$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

llego, por lo anterior la matriz A es invertible y su inversa es

$$\begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

~~* Si la ma[illegible] no [illegible]~~

De manera que si tenemos la ecuación matricial donde:

$$Ax = b \quad A \in M_{n \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A es invertible, i.e. existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A$ entonces

*Este método no sirve para matrices rectangulares

[illegible]

*podemos modelarlo a través de una matriz aumentada

28.02.18

$$Ax = b \iff A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$
$$\iff (A^{-1}A)x = A^{-1}b$$
$$\iff I_n x = A^{-1}b$$
$$\iff x = A^{-1}b$$

en nuestro caso particular:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y dado que A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ i.e,}$$

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, es el vector columna solución de la ecuación matricial $Ax = b$

→ Sistemas de n ecuaciones lineales con n-incógnitas ←

Considérese el sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (I)$$

tal sistema se puede escribir en forma compacta de la manera siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad \text{i.e. para cada } i$$

i.e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1} a_{1j}x_j &= b_1 \\ \sum_{j=1} a_{2j}x_j &= b_2 \\ \dots\dots \\ \sum_{j=1} a_{ij}x_j &= b_i \\ \dots\dots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{mj}x_j &= b_m. \end{aligned} \qquad (I')$$

O bien, en notación matricial $Ax = b$ donde.

28·02·18.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matriz partida aumentada $[A|b]$ describe el sistema de ecuaciones lineales (I) o bien (I')

Nota: (I) o (I') representan el mismo sistema de ecuaciones lineales.

A en $[A|b]$ representa los coeficientes del sistema (I) y es llamada matriz de coeficientes del sistema, el vector columna b en $[A|b]$ representa los términos independientes del sistema

Un vector columna $X'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$

cuyas componentes satisfacen el sistema (I) se llama vector columna solución del sistema, i.e.,

$X'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ es una solución del sistema (I) o bien (I')

Si
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' = b_1$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j' = b_2$$
$$\cdots$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' = b_i$$
$$\cdots$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j' = b_m$$

El sistema de ecuaciones lineales (I) o (I') puede tener o no tener solución.

- Si el sistema de ecuaciones (I) no tiene solución se llama incompatible (o inconsistente)
- Si el sistema de ecuaciones lineales (I) tiene solución se llama compatible (o consistente.)
- Si el sistema de ecuaciones lineales (I) es compatible pero tiene una única solución se llama compatible determinado.

28.02.18

- Si el sistema de ecuaciones lineales (I) es compatible pero tiene un número infinito de soluciones se llama compatible indeterminado.

"las soluciones del sistema de ecuaciones lineales (I) son las mismas que las de cualquier sistema obtenido de (I) por los siguientes procedimientos:

1. Intercambio de dos ecuaciones
2. Multiplicación de una ecuación del sistema lineal (I) por una constante distinta de cero.
3. Sustitución de una ecuación por la suma de sí misma con un múltiplo de una ecuación diferente del sistema."

En efecto, considérese el sistema de ecuaciones lineales (I) o bien (I') y sea:

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$ una solución de (I)

Si obtenemos el sistema de ecuaciones lineales I.1 a partir (de ecuaciones lineales) del sistema lineal (I) por medio del intercambio de la i-ésima ecuación por la k-ésima ecuación, i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_1$$

$$\cdots$$

i-ésima ecuación → $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = b_k$$

$$\cdots \qquad (I.1)$$

K-ésima ecuación → $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m$$

Entonces tenemos que el vector columna $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ también es solución del sistema lineal (I.1).

