Capítulo 4

La Dimensión Fractal.

Esta hoja de papel es un objeto tri-dimensional pues posee un cierto grueso, supongamos que no fuera así, y que fuera totalmente plana, es decir, un plano de dos dimensiones. En ese caso podríamos arrancarla y arrugarla o *hacerla bola*. El objeto tendría volúmen y sería sólido, pero no sería tridimensional porque la bola estaría llena de huecos y descontinuidades, y por lo tanto no sería diferenciable. Para convertirla en una esfera se necesitarían un largo número de interpolaciones lineales. Todo esto explica porque es tan dificil modelar la naturaleza con la geometría euclidiana. La mayoría de los objetos en el mundo real no son sólidos en el sentido de Euclides pues tienen hoyos y deformaciones. A pesar de residir en el espacio tridimensional su dimensión es fraccionaria entre uno y dos.

Tomemos un trozo de cuerda. Luego, tomemos otro de la misma longitud y coloquemos ambos haciendo coincidir los extremos: el resultado es, obviamente, que duplicamos su medida. Sin embargo , si queremos hacer lo mismo con un cuadrado de papel, necesitamos 4 copias iguales para conseguir duplicar sus medidas. Si lo vamos a hacer con un dado de queso, harán falta ocho iguales para que sus medidas sean el doble. Si existiera el queso en el espacio de dimensión cuatro , necesitaríamos diesciséis dados iguales . Dicho con otras palabras, para conseguir un hipercubo de dimensión d cuyas medidas sean el doble de las del otro, se necesitarán $c = 2^d$ iguales a éste [23]. Por consiguiente obtendremos la dimensión despejando la d :

$$d = \frac{logc}{log2}$$

Por ejemplo, si podemos encontrar un objeto cuya medida se duplique colocando juntos tres iguales,como el triángulo de Sierpinski, entonces su dimensión será

$$d = \frac{log3}{log2} = 1{,}5849\cdots$$

En general, para multiplicar por un factor a las medidas de un hipercubo de dimensión d se necesitarán $c = a^d$ copias iguales y asi

$$d = \frac{logc}{loga}$$

Resulta sencillo ver que un lado de la curva del copo de nieve de Koch está formado por 4 copias de el mismo, tales que cada una de ellas tiene un tercio de la longitud total. Por lo tanto $a = 3$ y $c = 4$ y

$$d = \frac{log4}{log3} = 1{,}2618\cdots$$

Una dimensión definida de esta manera puede parecer más bien poco ortodoxa, pero tiene una finalidad muy seria: refleja las propiedades de *escala* de la curva. Y esto es lo hace que sea fundamental la dimensión de *similitud* que acabamos de definir. Un conjunto al que se pueda aplicar se denomina autosimilar.

Esta idea se puede modificar para utilizarla también en otros conjuntos; la versión final recibe el nombre de dimensión de Hausdorff-Besicovitch o, sencillamente, *dimensión fractal*.

4.1. El método de conteo de cajas.

Para calcular la dimensión de un fractal (y en particular de una serie de tiempo fractal) es necesario calcular de alguna manera la forma en que la gráfica llena parcial o totalmente el plano. por supuesto, existen varios enfoques para hacerlo, en este estudio se implementó un algoritmo en el paquete informático Mathematica que ejecuta el método de conteo de cajas [4] que exponemos a continuación. Cabe destacar que la dimensión que se obtiene por medio del método de conteo de cajas, y la dimensión topológica de Hausdorff-Besicovitch [18] coinciden en el caso del triángulo de Sierpinski y las series de tiempo fractales. Para otros métodos remitimos al lector a [2] y [1].

