

Sea $z \in \text{Im } f$
 $\Rightarrow \exists g \in G_2$ tal que $z = f(g)$

Sea $Kg \in G_1/K$
 $\Rightarrow \psi(Kg) = \psi(g) = f(g) = z$

$$\therefore z \in \text{Im } \psi$$

$$\therefore \text{Im } f \subseteq \text{Im } \psi$$

$$\therefore \text{Im } f = \text{Im } \psi$$

Luego, ψ es un monomorfismo sobre $\text{Im } \psi$

i.e., $\psi: G_1/K \rightarrow \text{Im } \psi$ es un isomorfismo

Así, $G_1/K \cong \text{Im } \psi$

pero $\text{Im } \psi = \text{Im } f$

$$\therefore \frac{G_1}{K} \cong \text{Im } f$$

Corolario:

Si $f: G_1 \rightarrow G_2$ es un epimorfismo con kernel K
entonces $G_2 \cong G_1/\text{Ker } f$

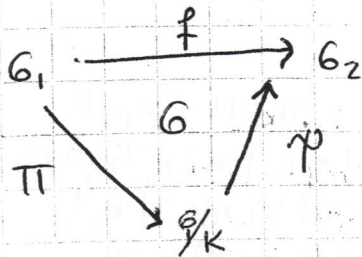
Demostración (ejercicio - clase)

Por el teorema anterior $G_1/K \cong \text{Im } f$ pero $\text{Im } f = G_2$
(ya que f es sobreyectivo)

$$\text{Así, } \frac{G_1}{K} \cong G_2$$

$$\therefore G_2 \cong G_1/\text{Ker } f$$

Si $\pi: G_1 \rightarrow G_1/K$ es el epimorfismo natural entonces
el siguiente diagrama, conmuta (i.e., $f = \psi \circ \pi$)



$$K = \text{Ker } f$$

¡¡¡ Probarlo! ¡¡¡

Teorema (Segundo Teorema de Isomorfismo).
 Si $K, N \leq G$ con $N \triangleleft G$ entonces $\frac{K}{N \cap K} \cong \frac{NK}{N}$

Demostración:

Veamos que $N \triangleleft NK$, $NK := N \vee K := \text{Gen}(N \cup K)$
 $+ N \triangleleft NK$

Para ello exhibiremos primero

$$NK \leq G$$

Sean $n_1 k_1, n_2 k_2 \in NK$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n_1 k_1 n_2 k_2 &= n_1 k_1 n_2 k_1^{-1} k_1 k_2 \\ &= n_1 (k_1 n_2 k_1^{-1}) k_1 k_2 \\ &= n_1 n_3 k_1 k_2 \end{aligned}$$

donde $n_3 = k_1 n_2 k_1^{-1} \in N$ (ya que $N \triangleleft G$)

$$\Rightarrow (n_1 k_1)(n_2 k_2) = n_1 n_3 k_1 k_2 \in NK$$

De ahí que $n_1 k_1 n_2 k_2 \in NK$

Sea $x = n k \in NK$

$$\Rightarrow x^{-1} = (n k)^{-1} = k^{-1} n^{-1}$$

$$\Rightarrow x^{-1} = k^{-1} n^{-1} k k^{-1}$$

$$= (k^{-1} n^{-1} k) k^{-1}$$

$$= (n k^{-1} (k^{-1})^{-1}) k^{-1}$$

$$= n_1 k^{-1} \text{ donde } n_1 = k^{-1} n^{-1} (k^{-1})^{-1} \in N$$

$$\Rightarrow x^{-1} = n_1 k^{-1} \in NK$$

$$\therefore NK \leq G$$

Pero $N \trianglelefteq NK$ ya que $n = ne$ para $n \in N$ y $e \in K$

Así $N \leq NK$

$$+ N \triangleleft NK$$

Sea $g \in NK$ y $n \in N$

$$\Rightarrow g = n_1 k_1, \quad n_1 \in N, \quad k_1 \in K$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g n g^{-1} &= (n_1 k_1) n (k_1^{-1} n_1^{-1}) \\ &= n_1 (k_1 n k_1^{-1}) n_1^{-1} \\ &= n_1 (k_1 n k_1^{-1}) n_1^{-1} \end{aligned}$$

$$= n_1 n_2 n_1^{-1} \text{ donde } n_2 = k_1 n k_1^{-1} \in N$$

$$\Rightarrow g n g^{-1} = n_1 n_2 n_1^{-1} \in N$$

$$\text{i.e., } g n g^{-1} \in N$$

$$\therefore \forall g \in NK : g N g^{-1} \subseteq N$$

$$\vdash NK = KN$$

Para exhibir que $NK = KN$.