Ahora bien, del sistema de ecuaciones lineales (I) o bien (I') obtenemos el sistema lineal I.2 multiplicando la i-ésima ecuación de (I) por la constante λ obteniendo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} x_j = \lambda b_i$$

28·02·18

$$\cdots\cdots\cdots \qquad (\text{I}.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m$$

Veamos que el vector columna $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ también es solución del sistema (I.2), i.e. sustituyendo $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ en el sistema lineal (I.2) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j' = b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} x_j' = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' = \lambda b_i \quad \text{i.e.} \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} x_j' = \lambda b_i$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j' = b_m$$

Finalmente, si del sistema lineal (I) sustituimos la i-ésima ecuación por la suma de sí misma con un múltiplo de la k-ésima ecuación de tal sistema, obtenemos el sistema (I.3):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

i-ésima ecuación → $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda a_{kj}) x_j = b_i + \lambda b_k \qquad (\text{I}.3)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m$$

Veamos que el vector columna $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ solución de (I) también es solución de (I.3). Sustituyendo $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ en el sistema (I.3) obtenemos.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' = b_i$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

i-ésima ecuación → $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda a_{kj}) x_j' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' + \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{kj} x_j'$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j'$$

$$= b_i + \lambda b_k \quad \text{i.e.}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda a_{kj}) x_j' = b_i + \lambda b_k$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j' = b_m$$

→ Cualquier sistema lineal obtenido a partir del sistema (I) por medio de alguno de estos procedimientos se dice que es **equivalente** al sistema lineal (I)

* Si el vector columna era solución del sistema lineal aunque le hagamos operaciones, seguirá siendo solución del sistema.

28·02·18

- Operaciones elementales en las filas

1) Intercambio de filas. Intercambio de vectores filas de una matriz.

2) Cambio de escala en una fila. Multiplicar cualquier vector fila de una matriz por una constante distinta de cero.

3) Suma de filas. Reemplazar cualquier vector fila de la matriz por la suma de esta fila más un múltiplo escalar de otra fila diferente.

01·03·18

Por ahora, vamos a considerar sistemas de n-ecuaciones con n-incógnitas, a saber

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j &= b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j &= b_2 \qquad (\mathrm{II}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j &= b_n \end{aligned}$$

Para resolver el sistema lineal (II) por el método de Gauss vamos a reducir a la matriz aumentada $[A|b]$ a una matriz a una matriz aumentada de la forma $[U|C]$ donde U es una matriz triangular superior.

El sistema de ecuaciones lineales (II) en notación matricial $Ax=b$ se convierte en el sistema $Ux=c$ y tales sistemas son equivalentes. Si una matriz B se puede obtener a partir de A por medio de operaciones elementales en las filas entonces se dice que B es equivalente a A y esto se denota por $B \sim A$

En el caso de solución única del sistema (II) todas las componentes $U_{11}, U_{22}, \ldots, U_{ii}, \ldots, U_{nn}$, deben ser diferentes de cero.

Ejemplo: 1

- Supongamos que la matriz aumentada de un sistema con 3-ecuaciones y 3-incógnitas se puede reducir a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \quad ([U|C])$$

- Determinar el vector columna solución del sistema reducido

- Solución:

01·03·18

El sistema lineal asociado a la matriz aumentada reducida es:

$$-5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$0x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \sim$$
$$0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -4$$

$$-5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$3x_2 + 5x_3 = 8$$
$$2x_3 = -4$$

→ Método de sustitución regresiva.

De la última ecuación despejando obtenemos que $x_3 = -2$

Sustituyendo $x_3 = -2$ en la segunda ecuación y despejando x_2 obtenemos: $3x_2 + 5(-2) = 8$, i.e, $3x_2 = 8 + 10$ de ahí que $x_2 = 6$

finalmente, sustituyendo $x_3 = -2$ y $x_2 = 6$ en la primera ecuación y despejando obtenemos:

$-5x_1 - 6 + 3(-2) = 3$ i.e. $-5x_1 = 3 + 6 + 6$. luego $-5x_1 = 15$ entonces $x_1 = -3$

Así, el vector columna solución del sistema lineal reducido es:

$$X = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

→ Ejemplo

Resolver el sistema lineal:

$$x_2 - 3x_3 = -5$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$
$$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10$$

Por el método de Gauss con sustitución regresiva.

