BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Profr. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Matemáticas Básicas+Problemas de Matemáticas Básicas

---

Tarea # 7 *Conjuntos*

Parte I

Resolver todos los ejercicios de la sección 2.1 (págs. 54 y 55) del Capítulo 2 **Conjuntos** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

Parte II

Resolver todos los ejercicios de la sección 2.4 (págs. 61 y 62) del Capítulo 2 **Conjuntos** del libro de texto Matemáticas Elementales [1].

Parte III

Resolver todos los ejercicios de la sección 2.5 (págs. 71 y 72) del Capítulo 2 **Conjuntos** del libro de texto Matemáticas Elementales [1]

[1] J. Angoa, A. Contreras, et. al., Matemáticas Elementales, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Segunda Edición, 2010.

Parte IV

I) Sean A y B subconjuntos de Ω. Demostrar:

a) $A \cup (A \cap B) = A$

b) $A \cap (A \cup B) = A$

II) Sean Ω el referencial y sean A, B conjuntos, la ***diferencia simétrica*** de A y B, denotada por $A \triangle B$, está definida por $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Demostrar:

a) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$

b) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

III) Sean Ω el referencial y sean A, B y C conjuntos. Demostrar:

a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

b) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$

c) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$

d) Si $A \subseteq (B - C)$ entonces $A^c \cup C^c = \Omega$

e) Si $A \cap B \subseteq C^c$ entonces $(A - C^c) \cap (B - C^c) = \emptyset$

f) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c$

g) $(A - B) \subseteq C \iff C^c \subseteq B \cup A^c$

IV) Dado el referencial Ω, determine: $A \triangle A,\ A \triangle \overline{A},\ \Omega \triangle A$ y $\emptyset \triangle A$.

V) Indique si la proposición correspondiente es verdadera; en caso contrario, formule un contraejemplo. Los conjuntos X, Y y Z son subconjuntos del referencial Ω.

a) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup Z$

b) $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$

Puebla, Pue., a 24 de septiembre de 2020

3. ¿Se podrán construir conjuntos A, B y C que tengan las propiedades: $A \in B$, $B \in C$ y $a \notin C$? Un análisis sencillo muestra que los conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ y $C = \{-1, \{\{1\}, 2\}, 3\}$ satisfacen las propiedades solicitadas.

Ejercicios 1.

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos están representados por extensión y cuáles por comprensión.

   a) A es el conjunto de todos los habitantes de Puebla.

   b) $B = \{10,\ x,\ 3x\}$.

   c) C es el conjunto de los números naturales.

   d) D es el conjunto de todos los números naturales x tales que $x > 5$, $x < 9$ y $x \neq 7$.

   e) $E = \{x \mid x \in C,\ x \text{ es par},\ x > 5,\ \text{ y } x < 9\}$.

   f) $F = \{6,\ 8\}$

   g) $G = \{x \mid x \text{ es una recta del plano}\}$

   h) H es el conjunto de las bibliotecas de Puebla.

   i) I es el conjunto de todos los libros de todas las bibliotecas de Puebla.

   j) $J = \{\{x \mid x \in C\},\ \{x \mid x \in E\}\}$.

   k) $K = \{\{x \mid x \in E\},\ 6\}$.

   l) $L = \{0, \{1, 2\}, 3, 4\}$.

2. Siguiendo con la notación del ejercicio 1, responda las siguientes preguntas.

   a) Si x es un libro, ¿es cierto que $x \in H$?

   b) ¿La biblioteca Nicolás Copérnico es elemento de H?

   c) ¿Es cierto que $2 \in J$?

   d) ¿Es cierto que $6 \in K$?

   e) ¿Es cierto que $2 \in C$?

3. Representar por extensión los conjuntos siguientes.

    a) $A = \{x \mid x \text{ es natural y } x^2 < 20\}$.
    b) $B = \{x \mid x \text{ es natural } x > 1,\ x \leq 21 \text{ y } x \text{ es impar}\}$.
    c) $C = \{x \mid x \text{ es entero y } x^2 + 1 \leq 20\}$.
    d) $D = \{x \mid x \text{ es natural y } x = 4 \text{ o bien } x = 6\}$.
    e) $E = \{x \mid x \text{ es real y } x^2 = -1\}$.

§2

2.2. Conjunto Universal

Cuando hablamos de una propiedad que caracteriza a los elementos de un conjunto dado, generalmente esta propiedad se refiere a un conglomerado de objetos de cierto tipo. Por ejemplo, si p es la propiedad de ser vocal del abecedario, esta es una propiedad que se refiere a las letras del alfabeto y no por ejemplo a seres humanos o a materiales para construcción de casas o a estrellas del firmamento. En la teoría de Conjuntos que estamos desarrollando, trabajaremos a veces con varios conjuntos cuyos elementos son todos del mismo tipo, es decir, pertenecen todos a un mismo conglomerado de cosas, al que podemos llamar **conjunto universal**. Por ejemplo, en el siguiente capítulo de este curso, trabajaremos con números reales, racionales, irracionales, enteros, naturales; pero todos estos son números reales. El conjunto de los números reales juega el papel de conjunto universal, pues no se hará mención de otro tipo de objetos.

