12·03·18

$$E_3,\ i \leftarrow i+Mj\ A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jp} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ a_{i1}+Ma_{j1} & \cdots & a_{ii}+Ma_{ji} & \cdots & a_{ij}+Ma_{jj} & \cdots & a_{ip}+Ma_{jp} \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jp} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Por lo anterior, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema: Sea $A \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ y E una matriz elemental de tamaño $n\times n$ la multiplicación por la izquierda de A por E realiza la misma operación elemental en las filas de A que la realizada en la matriz identidad para obtener E

Si una matriz cuadrada A se puede reducir a una matriz identidad mediante operaciones elementales en las filas, entonces existen matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_t$. tales que: $E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1 A = I$.

- Cuando obtuvimos la matriz inversa de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

realizamos ocho operaciones elementales en las filas, por cada operación elemental tenemos una matriz elemental, a saber:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},\quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

12.03.18

$$E_2E_1A = E_2(E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\0&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&-3\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A = E_3(E_2E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&-3\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1A = E_4(E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}-1/3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = E_5(E_4E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1/2\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = E_6(E_5E_4E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1/2\\0&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1/2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = E_7(E_6E_5E_4E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1/2\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = E_8(E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = E_9(E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- Calcular $B = E_9E_8 \dots E_2E_1$ y verificar que $BA = I_3 = AB$

$$E_2E_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$E_3(E_2E_1) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1 = E_4(E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}-1/3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1 = E_5(E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-5&3\\0&-2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-5/2&3/2\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

12.03.18

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = E_6(E_5E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-3/2&3/2\\0&-2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-3/2&3/2\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

✓

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = E_7(E_6E_5E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\0&-3/2&3/2\\0&2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = E_8(E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\-1/3&2/3&-1/3\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = E_9(E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\-1/3&2/3&-1/3\\0&2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\\-1/3&2/3&-1/3\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\\-1/3&2/3&-1/3\end{bmatrix}$$

- Verificar que $BA = I_3 = AB$

$$BA = \begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\\-1/3&2/3&-1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\4&5&-2\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\4&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/6&-13/6&8/6\\0&2&-1\\-1/3&2/3&-1/3\end{bmatrix}$$

Tarea: Verificar que:

1) $E_{1,\, i\leftrightarrow j} \cdot E_{1,\, i\leftrightarrow j} = I_n$
2) $E_{2,\, i\leftarrow M_i}\, E_{2,\, i\leftarrow \frac{1}{M}i} = I_n = E_{2,\, i\leftarrow \frac{1}{M}i}\, E_{2,\, i\leftarrow M_i}$
3) $E_{3,\, i\leftarrow i+M_j}\, E_{3,\, i\leftarrow i+(-M_j)} = I_n = E_{3,\, i\leftarrow i+(-M_j)}\, E_{3,\, i\leftarrow i+M_j}$

"Toda matriz elemental es invertible"

Cuando A es invertible, existen $E_1, \ldots, E_t$ matrices elementales invertibles tales que:

$$(E_t \cdots E_2E_1)A = I_n$$

Por un ejercicio de Tarea

Si A y B son invertibles, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Entonces:

12·03·18

$I_n = I_n^{-1} = [(E_t \cdots E_2 E_1)A]^{-1}$

$= A^{-1}(E_t \cdots E_2 E_1)^{-1}$

i.e, $I_n = A^{-1}(E_t \cdots E_2 E_1)^{-1}$

$\Rightarrow I_n (E_t \cdots E_2 E_1) = A^{-1}(E_t \cdots E_2 E_1)^{-1}(E_t \cdots E_2 E_1)$

$\Rightarrow E_t \cdots E_2 E_1 = A^{-1} I_n$.

i.e. $A^{-1} = E_t \cdots E_2 E_1$.

→ Temario { matrices
- inversa de una matriz.

14·03·18

Determinantes y Regla de Cramer.

Definición

Sea $A=(a_{ij}) \in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$ se define el determinante de orden n de la matriz A, lo cual se denota por $\det A$ o $|A|$ como:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo: Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Solución.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2) - (5)(-1) = -4 + 5 = 1$$

i.e. $\det A = 1$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \det B = 0$$

Finalmente,

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)0 - (-4)0 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \det C = 0$$

* El determinante será cero si hay dos filas idénticas o una fila de puros ceros.

14·03·18

Definición

Sea $A=(a_{ij}) \in M_{3\times3}(\mathbb{F})$ se define el determinante de orden 3, de la matriz A, lo cual se denota por det A como:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}^{*} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}^{\circ} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\, a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$

(desarrollo por los cofactores de los elementos de la primera fila)

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

primero los que tienen signo positivo es la multiplicación de la diagonal por (*) + (◦) y los que tienen signo negativo, es lo contrario.

• Ejemplo: Calcular los determinantes de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(1)(-3) - (2)(2)] - 1(-12-2) + 3(8-1)$$
$$= -14 + 14 + 21$$
$$= 21 \qquad \therefore \det A = 21$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot 3 - 1\cdot 6 + 1\cdot 4$$
$$= 12 - 6 + 4 \qquad \therefore \det B = 10$$
$$= 10$$

• Definición:

El determinante de una matriz de tamaño 1×1 es su único registro o componente. Sea $n>1$ y supongamos definidos los determinantes de orden menor que n. Sea $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ se llama menor M_{ij} del elemento

14.03.18.

a_{ij} al determinante de orden n-1 de la matriz de tamaño n-1xn-1 ae se obtiene a partir de la matriz A, suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de dicha matriz; i.e.

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \cdots & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(determinante de orden n-1)

Se llama complemento algebráico o cofactor del elemento a_{ij}, lo cual denotamos por A_{ij} al menor del elemento a_{ij} con el signo $(-1)^{i+j}$, i.e, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

El determinante de A, se define como:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

(desarrollo por los cotactores de los elementos de la primera fila)

Ejemplo:

Hallar el complemento algebraico o cofactor del registro (o componente) 3 de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: Determinar

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -(-7 + 0 + 0) = 7$$

Ejemplo: Usar la definición para hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$