
Tarea # 6

- I) Sea \mathcal{V} un espacio vectorial y sean $\phi_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \phi_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales. Sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v))$. Demostrar que T es lineal. Generalizar el resultado.
- II) Sea $\mathcal{V} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ tienen derivadas de todos los órdenes}\}$ y sea $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ el operador derivación. ¿Cuál es el núcleo de D^2 ? ¿Cuál es el núcleo de D^n ?
- III) Sea $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$ y sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2}$$

- a) Demostrar que T es lineal.
b) Determinar el $\text{nu}(T)$.
c) ¿Cuál es la dimensión del $\text{nu}(T)$?
- IV) Sea $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$ y sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ la aplicación definida por

$$T(A) = \frac{A - A^t}{2}$$

- a) Demostrar que T es lineal.
b) Determinar el $\text{nu}(T)$.
c) ¿Cuál es la dimensión del $\text{nu}(T)$?
- V) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T \neq 0$ pero $T^2 = T \circ T = 0$. Demostrar que existe una base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 tal que $T(v_1) = v_2$ y $T(v_2) = 0$.
- VI) Sea $\dim(\mathcal{V}) > \dim(\mathcal{W})$ y sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Demostrar que el núcleo de T no es $\{0\}$.
- VII) Sean S y T aplicaciones lineales invertibles de un espacio vectorial \mathcal{V} en sí mismo. Demostrar que

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

- VIII) Determine si la transformación lineal T dada es (i) inyectiva e (ii) sobreyectiva

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b - 3c \\ c - a \end{bmatrix}.$$

IX) Sean $S, T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y) = (x + y, x - y) \text{ y } T(x, y) = (2x + y, 3x - 5y),$$

respectivamente. Demostrar que S y T son invertibles.

X) Sean $S, T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales definidas por

$$S(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + 2z) \text{ y } T(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z),$$

respectivamente. Demostrar que S y T son invertibles.

XI) Sea $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ una transformación lineal tal que $T^2 = 0$. Demostrar que $I_{\mathcal{V}} - T$ es invertible.

XII) Sean $T_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ y $T_2 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ isomorfismos de espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Demostrar que $T_2 \circ T_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es un isomorfismo.

XIII) Demuestre que los espacios vectoriales \mathcal{V} y \mathcal{W} son isomorfos, exhibiendo un isomorfismo explícito $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$.

a) $\mathcal{V} = \mathcal{MS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (matrices simétricas de tamaño 2×2), $\mathcal{W} = \mathcal{TS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (matrices triangulares superiores de tamaño 2×2)

b) $\mathcal{V} = \mathcal{D}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ (matrices diagonales de tamaño 3×3), $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$

c) $\mathcal{V} = \mathbb{C}$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$

XIV) ¿Es $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$ isomorfo a $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$?

Puebla, Pue., a 14 de octubre de 2014