Sea $z \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists\, g \in G_2$ tal que $z = f(g)$

Sea $Kg \in G_1/K$

$\Rightarrow \psi(Kg) = \psi(g) = f(g) = z$

$\therefore z \in \operatorname{Im} \psi$

$\therefore \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} \psi$

$\therefore \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \psi$

Luego, ψ es un monomorfismo sobre $\operatorname{Im} \psi$

i.e., $\psi : G_1/K \to \operatorname{Im} \psi$ es un isomorfismo

Así, $G_1/K \cong \operatorname{Im} \psi$

pero $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Im} f$

$\therefore \dfrac{G_1}{K} \cong \operatorname{Im} f$

Corolario:

Si $f : G_1 \to G_2$ es un epimorfismo con Kernel K entonces $G_2 \cong G_1/\operatorname{Ker} f$

Demostración (ejercicio - clase)

Por el teorema anterior $G_1/K \cong f$ pero $\operatorname{Im} f = G_2$ (ya que f es sobreyectivo)

Así: $G_1/K \cong G_2$

$\therefore G_2 \cong G_1/\operatorname{Ker} f$

Si $\pi : G_1 \to G_1/K$ es el epimorfismo natural entonces el siguiente diagrama conmuta (i.e., $f = \psi \circ \pi$)

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & G & G_2 \\ & G/K \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$K = \operatorname{Ker} f$ ¡Probarlo!

Teorema (Segundo Teorema de Isomorfismo).
Si $K, N \leq G$ con $N \trianglelefteq G$ entonces $\dfrac{K}{N \cap K} \cong \dfrac{NK}{N}$

Demostración:
Veamos que $N \trianglelefteq NK$, $NK := N \vee K := Gen(N \cup K)$
$+ \; N \trianglelefteq NK$
Para ello exhibiremos primero
$NK \leq G$
Sean $n_1k_1, n_2k_2 \in NK$
$$\Rightarrow n_1k_1 n_2k_2 = n_1k_1 n_2 k_1^{-1} k_1 k_2$$
$$= n_1 (k_1 n_2 k_1^{-1}) k_1 k_2$$
$$= n_1 n_3 k_1 k_2$$
donde $n_3 = k_1 n_2 k_1^{-1} \in N$ (ya que $N \trianglelefteq G$)
$$\Rightarrow (n_1k_1)(n_2k_2) = n_1 n_3 k_1 k_2 \in NK$$
De ahí que $n_1k_1 n_2k_2 \in NK$
Sea $x = nk \in NK$
$$\Rightarrow x^{-1} = (nk)^{-1} = k^{-1} n^{-1}$$
$$\Rightarrow x^{-1} = k^{-1} n^{-1} k k^{-1}$$
$$= (k^{-1} n^{-1} k) \cancel{k^{-1}} \; k^{-1}$$
$$= \cancel{(n_1 k^{-1} (k^{-1})^{-1}) \, k^{-1}}$$
$$= n_1 k^{-1} \quad \text{donde } n_1 = k^{-1} n^{-1} (k^{-1})^{-1} \in N$$
$$\Rightarrow x^{-1} = n_1 k^{-1} \in NK$$
$\therefore \; NK \leq G$
Pero $N \subseteq NK$ ya que $n = ne$ para $n \in N$ y $e \in K$
Así $N \subseteq NK$
$+ \; N \trianglelefteq NK$
Sea $g \in NK$ y $n \in N$
$$\Rightarrow g = n_1 k_1, \; n_1 \in N, \; k_1 \in K$$
$$\Rightarrow g n g^{-1} = (n_1 k_1) n (k_1^{-1} n_1^{-1})$$
$$= n_1 (k_1 n k_1^{-1}) n_1^{-1}$$
$$= n_1 (k_1 n k_1^{-1}) n_1^{-1}$$

$= n_1 n_2 n_1^{-1}$ donde $n_2 = k_1 n k_1^{-1} \in N$

$\Rightarrow g n g^{-1} = n_1 n_2 n_1^{-1} \in N$

i.e., $g n g^{-1} \in N$

$\therefore \forall g \in NK : g N g^{-1} \subseteq N$

$\vdash NK = KN$

Para exhibir que $NK = KN$.