En el análisis de una situación particular, dicho conjunto universal U, consta de todos los elementos a los que se pueda referir esa situación. Es algo así como la fuente de todos los elementos que forman parte de los conjuntos sobre los que vamos a trabajar en esa situación particular; el conjunto en donde tendrán sentido las propiedades que caracterizan a los elementos de esos conjuntos.

No es difícil convencerse de que el conjunto universal no es único; depende del problema que se esté considerando y puede cambiar según

Ya hemos dicho que para que dos conjuntos A y B sean igualitos, se necesita que $(A \subseteq A \ \wedge \ B \subseteq A)$ sea verdadera. ¿Qué pasaría si solamente tuviéramos que $A \subseteq B$ es verdadera pero $B \subseteq A$ es falsa?. En este caso todos los elementos de A son también elementos de B, pero no al revés, es decir, existe al menos un elemento de B que no es elemento de A. Entonces A y B son distintos.

Definición 2.4.2 Sean A y B subconjuntos de U. Cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$ son verdaderas, diremos que A es un **subconjunto propio** de B. Simbolizaremos con

$$A \subsetneq B$$

a la proposición "A es subconjunto propio de B".

Nota: No confundir $A \subsetneq B$ con $A \nsubseteq B$.

Ejemplos:

1. Sea U el abecedario español. Sea B el conjunto de letras de la palabra caperucito y $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$. Entonces $A \subsetneq B$ es verdadera.

2. Sea U el conjunto de todos los libros, sea B el conjunto de libros de la biblioteca "Niels Bohr" y sea C el conjunto de libros de Química de la misma biblioteca. Entonces $C \subsetneq B$ es verdadera, porque el libro "Geometric Transformations" de I. N. Yaglom no es de química y se dice que está en la biblioteca Niels Bohr.

3. En el Ejemplo 3 de la sección anterior $A \subsetneq C$.

Ejercicios 2.

1. Consideremos los siguientes conjuntos

$$P = \{\text{r, s, t, u, v, w}\}, \qquad Q = \{\text{u, v, w, x, y, z}\},$$
$$R = \{\text{s, u, y, z}\}, \qquad S = \{\text{u, v}\}, \qquad T = \{\text{s, u}\},$$
$$V = \{\text{s}\}, \qquad Z = \varnothing.$$

Diga cuál o cuáles de estos conjuntos:

a) Son subconjuntos de P y de Q únicamente.

b) Son subconjuntos de R pero no de Q.

c) No son subconjuntos de R pero sí de Q.

d) No son subconjuntos de P ni de R.

e) Son subconjuntos de todos.

2. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y explíquese el por qué.

a) $\varnothing \subseteq \varnothing$, b) $5 = \{5\}$, c) $\varnothing \in \varnothing$, d) $3 \in \{3, 5\}$,
e) $\{\text{a, b, c}\} = \{\text{c, b, d, e, a}\}$, f) $\varnothing \subseteq \{1, 2, \text{a}, \text{b}\}$, g) $0 \in \varnothing$,
h) $4 \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, i) $\{3, 4\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$,
j) $\{2, 4\} = \{\{2\}, \{4\}\}$, k) $\{p\} = \{p, \varnothing\}$, l) $\{\varnothing, 0, 1\} = \{\varnothing, 1\}$,
m) $\{\varnothing\}$, n) $\{2 - 2\} = \{0\}$, ñ) $\varnothing = \{\varnothing\}$,
o) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge, x < 3\} = \{2, 1\}$, p) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 2\} = \{0\}$,
q) $\{\text{a, i}\} \in \{\text{a, e, i, o, u}\}$ r) $\{\text{e, i}\} \subseteq \{\text{a, e, i, o, u}\}$.

3. Determine el conjunto S formado por los subconjuntos de más de dos elementos del conjunto $\{\text{a, b, c, d, e}\}$. Responda lo siguiente: ¿El conjunto $\{\text{a}, \text{b}, \text{c}\}$ es subconjunto de S?, ¿$\{\{\text{a}, \text{b}, \text{c}\}\} \subseteq S$. Fundamente sus respuestas.

4. Colocar un signo $=$ o $\neq$ según corresponda.

   a) $\{a + b,\ (b - a)(b + a),\ a + a\} \quad \{b^2 - a^2,\ 2a,\ a + b\}$.

   b) $\{5 + 1,\ 7,\ 34 + 16,\ 0\} \quad \{5 - 5,\ 50,\ 6,\ 8 - 1\}$.

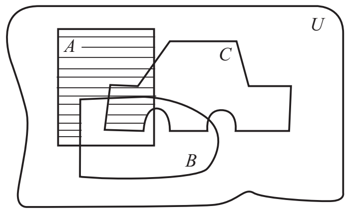
   c) $\{3^4,\ \sqrt{1},\ 5^2,\ 25\} \quad \{81,\ 1^2,\ 25\}$.