Demostraremos:

$$\text{i) } KN, NK \subseteq \text{Gen}(KUN) := [KUN]$$

$$\text{ii) } NK \supseteq KUN \quad KN \supseteq KUN$$

$$\text{i) Sea } a \in NK \Rightarrow a = nk \text{ para alg\u00fan } n \in N \text{ y } k \in K \\ \Rightarrow a \in \text{Gen}(KUN)$$

(Por la caracterizaci\u00f3n de $\text{Gen}(KUN)$, Miercoles
los elementos de $\text{Gen}(KUN)$ son 05 de Abril, 17.

productos finitos de potencias de elementos de KUN)

As\u00ed, $NK \subseteq \text{Gen}(KUN)$, de manera analoga se exhibe que
 $KN \subseteq \text{Gen}(KUN)$.

$$\text{ii) Sea } c \in KUN \Rightarrow c \in K \vee c \in N$$

caso 1.

$$\text{Si } c \in K \Rightarrow c = ec \text{ con } e \in N \text{ y } c \in K \\ \Rightarrow c = ec \in NK$$

caso 2.

$$\text{Si } c \in N \Rightarrow c = ce \text{ con } c \in N \text{ y } e \in K \\ \Rightarrow c = ce \in NK$$

De cualquier forma $c \in NK$

$$\text{As\u00ed, } KUN \subseteq NK$$

De manera analoga se exhibe que $KUN \subseteq KN$

por i) y ii)

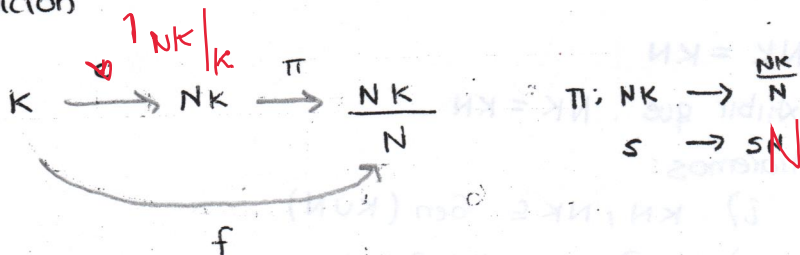
$$NK \subseteq \text{Gen}(KUN) \quad \text{y} \quad NK \supseteq \text{Gen}(KUN)$$

luego como $NK \leq G$ tal que $NK \geq KUN$, luego
 $\text{Gen}(KUN) \leq NK$

Por consiguiente, $\text{Gen}(KUN) = NK$

$$\therefore NK = KN.$$

Sea la composición



$$f: K \rightarrow \frac{NK}{N}$$

Como $K \subseteq NK$ la función $1_{NK|_K}: K \rightarrow NK$ es llamada la función inclusión de K en NK . luego $f = \pi \circ 1_{NK|_K}$
 f es un homomorfismo ya que $1_{NK|_K}$ y π lo son.

Veamos que $\text{Ker}f = K \cap N$

Sea $x \in \text{Ker}f$, luego $x \in K$ y $f(x) = N$

$$\Rightarrow x \in K \text{ y } (\pi \circ 1_{NK|_K})(x) = N$$

$$\Rightarrow x \in K \text{ y } \pi(1_{NK|_K}(x)) = N$$

$$\Rightarrow x \in K \text{ y } \pi(x) = N$$

$$\Rightarrow x \in K \text{ y } xN = N$$

$$\Rightarrow x \in K \text{ y } x \in N$$

$$\Rightarrow x \in K \cap N$$

Si $x \in K \cap N$

$$\Rightarrow x \in K$$

$$\Rightarrow 1_{NK|_K}(x) = x$$

$$\Rightarrow \pi(1_{NK|_K}(x)) = \pi(x)$$

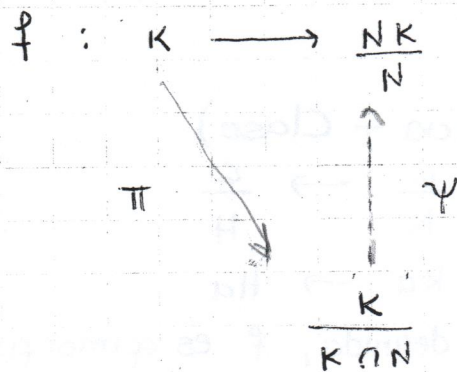
$$= xN$$

$$(x \in N)$$

$$= N$$

$$\Rightarrow f(x) = N$$

$\Rightarrow x \in \text{Ker } f$
 Así, $K \cap N \subseteq \text{Ker } f$
 $\therefore \text{Ker } f = K \cap N$



$\psi : \frac{K}{K \cap N} \longrightarrow \text{Im } \psi$ es un morfismo sobre $\text{Im } \psi$.

Por consiguiente $\frac{K}{K \cap N} \cong \text{Im } \psi$, pero $\text{Im } \psi = \text{Im } f$ de

ahí que $\frac{K}{K \cap N} \cong \text{Im } f$. Solo resta probar que:

$$\frac{K}{K \cap N} \cong \frac{NK}{N}$$

Sea $\bar{z} \in \text{Im } f$

$$\Rightarrow \exists t \in K : \bar{z} = f(t)$$

luego $\bar{z} = tN$

Entonces \bar{z} está en la familia de todas aquellas clases de N que tienen representante en K .