Solución:

la matriz aumentada al sistema lineal dado es.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right] (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

luego, el sistema lineal asociado a la matriz aumentada reducida es:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$
$$x_2 - 3x_3 = -5$$
$$-3x_3 = -9$$

Despejando x_3 de la última ecuación obtenemos que $x_3 = 3$ entonces

$x_2 - 3x_3 = -5 \rightarrow x_2 - 9 = -5 \rightarrow x_2 = -5 + 9 = 4$ i.e. $x_2 = 4$

Ahora bien, $2x_1 = 7 - 3x_2 + x_3 = 7 - 3(4) + 3 = 7 - 12 + 3 = -2$ i.e. $2x_1 = -2$

Por consiguiente $x_1 = -1$, así, el vector columna solución del sistema lineal dado es:

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

01·03·18

→ Método de Gauss-Jordan

tomamos la matriz en la que nos quedamos en el sistema anterior.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 8 & 22 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{3}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 8 & 22 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] (3)(-8) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] (\tfrac{1}{2}) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

*Si me queda | y si me queda 0 0 0 | 3 es que no tiene solución. 000|0 en alguna quiere decir que la variable es libre (que puede tomar cualquier valor)

· El sistema asociado a la matriz reducida es:

$x_1 = -1$

$x_2 = 4$

$x_3 = 3$

Así, el vector columna solución del sistema dado es $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

· El método de Gauss-Jordan es una continuación del método de Gauss que consiste en usar operaciones elementales en las filas para llevar la parte izquierda de una matriz aumentada a la forma de una matriz identidad, cuando el sistema es compatible determinado.

05·03·18

Ejemplo: Resolver el sistema lineal por el método de Gauss Jordan

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_2 = 4$$

→ **Solución:**

la matriz aumentada asociada al sistema lineal es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -16 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] (-3)(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -16 \\ 0 & -4 & -19 & 49 \\ 0 & -3 & -16 & 42 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{3}) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -16 \\ 0 & -4 & -19 & 49 \\ 0 & 1 & \frac{16}{3} & -14 \end{array}\right] (4)(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & 12 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{16}{3} & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & 12 \\ 0 & 1 & \frac{16}{3} & -14 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -7 \end{array}\right] (\tfrac{3}{7}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & 12 \\ 0 & 1 & \frac{16}{3} & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] (-\tfrac{16}{3})(\tfrac{11}{3})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

El sistema lineal equivalente a la matriz aumentada reducida es: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y $x_3 = -3$

El vector columna solución del sistema lineal dado es:

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

→ **Ejemplo:** Resolver el sistema lineal:

Sistema que tiene un número ∞ de soluciones

05-03-18

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14$$

→ Solución: la matriz aumentada asociada al sistema lineal dado, es: (Ya no tiene solución única, tiene un núm ∞ de solu)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] (-2)(-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{5}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Variable libre.

El sistema lineal equivalente a la matriz reducida es:

$$x_1 + \quad + x_3 = 2$$
$$x_2 - 2x_3 = 2$$

Sea $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$. Luego, despejando, obtenemos:

$$x_1 = 2 - x_3 \qquad x_1 = 2 - r$$
$$x_2 = 2 + 2x_3 \quad \text{i.e.,} \quad x_2 = 2 + 2r$$

Así, el vector columna solución es:

$$X = \begin{bmatrix} 2-r \\ 2+2r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

El sistema dado es compatible indeterminado.

Si $r=0$, la solución del sistema es el vector columna $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Solución Particular)

Ejemplo: Resolver el sistema lineal

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$
$$2x_2 - 2x_3 = 1$$

→ Solución: La matriz aumentada asociada al sistema lineal dado es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] (\tfrac{1}{3}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

no es posible

El sistema asociado a la matriz aumentada reducida es:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_2 - x_3 = -2$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$$

05 · 03 · 18

→ La tercera ecuación es imposible, ∴ El sistema lineal dado es incompatible (no tiene solución)

Ejercicio: Resolver el sistema lineal:

$$+x_2 - 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$$
$$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$$

Solución:

La matriz aumentada asociada al sistema lineal dado es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] (-3)(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 13 & -4 \end{array}\right] (1/2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 13 & -4 \end{array}\right] (-4)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right] (-1/3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right] (3)(-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right]$$

→ Solución de un sistema lineal general ←

Considérese un sistema lineal general:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (\Omega)$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

que consta de m-ecuaciones con n-incógnitas.

