

mismo. De ello se desprende que $T^{-1} \circ \bar{T}(0) = 0$. Debido a que $T^{-1} \circ \bar{T}$ es una traslación concluimos que $T^{-1} \circ \bar{T} = Id_{\mathbb{R}^2}$. En consecuencia $T = \bar{T}$ y la igualdad $T \circ C = \bar{T} \circ \bar{C}$ se convierte, al aplicar T^{-1} , en $C = \bar{C}$. \square

Definición III.58. Si $F = T \circ C$, donde C es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^2 y T es una traslación de \mathbb{R}^2 , entonces C se llama la parte ortogonal de la isometría F y T la parte de traslación de F .

Ejercicios

- (1) Sean $(G, *)$ un monoide y $a \in G$. Diremos que a es invertible a izquierda si existe $b \in G$ tal que $b * a = e$ (e es el elemento neutro en G). Diremos que a es invertible a derecha si existe $c \in G$ tal que $a * c = e$. Demostrar que si a es invertible a izquierda y es invertible a derecha, entonces es invertible.
- (2) Demostrar que la operación definida en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $(m + n\mathbb{Z}) \times (r + n\mathbb{Z}) = mr + n\mathbb{Z}$, es asociativa y su elemento neutro es $1 + n\mathbb{Z}$.
- (3) Probar que cada una de las siguientes parejas es un grupo:
- (a) La pareja (\mathcal{A}, Δ) . Donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}(U)$, el conjunto potencia de un conjunto U y la operación Δ , se define como: para todo $A, B \in \mathcal{A}$: $A \Delta B = ((U \setminus A) \cap B) \cup ((U \setminus B) \cap A)$, donde $U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$, $U \setminus B = \{x \in U : x \notin B\}$ y \emptyset es el elemento neutro.
- (b) $(A, +)$, donde $A = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $+$ es la suma en \mathbb{R} y el neutro es el cero de los reales.
- (c) (A, \circ) donde la pareja se define de la siguiente manera. $A = \{E, F, G, H, I, J\}$, donde E, F, G, H, I, J son funciones de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tales que $E = Id_{\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}}$ y para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$: $F(c) = \frac{1}{c}$, $G(c) = 1 - c$, $H(c) = \frac{1}{1-c}$, $I(c) = \frac{c-1}{c}$, $J(c) = \frac{c}{c-1}$. En este caso E es el neutro de (A, \circ) .
- (d) La pareja (\mathcal{A}, \circ) , donde $\mathcal{A} = \{Id_{\mathbb{R}^3}, T_1, T_2, T_3\}$ con T_1 gira \mathbb{R}^3 180° alrededor del eje X , T_2 gira \mathbb{R}^3 180° alrededor del eje Y y T_3 gira \mathbb{R}^3 180° alrededor del eje Z . Aquí el neutro es $Id_{\mathbb{R}^3}$.
- (e) La pareja (D_4, \circ) , donde $D_4 = \{Id_{\mathbb{R}^2}, R_1, R_2, R_3, H, V, D, D'\}$ con R_1 es la rotación de \mathbb{R}^2 en 90° , R_2 es la rotación de \mathbb{R}^2 en 180° ,

Todos los ejercicios seleccionados

R_3 es la rotación de \mathbb{R}^2 en 270° ,

H es la reflexión respecto al eje X ,

V es la reflexión respecto al eje Y ,

D es la reflexión respecto a la diagonal $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ y

D' es la reflexión respecto a la diagonal $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Donde el neutro es $Id_{\mathbb{R}^2}$.

/(f) $(\mathcal{A}, *)$, donde

$\mathcal{A} = \{I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ y $*$ es el producto de matrices. El neutro es la matriz I_2 .

/(4) Si U es un conjunto, $\mathcal{P}(U)$ es el conjunto potencia de U , pruebe que $(\mathcal{P}(U), \cup)$, $(\mathcal{P}(U), \cap)$ son monoides pero no son grupos.

/(5) Demostrar que $T \subset G$ es un subgrupo de $(G, *)$ si y sólo si

(a) Para todo $a, b \in T$, se tiene que $a * b \in T$ y

(b) para todo $a \in T$, se tiene que $a^{-1} \in T$.

/(6) Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ dos grupos, demostrar que la operación $*$ definida en $G_1 \times G_2$ como $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$ define en $G_1 \times G_2$ una estructura de grupo, es decir $(G_1 \times G_2, *)$ es un grupo.

/(7) Considere la matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vea que R tiene orden 4 bajo la multiplicación de matrices, así que $\{R, R^2, R^3, R^4\}$ es un grupo cíclico. Observe que $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ e interprete geoméricamente el efecto de R .

/(8) Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo cíclico entonces es un grupo abeliano.

/(9) Sea $(G, *)$ un grupo y $a \in G$. Si $aGa^{-1} = \{a * g * a^{-1} : g \in G\}$, demostrar que $(aGa^{-1}, *)$ es un subgrupo de G .

/(10) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano. Probar que $aGa^{-1} = G$, para todo $a \in G$.

/(11) Dar un ejemplo de un grupo $(G, *)$ y elementos $a, b, g \in G$ tales que $b = a * g * a^{-1}$ y $b \neq g$.

/(12) Demostrar que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo cíclico. ¡Cuidado con la notación aditiva!

/(13) Sea $M_2(\mathbb{Q}) \subset M_2(\mathbb{R})$ donde $A \in M_2(\mathbb{Q})$ si y sólo si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

y $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Demostrar que $M_2(\mathbb{Q})$ es un subgrupo de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

■ (14) Sea $A \in (M_2(\mathbb{R}), +)$ con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$nA = \begin{pmatrix} na_{11} & na_{12} \\ na_{21} & na_{22} \end{pmatrix}.$$

- (15) Demostrar que en $(In_2(\mathbb{R}), \cdot)$ no se cumple que, para todo $A, B \in In_2(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{Z}$: $(AB)^n = A^n B^n$ (ver Lema III.12).
 (16) Demostrar que si $A \in In_2(\mathbb{R})$, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
 (17) Probar que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

entonces $\det A' = \det A$ (ver la Definición III.46).

- (18) Demostrar que si A es ortogonal entonces $\det A = \pm 1$. Además probar el Corolario III.56.
 (19) Demostrar que en general si $(G, *)$ es un monoide y $In(G) = \{g \in G : g \text{ es invertible en } (G, *)\}$, entonces $(In(G), *)$ es un grupo.
 (20) Si $N_2(\mathbb{R}) = \{A \in In_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, demostrar que $(N_2(\mathbb{R}), \cdot)$ es un subgrupo de $(In_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
 (21) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (22) Sea $D_2(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

donde $ab \neq 0$. Demostrar que $(D_2(\mathbb{R}), \cdot)$ es un subgrupo de $(In_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

- (23) Sea $(G, *)$ un grupo finito, es decir, G tiene sólo un número finito de elementos, entonces todo elemento de G tiene orden finito.
 (24) Sea $(G, *)$ un grupo finito, denotaremos por $|G|$ la cardinalidad de G , es decir, el número de elementos del conjunto G . Si G es infinito entonces $|G| = \infty$. Demostrar que $|S_n| = n!$.
 (25) En general, si $w \in \mathbb{R}^2$, definimos $Tras_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $Tras_w(x) = x + w$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que $Tras_w$ es una isometría.
 (26) Demuestre que si $u, v \in \mathbb{R}^2$, entonces

- (a) $Tras_u \circ Tras_v = Tras_{u+v}$,
 (b) $(Tras_u)^{-1} = Tras_{-u}$,
 (c) $Id_{\mathbb{R}^2} = Tras_0$.