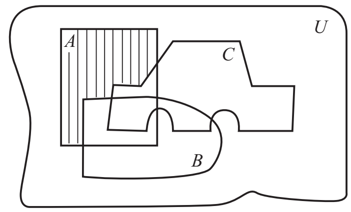
   d) $\{3^4,\ \sqrt{1},\ 5^2,\ 25\} \quad \{81,\ 1^2,\ 25\}$.

   e) $\left\{\frac{0}{15},\ \frac{4}{4},\ 1\right\} \quad \{0,\ 1\}$

5. Dado el conjunto $K = \{500,\ 17,\ 315\}$, determine los conjuntos L tales que la proposición ($\{500\} \subseteq L$ y $L \subseteq K$ y $L \neq K$) es verdadera.

6. Sea U el conjunto de números naturales y sean $A = \{x \in U \mid x \leq 5\}$ y $B = \{x \in U \mid\ -1 \leq 4 - 3x\}$. Pruebe que $A = B$ (*Sugerencia*: Demuestre que: $\forall\, x \in U :\ (x \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq 4 - 3x)$ es verdadera).





Ejercicios 3.

0. Probar que si U es un conjunto universo, $U^{\complement} = \varnothing$.

1. Haga las demostraciones de las propiedades enunciadas en los incisos a), b), c), d), e), f), g), h), i), k), n) y p) de la página 66.

2. Si A, B, C son subconjuntos cualesquiera de un conjunto universo U, probar que $(A-B)-C = A-(B\cup C)$. ¿A qué es igual $A-(B-C)$.

3. Dados el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$, $C = \{1, 4, 8, 9\}$, determine

   a) $(A^{\complement} \cup C) - (B - C^{\complement})$.
   b) $(A^{\complement} - (B^{\complement} \cap C)) - (C^{\complement} \cap B)$.
   c) $(A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup (B^{\complement} - C)^{\complement}$
   d) $((A - B) \cap (A \cap B)) \cup ((A - B) \cap (B - A))$.

4. Sea A un conjunto cualquiera en un conjunto universo U. Halle expresiones diferentes para los conjuntos siguientes

   a) $A - \varnothing$,
   b) $A - A$,
   c) $A \cap \{\varnothing\}$,
   d) $\varnothing - A$,
   e) $\{\varnothing\} = \varnothing$,
   f) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$,
   g) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$,
   h) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$.

5. Proponer tres conjuntos H, J, K, que satisfagan las relaciones siguientes: $H \nsubseteq K$, $J \cap K = \varnothing$, $H \cap K \neq \varnothing$, $H \neq J$, $K \nsubseteq H$, $J \subseteq H$ (Para auxiliarse puede usar diagramas de Veen).

6. Si A, B y C son subconjuntos de U, determine cuál de las siguientes proposiciones es falsa. Para cada proposición falsa, construya un diagrama de Venn que muestre que es falsa.

   a) $(A \cap B)^{\complement} \subseteq A^{\complement}$,
   b) $A \cup B \supseteq A \cap B$,
   c) $(A \cap B) \cup A = A$,
   d) $(A \cap B)^{\complement} \subseteq (A \cap B)^{\complement}$,
   e) $B \subseteq A \cap B$,
   f) $B \cup (B \cap A)^{\complement} = U$,
   g) $B^{\complement} \subseteq (B \cap A)^{\complement}$,
   h) $A \cap B \subseteq A \cup B$,
   (i) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$,
   (j) $A \cap B \subseteq C^{\complement} \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \varnothing$,
   (k) $A \subseteq (B \cup C) \wedge B \subseteq (A \cup C)^{\complement} \Rightarrow B = \varnothing$

7. Dados A, B y C subconjuntos cualesquiera de un conjunto universo U, demuestre las siguientes propiedades:

   a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup (B - A) = B$.
   b) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \subseteq B^{\complement}$.
   c) Si $A \cup B = U$ entonces $A^{\complement} \subseteq B$.
   d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
   e) $A - B = B - A$ si y sólo si $A = B$.
   f) $(A - B) \cap B = (B - A) \cap A$.
   g) $A^{\complement} - B^{\complement} = B - A$.
   h) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C \wedge A \cap C \subseteq B \cap C$.

8. Si A, B y C son subconjuntos de U, use las leyes de D'Morgan para simplificar.

   a) $\left[(A^{\complement} \cap B^{\complement}) \cup A^{\complement}\right]^{\complement}$.
   b) $\left[A^{\complement} \cup (B \cap C)\right]^{\complement}$.
   c) $\left[(A^{\complement} \cap B^{\complement}) \cup (B^{\complement} \cap C^{\complement}) \cup (A^{\complement} \cap C^{\complement})\right]^{\complement}$.

9. Descanse. ¡Buena falta le hace!