Para resolver el sistema lineal (Ω) formamos la matriz aumentada:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

asociada al sistema lineal (Ω) y utilizamos operaciones elementales en las filas para reducir a la matriz aumentada $[A|b]$ a la forma $[R|c]$ donde R es una matriz escalonada reducida por filas.

Definición (Matriz escalonada reducida por filas).

Una matriz de tamaño $m\times n$ $\mathbb{R}$ se le llama matriz escalonada por filas si cumple las siguientes condiciones.

a) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.

b) El primer número diferente de cero (comenzando por la

05·03·18.

izquierda) en cualquier fila cuyos elementos no son todos cero es igual a 1.

c) Si dos filas sucesivas tienen elementos distintos de cero, entonces el primer uno en la fila de abajo esta más hacia la derecha del primer uno de la fila de arriba

d) Cualquier columna que contiene el primer uno en una fila tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en una fila (i.e. 1) si lo hay se llama pivote para esa fila.

→ Ejemplos: de matrices escalonadas por filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Ejemplo: Hallar todas las soluciones de un sistema lineal cuya matriz partida se puede reducir por filas:

a: i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Pivotes. (Va a tener un numero de soluciones)

variables libres.

Solución: el sistema asociado a la matriz reducida de i) es:

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1$$
$$x_3 - 2x_4 = 2$$

Sean $x_2 = r$ y $x_4 = s$, $r, s \in \mathbb{R}$.

Entonces: $x_1 = 1 + 2x_2 - x_4$

y $x_3 = 2 + 2x_4$

i.e $x_1 = 1 + 2r - s$ y $x_3 = 2 + 2s$

Entonces: el vector columna solución del sistema lineal dado es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2r-s \\ r \\ 2+2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, r \in \mathbb{R}$$

05 03 · 18.

Si $r = 0 = s$ entonces una solución particular es: $\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}$

ii) : $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

variables libres

07 · 03 · 18

El sistema asociado a la matriz reducida es:

$$X_1 - 3X_2 + 5X_4 = 4$$
$$X_3 + 2X_4 = -7$$
$$X_5 = 1$$

Sean $X_2 = r$ y $X_4 = s$, $r, s \in \mathbb{R}$

entonces $X_1 = 4 + 3X_2 - 5X_4$

$X_3 = -7 - 2X_4$

$X_5 = 1$

i.e. $x_1 = 4 + 3r - 5s$

$x_3 = -7 - 2s$

Luego, el vector columna solución del sistema lineal es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3r-5s \\ r \\ -7-2s \\ s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Resolver el sistema lineal:

$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

+ Solución:

La matriz aumentada asociada al sistema lineal dado es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] (-1)(-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -3 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -16 & -14 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -3 \end{array}\right] (-1/8)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -16 & -14 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 3/8 \end{array}\right] (-6)(16) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 3/8 \end{array}\right] (1/2) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 3/8 \end{array}\right]$$

← ya está en la forma de una matriz escalonada

no tiene pivote, ∴ tenemos variable libre.

El sistema asociado a la matriz aumentada reducida es:

$$X_1 - X_4 = 11/2 \qquad X_3 + \tfrac{3}{4}X_4 = 3/8$$
$$X_2 + 1/2\, X_4 = -\tfrac{9}{4}$$

07·03·18

$$y \quad x_1 = \frac{11}{2} + x_4 = \frac{11}{2} + r$$
$$x_2 = -\frac{9}{4} - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{9}{4} - \frac{1}{2}r$$
$$x_3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x_4 = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}r.$$

Así, el vector columna solución del sistema lineal dado es.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} + r \\ -\frac{9}{4} - \frac{1}{2}r \\ \frac{3}{8} - \frac{3}{4}r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/2 \\ -9/4 \\ 3/8 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definición: (Rango de una matriz)

El rango de una matriz A la cual se denota por $r(A)$ o $ran(A)$ o incluso $rango(A)$ es el número de filas distintas de cero en su forma escalonada reducida por filas

Por ejemplo: , si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \quad \text{entonces,} \quad r(A) = 3$$

$$\text{si} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entonces,} \quad r(B) = 3$$

Definición: (Sistema lineal homogéneo)

Un sistema lineal de ecuaciones se denomina sistema lineal homogéneo y es de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (\Omega')$$

o bien, en notación matricial:

$AX = 0$ donde $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

$$y \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad y \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Un sistema lineal homogéneo siempre tiene solución a saber la solución "trivial", es decir, el vector columna solución:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Si en un sistema lineal tengo más incógnitas que ecuaciones, habrá una variable libre. 7.03.18

la matriz aumentada asociada al sistema lineal homogéneo (Ω') tiene la forma $[A|0]$ lo cual se sustituye por $[A]$
Así, el sistema lineal homogéneo (Ω') siempre es compatible. Para este tipo de sistemas sólo resta determinar si es compatible determinado o compatible indeterminado.