Demostraremos:

i) $KN, NK \subseteq \text{Gen}(K \cup N) := [K \cup N]$

ii) $NK \supseteq K \cup N \quad KN \supseteq K \cup N$

i) Sea $a \in NK \Rightarrow a = nk$ para algún $n \in N$ y $k \in K$

$\Rightarrow a \in \text{Gen}(K \cup N)$

(Por la caracterización de $\text{Gen}(K \cup N)$, los elementos de $\text{Gen}(K \cup N)$ son productos finitos de potencias de elementos de $K \cup N$)

Miercoles 05 de Abril, 17.

así, $NK \subseteq \text{Gen}(K \cup N)$, de manera analoga se exhibe que $KN \subseteq \text{Gen}(K \cup N)$.

ii) Sea $c \in K \cup N \Rightarrow c \in K \vee c \in N$

caso 1.

Si $c \in K \Rightarrow c = ec$ con $e \in N$ y $c \in K$

$\Rightarrow c = ec \in NK$

caso 2.

Si $c \in N \Rightarrow c = ce$ con $c \in N$ y $e \in K$

$\Rightarrow c = ce \in NK$

De cualquier forma $c \in NK$

Así, $K \cup N \subseteq NK$

De manera analoga se exhibe que $K \cup N \subseteq KN$

por i) y ii)

$NK \subseteq \text{Gen}(K \cup N)$ y $NK \supseteq \text{Gen}(K \cup N)$

luego como $NK \leq G$ tal que $NK \supseteq K \cup N$, luego

$$Gen\,(K \cup N) \leq NK$$

Por consiguiente, $Gen\,(K \cup N) = NK$

$$\therefore\ NK = KN.$$

Sea la composición

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "1_{NK}|_K"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & NK \arrow[r, "\pi"] & \dfrac{NK}{N} \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \pi : NK &\longrightarrow \frac{NK}{N} \\ s &\longrightarrow sN \end{aligned}$$

$$f : K \longrightarrow \frac{NK}{N}$$

Como $K \subseteq NK$ la función $1_{NK}|_K : K \longrightarrow NK$ es llamada la función inclusión de K en NK luego $f = \pi \circ 1_{NK}|_K$
f es un homomorfismo ya que $1_{NK}|_K$ y π lo son.

Veamos que $\ker f = K \cap N$

Sea $x \in \ker f$, luego $x \in K$ y $f(x) = N$

$\Rightarrow x \in K$ y $(\pi \circ 1_{NK}|_K)(x) = N$

$\Rightarrow x \in K$ y $\pi(1_{NK}|_K(x)) = N$

$\Rightarrow x \in K$ y $\pi(x) = N$

$\Rightarrow x \in K$ y $xN = N$

$\Rightarrow x \in K$ y $x \in N$

$\Rightarrow x \in K \cap N$

Si $x \in K \cap N$

$\Rightarrow x \in K$

$\Rightarrow 1_{NK}|_K(x) = x$

$\Rightarrow \pi(1_{NK}|_K(x)) = \pi(x)$

$= xN \qquad (x \in N)$

$= N$

$\Rightarrow f(x) = N$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f$

Así, $K \cap N \subseteq \operatorname{Ker} f$

$\therefore \operatorname{Ker} f = K \cap N$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \frac{NK}{N} \\
& \frac{K}{K\cap N} \arrow[u, dashed, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

$\psi : \frac{K}{K \cap N} \longrightarrow \operatorname{Im}\psi$ es un morfismo sobre $\operatorname{Im}\psi$.

Por consiguiente $\frac{K}{K\cap N} \cong \operatorname{Im}\psi$, pero $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{im} f$ de

ahí que $\frac{K}{K\cap N} \cong \operatorname{Im} f$. Solo resta probar que:

$$\frac{K}{K\cap N} \cong \frac{NK}{N}.$$

Sea $\bar{z} \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists\, t \in K : \bar{z} = f(t)$

luego $\bar{z} = tN$

Entonces $\bar{z}$ está en la familia de todas aquellas clases de N que tienen representante en K.

Ahora bien, $N \triangleleft G$ y $K \leq G$, entonces $N \leq NK \leq G$ y

$NK|N$ es un subgrupo de G/N que consiste de todas aquellas clases Nnk donde $nk \in NK$.

Como $NnK = NK$, se sigue que $NK|N$ consiste presisamente de todas aquellas clases de N que contienen un representante en K.

