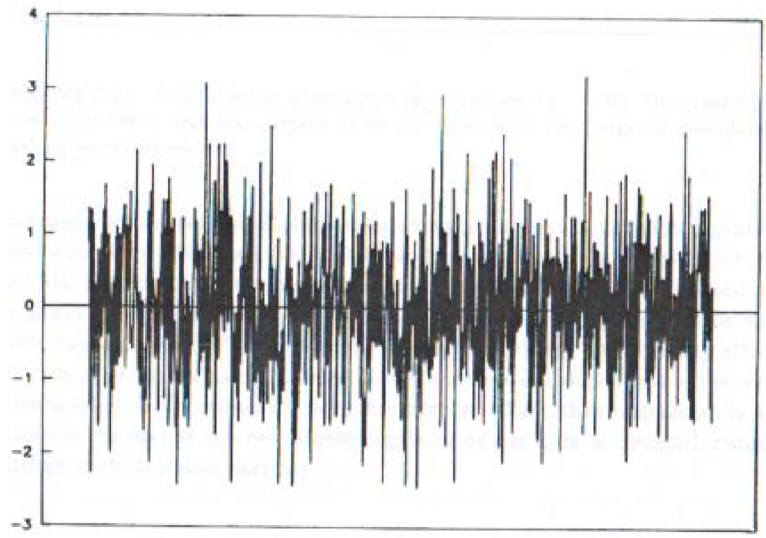

Figura 5.1: Ruido fractal: observaciones con H =.52, a medida que H se incrementa, hay más incrementos positivos seguidos de incrementos positivos, y negativos seguidos de negativos. La correlación de signos en la serie es creciente.

Como cada punto no es igualmente probable (como en una caminata aleatoria) , la dimensión fractal de distribución de probabilidad no es 2; sino un número entre uno y dos. Mandelbrot [12] demostró que el inverso de H es la dimensión fractal para la trayectoria de un movimiento Browniano [24], pero para su gráfica sería $2 - D$ (ver sección siguiente). La gráfica de una caminata aleatoria, con H =0.5 , tendría dimensión fractal 2. Si H =0.7 la dimensión fractal de la trayectoria de movimiento Browniano correspondiente es $\frac{1}{0,7}$ o ≈1.43. Nótese que una caminata aleatoria es realmente 2-dimensional y llenaría evenualmente el plano.

5.3. La Dimensión Fractal y H

La dimensión Fractal de las series de tiempo, o cambios acumulativos de una caminata aleatoria es 1.50. La dimensión Fractal de un plano geométrico es 2.0. Entonces, la dimensión Fractal de una caminata aleatoria estaría a la mitad del camino de una línea y un plano, es decir sería 1.50.

El exponente de Hurst H puede ser convertido a dimensión Fractal D

usando la fórmula siguiente(ver [16] y [24]) :

$$D = 2 - H \tag{5.4}$$

Por lo tanto, si H=.50, entonces D=1.50, ambos valores son consistentes con un sistema aleatorio e independiente. Un valor de $1 < H \leq 1{,}50$ resultará en una dimensión fractal más cercana a una línea. Esto es, una serie de tiempo *persistente*, en la terminología de Hurst, daría como resultado una línea más suave, con menos picos que una caminata aleatoria. Una serie *antipersistente* con $0 < H < 0{,}50$ arrojaría una dimensión fractal mayor, más puntiaguda que una caminata aleatoria, osea, un sistema sujeto a más reveses. Esto, claro, representa la antipersistencia.