Ejemplo: Resolver el sistema lineal homogéneo

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

Solución. La matriz aumentada asociada al sistema lineal homogéneo es

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} (-2)(-4) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{2})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} (-7)(2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{5}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{bmatrix} (2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{bmatrix}$$ variable libre.

El sistema lineal asociado a la matriz reducida

$$x_1 - \tfrac{3}{5}x_4 = 0 \qquad x_1 = \tfrac{3}{5}x_4 = \tfrac{3}{5}r$$
$$x_2 - x_4 = 0 \qquad x_2 = x_4 = r$$
$$x_3 - \tfrac{4}{5}x_4 = 0 \qquad x_3 = \tfrac{4}{5}x_4 = \tfrac{4}{5}r$$

Así, el vector columna solución del sistema lineal homogéneo dado es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5\, r \\ r \\ 4/5\, r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérese el sistema lineal homogéneo (Ω') con $m < n$ i.e, el número de ecuaciones es menor que el número de ~~ecuaciones~~ incógnitas, este sistema además de tener la solución trivial, posee también soluciones no nulas, en efecto, tenemos que $r(A) \leq m < n$ donde A es la matriz de coeficientes asociada al sistema lineal homogéneo dado, de ahí que $-m \leq -r(A)$ luego $n - r(A) \geq n - m > 0$, i.e. $n - r(A) > 0$
Obsérvese que el número de variables libres es $n - r(A)$.

FIRST CLASS

de ahí que el número de variables libres es mayor que cero, por consiguiente el sistema lineal homogéneo dado tiene un número infinito de soluciones.

Ejercicio: Resolver el sistema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

la matriz aumentada asociada al sistema lineal dado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} (-\tfrac{1}{2})(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} (1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} (1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema lineal asociado a la matriz reducida es:

$$x_1 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -x_4$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Sea $x_4 = r$ $\quad x_1 = -r,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

El vector columna solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Resolver el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

la matriz aumentada asociada al sistema lineal dado es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} (-5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -9 \end{bmatrix} (1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -9 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

variables libres

El sistema asociado a la matriz reducida es:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 5x_5 &= 0 \quad & y \quad x_1 &= 2x_2 + 5x_5 \\ x_3 + 5x_5 &= 0 & x_3 &= -5x_5 \\ x_4 + 3x_5 &= 0 & x_4 &= -3x_5 \end{aligned}$$

Sea $x_2 = r$, $x_5 = s$, $r, s \in \mathbb{R}$

i.e. $x_1 = 2r + 5s$, $x_3 = -5s$, $x_4 = -3s$

El vector columna solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r+5s \\ r \\ -5s \\ -3s \\ s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

08-03-18

Algoritmo para calcular la inversa de la matriz A, si es que existe. Para hallar A^{-1}, si existe, se procede así:

- Paso 1) Formar la matriz partida $[A|I]$
- Paso 2) Aplicar el método de Gauss Jordan para reducir a la matriz $[A|I]$ a la forma $[I|B]$, si puede realizarse dicha reducción entonces A es invertible y B es la inversa de A, i.e, $B = A^{-1}$, de no ser así, A no es invertible.

Ejemplo: Hallar A^{-1}, si existe para $A =$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

- Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (3)(1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1/3) \\ (1/2) \\ (-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1/2) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & -13/6 & 8/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & -13/6 & 8/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & -13/6 & 8/6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

- Verificar que $A \cdot A^{-1} = I_3 = A^{-1}A$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & -13/6 & 8/6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -1/6 & -13/6 & 8/6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$