$\therefore \; \operatorname{Im} f = \frac{NK}{N}$.

Teorema (Tercer teorema de Isomorfismo).
Si H y K son subgrupos normales de un grupo G tales que $K \leq H$ entonces H/K es un subgrupo normal de G/K y $\left(\frac{G}{K}\right) / \left(\frac{H}{K}\right) \cong G/H$.

Demostración: (Ejercicio – Clase)
Sugerencia: Sea $f : \frac{G}{K} \rightarrow \frac{G}{H}$

$$Ka \rightarrow Ha$$

Exhiba que f está bien definida, f es epimorfismo y $\operatorname{Ker} f = H/K$.

$\vdash$ f está bien definida
Veamos que f está bien definida
Si $Ka = Kb$

$\vdash$ $f(Ka) = f(Kb)$

o bien $Ha = Hb$

Como $Ka = Kb$

$\Rightarrow ab^{-1} \in K$ y puesto que $K \leq H$

$\Rightarrow ab^{-1} \in H$

$\Rightarrow Ha = Hb$

$\vdash$ f es epimorfismo
i.e. i) f es homomorfismo
ii) f es sobreyectivo

i) Sean $Ka, Kb \in G/K$

$$\begin{aligned} f(KaKb) &= f(Kab) \\ &= Hab \\ &= HaHb \\ &= f(Ka)f(Kb) \end{aligned}$$

$\therefore$ f es homomorfismo

ii) Es claro que $Im\ f \subseteq G/H$

Sea $Ha \in G/H$

$\Rightarrow a \in G$

$\Rightarrow Ka \in G/K$

y además $f(Ka) = Ha$

$\therefore \frac{G}{H} \subseteq Im\ f$

$\therefore$ f es sobreyectiva

Veamos que $Ker\ f = \frac{H}{K}$

Si $Kx \in Ker\ f$

$\Rightarrow f(Kx) = H$

$\Rightarrow Hx = H$

$\Rightarrow x \in H$

$\Rightarrow Kx \in H/K$

$\therefore Ker f \subseteq H/K$

Si $Ky \in H/K$

$\Rightarrow y \in H$

$\Rightarrow f(Ky) = Hy = H$

$\Rightarrow Ky \in Ker f$

$\therefore H/K \subseteq Ker f$

$\therefore Ker f = H/K$

Por el primer teorema de isomorfismo

$$\frac{H}{K} \triangleleft \frac{G}{K}$$

$$\wedge \quad \frac{\left(\frac{G}{K}\right)}{\left(\frac{H}{K}\right)} \cong \frac{G}{H}.$$

Teorema:

Sea $f: G_1 \to G_2$ un epimorfismo.

$$S_f(G_1) = \{ K \leq G_1 : K \supseteq \operatorname{Ker} f \} \quad y$$
$$S(G_2) = \{ N \leq G_2 \}.$$

Entonces existe una biyección entre $S_f(G_1)$ y $S(G_2)$.

Demostración.-

Sea $N \in S(G_2)$ y

$$f^{-1}(N) = \{ x \in G_1 : f(x) \in N \} := \vec{f}(N)$$

Definimos $\varphi: S(G_2) \to S_f(G_1)$

$$N \to f^{-1}(N)$$

$\vdash$ i) $f^{-1}(N) \leq G_1$ y $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(N)$

i) Sean $x_1, x_2 \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow f(x_1) f(x_2) \in N$$

Como $f(x_1 x_2) = f(x_1)(x_2) \in N$

i.e. $f(x_1 x_2) \in N$

luego $x_1 x_2 \in f^{-1}(N)$

Así, dados $x_1, x_2 \in f^{-1}(N)$, tenemos que

$$x_1 x_2 \in f^{-1}(N)$$

Sea $x \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow f(x) \in N$$

Como $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \in N$ (ya que $N \leq G_2$)

i.e. $f(x^{-1}) \in N$; luego $x^{-1} \in f^{-1}(N)$

Así, $x \in f^{-1}(N)$

$$\Rightarrow x^{-1} \in f^{-1}(N)$$

$\therefore f^{-1}(N) \leq G_1$

Sea $z \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(z) = e \in N$

$$\Rightarrow z \in f^{-1}(N$$

Así, $\operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(N)$

$\therefore \operatorname{Ker} f \leq f^{-1}(N)$.