

---

**Tarea # 8**

- I) Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{F}$  y sea  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  una aplicación lineal. Sea  $v \in \mathcal{V}$  un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ , i.e.,  $Av = \lambda v$ . Demostrar que: Si  $f(t)$  es un polinomio en  $\mathbb{F}[t]$  entonces  $f(A)v = f(\lambda)v$ .
- II) Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{F}$ . Sean  $A$  y  $B$  aplicaciones lineales de  $\mathcal{V}$  en sí mismo. Supóngase que  $AB = BA$ . Demostrar que si  $v$  es un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ , entonces  $Bv$  es un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$  siempre que  $Bv \neq 0$ .
- III) Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$ . Mostrar que  $AB$  y  $BA$  tienen los mismos valores propios.
- IV) Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$  y supóngase que  $B$  es invertible. Demostrar que  $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$ .
- V) Sea  $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ . Sean  $A$  y  $B$  tal y como aparecen en el ejercicio anterior. Demostrar que  $f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$ .
- VI) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Demostrar que  $A$  no puede ser diagonalizada.

- VII) Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$ . Demostrar que los valores propios de  $A^t$  son los mismos que los de  $A$ .
- VIII) Sean  $\mathcal{V} = \text{gen}(\text{sent}, \text{cost})$  y  $\mathcal{D} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  el operador derivación. ¿Tiene  $\mathcal{D}$  vectores propios en  $\mathcal{V}$ ? En caso afirmativo, ¿cuáles son?
- IX) Para cada matriz, hallar los valores propios y una base para cada espacio propio:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

---

b)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Qué matriz puede diagonalizarse y por qué ?

x) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar todos los valores propios y los vectores propios correspondientes de  $A$  y  $B$ , considerados como matrices sobre:

- a) el cuerpo real  $\mathbb{R}$ ,
- b) el cuerpo complejo  $\mathbb{C}$ .

XI) Hallar todos los valores propios y una base de cada espacio propio del operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{bmatrix}.$$

Puebla, Pue., a 17 de noviembre de 2014