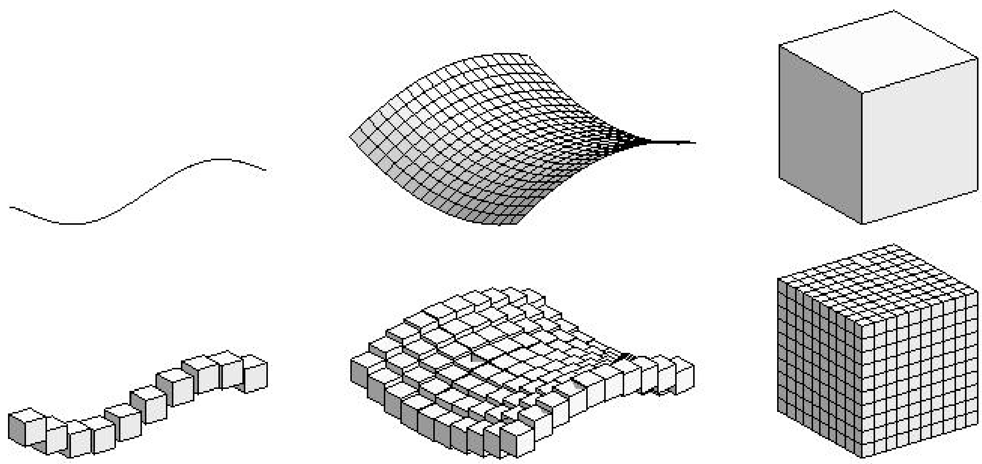

Figura 4.1: Cubriendo una curva, un plano y un cubo sólido con cubos de lados $\epsilon = \frac{1}{2^n}$.

Este método consiste en establecer un sistema cartesiano de coordenadas que contenga el conjunto de puntos de la imagen que deseamos analizar al cual llamaremos conjunto A. Posteriormente se procede a contar la cantidad $N_n(A)$ de cuadrados (o cubos, o hipercubos, dependiendo de la dimensión en que se encuentre el objeto analizado) de tamaño $\frac{1}{2^n}$ que interceptan al conjunto A. Es posible obtener valores muy exactos de $N_n(A)$ para $n = 0, 1, 2, \cdots, 6$. Cabe mencionar que dichos valores dependen del sistema coordenado que se utilice. La aproximación de la dimensión fractal está dada por la pendiente de la recta obtenida por la regresión lineal de los puntos $(ln(2^n), ln(N_n(A)))$. [1].

4.2. La dimensión fractal como herramienta de análisis financiero.

En 1952, Markowitz [13] propuso que entre más volatil sea una acción, se percibe como más riesgosa. La volatilidad o el riesgo se toman como la medida estadística de la desviación estándar σ de los rendimientos, o σ^2, su varianza. se supone que la volatilidad mide la *dispersión* de los rendimientos, pero, ¿realmente lo hace?

σ mide la probabilidad de que una observación se encuentre a cierta

Observación	Serie 1	Serie 2
1	+2	+1
2	-1	+2
3	-2	+3
4	+2	+4
5	-1	+5
6	+2	+6
Rendimiento acumulado	+1.93	+22.83
Desviación estándar σ	1.70	1.71
Dimensión Fractal	1.42	1.13

Cuadro 4.1: σ versus dimensión fractal.

distancia de la observación promedio. Entre más grande sea este número, más grande es la dispersión. Esta dispersión grande significa que tendremos grandes altibajos en los rendimientos. El activo en cuestión se considera riesgoso.

Sin embargo muchas veces se ignora que σ solo es válida si el sistema analizado es aleatorio. Si las observaciones se encuentran correlacionadas o presentan correlación serial, entonces en uso de σ como medida de dispersión se debilita ampliamente. Debido a que, como ya mencionamos, varios estudios [16] han demostrado que la distribución típica de un mercado bursátil no es normal, la utilización de σ como medida de riesgo, es de cuestionable utilidad.

Como ejemplo veamos el cuadro 4.1.

Hay dos posibles series de rendimientos, 1 y 2. La serie 2 no está normalmente distribuida. La serie 1 no tiene tendencias, mientras que la serie 2 muestra una muy clara. La serie 1 tiene un rendimiento acumulado de 1.93 %, comparado con 22.83 % de la serie 2. Sin embargo, la serie 1 tiene una desviación estándar de 1.70, mientras que la serie 2 tiene una desviación estándar virtualmente idéntica de 1.71. En este ejemplo hipotético, 2 acciones con la misma volatilidad presentan grandes diferencias en rendimientos. Los observadores pueden reclamar que *ambas* series no están distribuidas normalmente, y ese es exactamente el punto. Por esta razón nos encontramos con que σ es tan ineficiente para medir la dispersión, como lo sería un regla para medir una costa.

Usando la dimensión fractal podemos ver una clara diferencia entre entre ambas series (1.42 vs. 1.13) y ver que la serie 1 es realmente más *volátil*.