Ahora bien, $N \trianglelefteq G$ y $K \leq G$, entonces $N \leq NK \leq G$ y NK/N es un subgrupo de G/N que consiste de todas aquellas clases nK donde $nK \in NK$.

Como $nK = NK$, se sigue que NK/N consiste precisamente de todas aquellas clases de N que contienen un representante en K .

$$\therefore \text{Im } f = \frac{NK}{N}$$

Teorema (Tercer teorema de isomorfismo).

Si H y K son subgrupos normales de un grupo G tales que $K \leq H$ entonces H/K es un subgrupo normal de G/K y $\left(\frac{G}{K}\right) / \left(\frac{H}{K}\right) \cong G/H$.

Demostración: (Ejercicio - Clase)

Sugerencia: Sea $f: \frac{G}{K} \rightarrow \frac{G}{H}$
 $Ka \rightarrow Ha$

Exhiba que f está bien definida, f es epimorfismo y $\text{Ker } f = H/K$.

+ f está bien definida

Veamos que f está bien definida

$$\text{Si } Ka = Kb$$

$$\text{+ } f(Ka) = f(Kb)$$

$$\text{o bien } Ha = Hb$$

$$\text{Como } Ka = Kb$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in K \text{ y puesto que } K \leq H$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow Ha = Hb$$

+ f es epimorfismo

i.e. i) f es homomorfismo

ii) f es sobreyectivo

f) Sean $Ka, Kb \in G/K$

$$f(KaKb) = f(Kab)$$

$$= Hab$$

$$= HaHb$$

$$= f(Ka)f(Kb)$$

$\therefore f$ es homomorfismo

ii) Es claro que $\text{Im } f \subseteq G/H$
 Sea $Ha \in G/H$
 $\Rightarrow a \in G$
 $\Rightarrow Ka \in G/K$

y además $f(Ka) = Ha$

$$\therefore \frac{G}{H} \subseteq \text{Im } f$$

$\therefore f$ es sobreyectiva

Veamos que $\text{Ker } f = \frac{H}{K}$

Si $Kx \in \text{Ker } f$

$$\Rightarrow f(Kx) = H$$

$$\Rightarrow Hx = H$$

$$\Rightarrow x \in H$$

$$\Rightarrow Kx \in H/K$$

$$\therefore \text{Ker } f \subseteq H/K$$

Si $Ky \in H/K$

$$\Rightarrow y \in H$$

$$\Rightarrow f(Ky) = Hy = H$$

$$\Rightarrow Ky \in \text{Ker } f$$

$$\therefore H/K \subseteq \text{Ker } f$$

$$\therefore \text{Ker } f = H/K$$

Por el primer teorema de isomorfismo

$$\frac{\frac{G}{K}}{\frac{H}{K}} \cong \frac{G}{H}$$

Teorema:

Sea $f: G_1 \rightarrow G_2$ un epimorfismo.

$$S_f(G_1) = \{ K \leq G_1 : K \supseteq \text{Ker } f \} \quad \text{y}$$

$$S(G_2) = \{ N \leq G_2 \}.$$

Entonces existe una biyección entre $S_f(G_1)$ y $S(G_2)$.

Demostración.

Sea $N \in S(G_2)$ y

$$f^{-1}(N) = \{ x \in G_1 : f(x) \in N \} := f^{-1}(N)$$

Definimos $\psi: S(G_2) \rightarrow S_f(G_1)$

$$N \rightarrow f^{-1}(N)$$

$$\text{+ i) } f^{-1}(N) \leq G_1 \text{ y } \text{Ker } f = f^{-1}(N)$$

i) Sean $x_1, x_2 \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in N$$

Como $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) \in N$

$$\text{i.e. } f(x_1 x_2) \in N$$

luego $x_1 x_2 \in f^{-1}(N)$

Así, dados $x_1, x_2 \in f^{-1}(N)$,

tenemos que

$$x_1 x_2 \in f^{-1}(N)$$

Sea $x \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow f(x) \in N$$

Como $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \in N$ (ya que $N \leq G_2$)

$$\text{i.e. } f(x^{-1}) \in N ; \text{ luego } x^{-1} \in f^{-1}(N)$$

Así, $x \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow x^{-1} \in f^{-1}(N)$$

$$\therefore f^{-1}(N) \leq G_1$$

Sea $z \in \text{Ker } f \Rightarrow f(z) = e \in N$

$$\Rightarrow z \in f^{-1}(N)$$

Así, $\text{Ker } f \subseteq f^{-1}(N)$

$$\therefore \text{Ker } f \leq f^{-1}(N).$$